$X = (X, d)$ metrik uzayında bazı özel alt kümeler

Yuvar ve küre $\quad x_0 \in X, \quad r \in \mathbb{R}^+$

Şuhubi sf. 234-236

a) $B(x_0, r) \hat{=} \{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \}$

Açık yuvar

b) $\tilde{B}(x_0; r) \hat{=} \{ x \in X \mid d(x, x_0) \leq r \}$

Kapalı yuvar

c) $S(x_0; r) \hat{=} \{ x \in X \mid d(x, x_0) = r \}$

Küre

$\Rightarrow \quad S(x_0, r) = \tilde{B}(x_0, r) - B(x, r)$

Soru Ayrık metrik için küreye ne olur?

Açık küme, kapalı küme

$M \subset X, \quad \forall x \in M \quad \exists \quad B(x_0, r)$ ise M açık kümedir

$K \subset X$; K'nın X'deki tümleyeni açık ise K kapalı kümedir.

$\Rightarrow$ Her açık yuvar bir açık küme

Her kapalı yuvar bir kapalı küme

ε- komşuluk, komşuluk

Çakubi sf. 143

a) $B(x_0, \varepsilon)$: x_0'ın ε- komşuluğudur.

b) x_0'ın ε-komşuluğunu kapsayan her $M \subset X$, x_0'ın komşuluğudur.

İç nokta, içi

a) $M \subset X$, x_0'ın bir komşuluğu ise, x_0 M'in iç noktasıdır

b) M'nin içi, M'nin tüm iç noktalarının oluşturduğu kümedir

$\Downarrow$

$\mathring{M}$

Teorem: $\mathcal{T}$: X'in tüm açık alt kümelerinin hepsi olsun

MU1

Bunlar aslında daha önce benzer kümeyi gördüğümüz kavramlar

(T1) $\phi \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

(T2) $\mathcal{T}$'nin elemanlarının herhangi sayıda birleşimi $\mathcal{T}$'nin elemanıdır

(T3) $\mathcal{T}$'nin elemanlarının sonlu sayıda arakesiti $\mathcal{T}$'nin elemanıdır

tanıt: (T1) Açık küme tanımından

(T2) M_i açık kümeler olmak üzere

$U = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$

$x \in U \Rightarrow x \in M$

(T3) $y \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_n$

$B_{y_i} \subset \mathcal{M}_i$, her $\mathcal{M}_i$ için bir B_{y_i} var ve bu B'lerin en küçüğü $\hat{B}_{y_i} \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n$ ◀

Şuhubi sf. 198-200

Topolojik Uzay

$(X, \mathcal{T})$; $\mathcal{T}$: X'in bir alt kümeler topluluğu

(1) $\phi \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

(2) $\mathcal{T}$'nin elemanlarının herhangi sayıda birleşimi $\mathcal{T}$'nin elemanıdır.

(3) $\mathcal{T}$'nın elemanlarının sonlu sayıda arakesiti $\mathcal{T}$'nın elemanıdır.

$\Longrightarrow$ Bir Metrik Uzay, topolojik uzaydır.

Örnek: $X = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{T}_1 = \{\phi, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a, b, d\}\}$

$\mathcal{T}_2 = \{\phi, X, \{b\} \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$

$\mathcal{T}_3 = \{\phi, X, \{a\}, \{a,b\}, \{b, c, d\}\}$

Hangileri topoloji

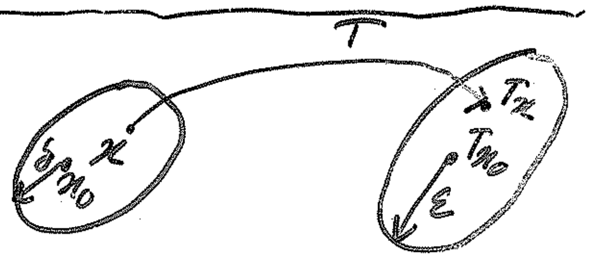
Hatırlatma: Süreklilik

Çalıkobi sf. 157

f fonksiyonu $(f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ tanım bölgesindeki bir x_0 noktasında ancak ve ancak, seçilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|x - x_0| < \delta$ alındığında $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa süreklidir.

Çalıkobi sf. 256

Sürekli Dönüşüm



(X, d), $(Y, \tilde{d})$ $\quad T: X \to Y$

- $\forall \varepsilon > 0$ için, $\exists \delta > 0$; $\forall x \in X$, $d(x, x_0) < \delta$ $\Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$; T, x_0 noktasında süreklidir.
- T, $\forall x \in X$ için sürekli ise T, süreklidir

Teorem: Sürekli Dönüşüm

MU2

$X = (X, d)$, $\quad Y = (Y, \tilde{d})$ $\quad T: X \to Y$

T süreklidir $\Longleftrightarrow$ Y'nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü X'in bir açık alt kümesidir

Tanıt: $\Longrightarrow$ Bu durum için varsayım ne?

$S \subset Y$ ve S açık alt küme olsun.

S_0'da S'in ters görüntüsü olsun.

Durum 1.: $S_0 = \Phi \Rightarrow$ ....

Durum 2.: $S_0 \neq \Phi$

Bu durumda herhangi bir $x_0 \in S_0$ için

$y_0 = Tx_0$ olsun.

S açık küme $\xRightarrow[\text{tanımından}]{\text{açık küme}}$ y_0'nun ε- komşuluğu N, S'nin içindedir

T sürekli $\xRightarrow[\text{dönüşüm tanımından}]{\text{sürekli}}$ x_0'nun bir δ- komşuluğu N_0 vardır ve N_0, N'ye dönüşür

$\Downarrow$

$N \subset S$, $N_0 \subset S_0$

$x_0 \in S_0$ herhangi bir nokta idi $\xRightarrow[\text{MU1'den}]{\text{Teorem}}$ S_0 açık kümedir

$\Leftarrow$ Bu durumda varsayım ne?

$\forall x_0 \in X$ ve Tx_0'nun herhangi bir ε- komşuluğu N olsun $\xRightarrow{\text{Hipotezden}}$ N_0 açık kümedir ve $x_0 \in N_0$

$\Downarrow$

$\xRightarrow[\text{tanımından}]{\text{açık küme}}$ N_0, x_0'nun δ- komşuluğunda içerir ve bu komşuluk N_0, N'ye dönüştüğünden

$\xrightarrow[\text{dönüşüm tanımından}]{\text{sürekli}}$ T, x_0 da süreklidir.

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta idi $\Rightarrow$ T süreklidir

Şuhubi sf. 251

Yığılma noktası, kapanış

- $M \subset X$, $x_0 \in X$

x_0, M nin yığılma noktası ise x_0'nın her komşuluğunda en az bir $y \in M \ni y \neq x_0$ vardır

- $\overline{M}$: M ve M'nin yığılma noktalarını içeren küme M'nin kapanışıdır.

$\Longrightarrow$ $\overline{M}$, M'yi içeren en küçük kapalı kümedir

Şuhubi sf. 254

Yoğun küme, Ayrılabilir küme

- $M \subset X$, $\overline{M} = X$ ise M, X'de yoğundur
- X'in sayılabilir, X'de yoğun alt kümesi varsa X ayrılabilirdir

Örnek: 1) $\mathbb{R}$

2) ℓ^∞

3) ℓ^p

2) • $[0,1]$ aralığındaki noktalar kümesi için ne diyebiliriz? 19

Hatırlatma: Sayılabilir küme Suhubi sf. 34-35

X ve Y kümeleri arasında birebir ve üzerine bir dönüşüm varsa bu iki küme birbirine sayısal olarak eşdeğerdir.
Sayısal olarak doğal sayılar kümesine eşdeğer olan bir X kümesine numaralanabilir denir. Sonlu ya da numaralanabilir bir kümeye de sayılabilir adı verilir

• ℓ^{∞}: X - kompleks sayılardan oluşan tüm sınırlı dizilerin kümesi

$$d(x,y) \hat{=} \sup_{j\in N} |\xi_j - \eta_j|$$

??

• $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$ sıfır ve birlerden oluşan bir dizi olsun

y'ye bir örnek verin:

• $\hat{y}$'da y ile ilişkili bir reel sayı olsun
??

$$\hat{y} : \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \ldots$$

$\Rightarrow$ her $\hat{y} \in [0,1]$ ikili gösterimi vardır

$\hat{y}$'ların her birinin ikili gösterimi farklıdır

$\Rightarrow$ • 0 ve 1'lerden oluşmuş dizilerin oluşturduğu küme sayılabilir midir?

• Her dizi metrik tanımından dolayı belli bir uzaklıkta olacak nekadar?? Neden!!

Bu dizilerin her biri $r = 1/3$ olan yuvarların merkezinde olsun $\Rightarrow$ Kaç tane yuvar var?

Bu yuvarların arakesiti nedir?

M, ℓ^∞'da yoğun herhangi bir küme olsun

Yoğun küme tanımından $\Rightarrow$ Yuvarların her birinde M'in bir elemanı vardır

$\Rightarrow$ M sayılabilir değildir

M herhangi bir küme idi $\Rightarrow$ ℓ^∞ ayrılabilir değildir.

3). ℓ^p: X- kompleks sayılardan oluşan ve $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$ olan diziler kümesi

$$d(x,y) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p}$$

- $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, 0, 0, \dots)$

  $n \in \mathbb{Z}^+$

  $\eta_j \in \mathbb{Q}$

- M y dizilerinin oluşturduğu küme

$\Rightarrow$ M sayılabilir kümedir. neden?,

$(\xi_j) \in \ell^p$

$$\underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p}_{\text{Bu terim neyi temsil ediyor?}} < \frac{\varepsilon^p}{2} \rightarrow \text{Neden?}$$

Yoğun kümenin tanımını unutmayın!!!

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$'da yoğun olduğundan her ξ_j için civarında bir η_j vardır.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$ sağlayan bir $y \in M$ bulunur.

$$\Rightarrow [d(x,y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$$

$\Rightarrow M,$ $\underbrace{\ell^p \text{ de yoğun}}_{\text{neden??}}$dur.

Dizinin Yakınsaklığı, limit

Şuhubi sf. 252

- $(x_n) \in X = (X, d)$

Bunu nasıl bulacağız biliyoruz?!!

$\exists x \in X \ni \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ ise (x_n) yakınsaktır

- x, (x_n)'in limiti dir

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$

- (x_n) yakınsak değilse, ıraksaktır.

Sınırlı küme, sınırlı dizi

Şuhubi sf. 236

- $M \neq \Phi$, $M \subset X$

$\delta(M) \triangleq \sup_{x,y\in M} d(x,y)$ sonlu ise M sınırlı kümedir

M kümesinin çapı

- (x_n)'e karşı düşen noktalar kümesi X'in sınırlı bir alt kümesi ise $(x_n) \in X$ sınırlı dizidir.

Lemma: Sınırlılık ve limit

MU3

$X = (X, d)$

$\Rightarrow$ a) X'de yakınsak bir dizi sınırlıdır ve limiti tektir.

b) X'de $x_n \to x$ ve $y_n \to y \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

Durum 1: sınırlılık

tanıt: a) $x_n \to x \overset{\text{hipotezden}}{\Longrightarrow}$ $\varepsilon = 1$ alın dışında

$\forall n > N$ için $d(x_n, x) < 1$

olmasını sağlayacak N bulunabilir.

üçgen eşitsizliğinden $\Rightarrow$ $\forall n,\ d(x_n, x) < 1 + a$ fark ne?!

$a = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots d(x_N, x)\}$

$\Rightarrow (x_n)$ sınırlı

Durum 2: teklik

$x_n \to x$

$x_n \to z$

üçgen eşitsizliğinden $\Rightarrow 0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z)$

hipotezden $\Rightarrow 0 \leq d(x, z) \leq 0$

yakınsak dizi tanımına dikkat!!!

Metrik tanımından $\Rightarrow x = z$

b) $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$

$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n)$

Nasıl?

$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n)$

$n \to \infty$

$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \to 0$

$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

Hatırlatma <u>Cauchy Dizisi</u> Şuhubi sf. 154

Bir $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ dizisi her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen bir $N(\varepsilon)$ pozitif tam sayısı $n, m \geq N$ alındığında $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa Cauchy dizisi adını alır.

Cauchy Dizisi, Tamlık

$d(x_m, x) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x_n)$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

- $(x_n) \in X = (X, d)$ "Cauchy" dir

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \ni d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n > N$$

- X tamdır $\Leftrightarrow$ X'deki her Cauchy dizisi yakınsaktır

Örnek: $(x_n) \in \mathbb{R} \ni |x_n - x_{n+1}| \to 0, n \to \infty$

fakat $x(n)$ Cauchy olmasın.

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$

$|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{n} \quad n \to \infty \quad \frac{1}{n} \to 0$

$\varepsilon = 0.1 \quad N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \quad n, m > 10 \quad n = 13, m = 11$

$$|a_{11} - a_{13}| \le |a_{11} - a_{12} + a_{12} - a_{13}| \le \left| -\frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right| \nless 0.1$$

Metrik tanımında 4. aksiyomu, üçgen eşitsizliğini şöyle değiştirsaydık:

$$d(x,z) \le \max\big(d(x,y), d(y,z)\big)$$

O zaman bu dizi Cauchy dur muydu?

$$d(a_{13}, a_{11}) \le \max\big(d(a_{13}, a_{12}), d(a_{12}, a_{11})\big)$$

$$d(a_{13}, a_{11}) \le \frac{1}{12} \quad \checkmark$$

Hatırlatma: **Cauchy Yakınsaklık Teoremi**

$(x_n) \in \mathbb{R}$ yakınsaktır

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ni |x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall m,n > N$$

tanıt: $(\Rightarrow)$ $x_n \to c \overset{\text{yakınsaklık}}{\underset{\text{tanımından}}{\Longrightarrow}} \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ni |x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$

üçgen eşitsizliğinden $\Rightarrow |x_m - x_n| \le |x_m - c| + |c - x_m|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ $|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall m,n > N \overset{\text{Cauchy dizisi}}{\underset{\text{tanımından}}{\Longrightarrow}} \varepsilon = 1$ için

$$\exists M \ni |x_m - x_n| < 1$$

$$\forall m,n \ge M$$

$\Rightarrow \forall n > M$

$$|x_n| = |x_n + x_M - x_M| \leq |x_n - x_M| + |x_M|$$
$$< 1 + |x_M|$$

$$r = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{M-1}|, 1 + |x_M|\}$$

$\Rightarrow |x_n| \leq r \quad \forall n$

$\Rightarrow (x_n)$ sınırlı dizi

Hatırlatma: <u>Weierstrass- Bolzano Teoremi</u> Şahabi sf. 154

Her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Weierstrass- Bolzano Teoreminden $\Rightarrow x_{n_k} \to c$, (x_n)'in yakınsak alt dizisi olsun

Amaç: $x_n \to c$ olduğunu göstermek.

$\varepsilon > 0$, $\exists N \ni m, n > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon/2$

$x_{n_k} \to c$ olduğundan $\Rightarrow \exists K \ni k \geq K \Rightarrow |x_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

k'yı öyle seç ki $n_k \geq N$ ve $k \geq K$ $\Rightarrow \forall n \geq N$

$$|x_n - c| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow x_n \to c$$

Teorem: Reel sayı doğrusu, Kompleks sayılar düzlemi

MU4

Reel sayılar doğrusu ile kompleks sayılar düzlemi tam metrik uzaylardır.

Örnek: 1) $\mathbb{R} - \{a\}$

2) $\mathbb{Q}$

3) $(a,b) \subset \mathbb{R}$

Teorem: Yakınsak Dizi

MU5

Metrik uzaydaki her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

Teorem: Kapanış, kapalı küme

MU6

$$M \subset X = (X,d), \quad M \neq \emptyset$$

a) $x \in \overline{M} \iff \exists (x_n) \in M \ni x_n \to x$

b) M kapalı küme $\iff \exists (x_n) \in M \ni x_n \to x$
$\Rightarrow x \in M$

tanıt: (a) $(\Rightarrow)$ $x \in \overline{M}$

1. durum: $x \in M$

$(x, x, x, \dots)$ aranan dizi

2. durum: $x \notin M$

$\overline{M}$ tanımından $\Longrightarrow$ x bir yığılma noktası

(neyin tanımından?)

nasıl bir yuvar

yığılma noktası tanımından $\Longrightarrow$ her $n = 1, 2, \ldots$ için $\exists\, B(x; 1/n)$

$\exists\, x_n \in M$

$\Downarrow$

$n \to \infty$ için $1/n \to 0 \Longrightarrow x_n \to x$

$(\Longleftarrow)$ $(x_n) \in M$ ve $x_n \to x$. $\Longrightarrow$ 1. durum $x \in M$

2. durum $x \notin M$

Her iki durum içinde $\xRightarrow{\text{hipotezden}}$ x'in her komşuluğunda $\exists\, x_n \ni x_n \neq x$

yığılma noktası tanımından $\Longrightarrow$ x, M'in bir yığılma noktasıdır

kapanışın tanımından $\Longrightarrow$ $x \in \overline{M}$

(b) M kapalı kümedir $\Longleftrightarrow$ $M = \overline{M}$ $\Longleftrightarrow$ (a)

<u>Teorem:</u> <u>Tam altuzay</u>

<u>MU7</u> $M \subset X = (X, d)$, $X = (X, d)$ tam

Şuhubi sf-263

M tamdır

$\Longleftrightarrow$

M, X'de kapalı

tanıt: $(\Longrightarrow)$ M tamdır

tamlığın tanımı + MU6 $\Rightarrow \forall x \in \bar{M}\ \exists (x_n) \in M$
$\ni x_n \to x$

Neden bu iki adıma gerek var? $\left\{\begin{array}{l}\text{MU5} \\ \text{hipotezden}\end{array}\right.$ $\Rightarrow (x_n)$ Cauchy'dir $\Downarrow$
$\Rightarrow (x_n)$ M'de yakınsaktır
MU3 $\Rightarrow$ limit tektir
$\Rightarrow x \in M$

kapalılığın tanımından $\Rightarrow$ herhangi bir x için gösterildi
M kapalıdır

$(\Longleftarrow)$ M kapalıdır

kapalılık tanımı, Cauchy tanımı

Sadece Cauchy olma koşulu var

Nasıl?

Bunun bir sakıncası var mı? (x_n) M'de Cauchy olsun $\Rightarrow x_n \to x \in X$

MU 6(a) $\Rightarrow x \in \bar{M}$
Hipotezden $\Rightarrow \bar{M} = M$
$\Big\} \Rightarrow x \in M$

Tamlık tanımından $\Rightarrow$ Herhangi bir Cauchy dizisi seçildiğinden M tamdır.

Daha kısa tanıt? MU5 + MU6(b) ??

Teorem : Sürekli Dönüşüm

$X = (X, d)$ $\quad T: X \to Y$

$Y = (Y, \tilde{d})$

T, $x_0 \in X$ 'de süreklidir $\iff$ $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$

Tanıt: $(\Rightarrow)$

T, $x_0 \in X$ 'de sürekli $\xRightarrow[\text{Tanımından}]{\text{Süreklilik}}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\ni d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$

$x_n \to x_0$ olsun $\xRightarrow[\text{tanımından}]{\text{Yakınsaklık}}$ $\exists N \ni \forall n > N$ $d(x_n, x_0) < \delta$

$$\Downarrow$$

$\forall n > N$ $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$

$\xRightarrow[\text{Tanımından}]{\text{Yakınsaklık}}$ $Tx_n \to Tx_0$

$(\Leftarrow)$ $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$

T, x_0 'da sürekli olmasın

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ni \forall \delta > 0 \; \exists x \neq x_0$

Süreklilik $d(x, x_0) < \delta$ fakat $\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$

tanımından yazıldı

$\delta = \frac{1}{n}$ için $\exists x_n \Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ fakat

$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

hipotezden

$x_n \to x_0$ ancak $Tx_n \not\to Tx_0$ Hipotez ile çelişki

$\Rightarrow T$, x_0'da sürelidir

Bir Metrik Uzayın tam olduğu nasıl gösterilir?

Şuhubi sf 261-262

- $X = (X, d)$
- $(x_n) \in X = (X, d)$

↓ Bu neydi?

Burada bizim için önemli olan ne?

$\exists x \in X \ni \lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ ise (x_n) yakınsaktır

- X tamdır $\Leftrightarrow$ X'deki her Cauchy dizisi yakınsaktır

Bu??

önemi ne?

(i) x elemanını oluştur

(ii) $x \in (X, d)$ olduğunu göster

(iii) $x_n \longrightarrow x$ olduğunu göster

$\mathbb{R}^n$'in tamlığı

$X = (\mathbb{R}^n, d)$

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x,y) \triangleq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j - \eta_j \right)^2 \right)^{1/2}$$

$(x_m) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_m) = \left(\begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_n^{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \\ \vdots \\ \xi_n^{(2)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \xi_1^{(n)} \\ \xi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \xi_n^{(n)} \end{bmatrix}, \dots \right)$$

x_m, (x_m)'in bir elemanı $\Rightarrow x_m = \left[\xi_1^{(m)} \; \xi_2^{(m)} \dots \xi_n^{(m)} \right]^T$

(x_m), Cauchy olsun

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \ni d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

$m, r > N$

Nasıl yazıldı

$$\left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right)^2 < \varepsilon^2$$

$$\left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right| < \varepsilon \qquad 1 \le j \le n$$

j'yi sabit tut ve (x_m)'den yararlanarak yeni bir dizi oluştur $\Rightarrow \left(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots \xi_j^{(n)}, \dots \right)$

Bu dizi için ne söyleye biliriz?

$\Rightarrow$ Benzerini $1 \leq j \leq n$; tüm j'ler için yapalım

$\Rightarrow$ yeni diziler $x = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$'e yakınsar sırasıyla

Aranan x bulundu

(i) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ✓

$x \in \mathbb{R}^n$ aşikar (ii) ✓

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

$r \to \infty \quad d(x_m, x) \leq \varepsilon \quad m > N$

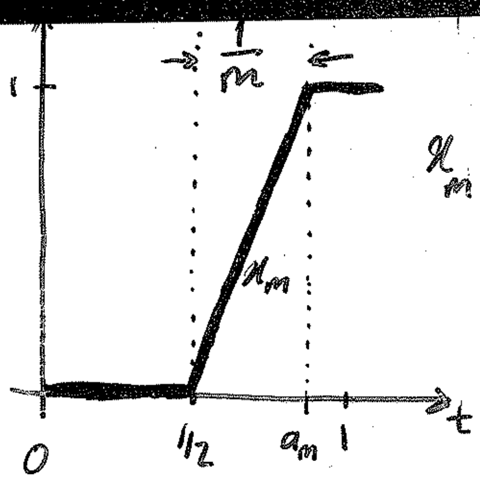
x, (x_m)'in limiti (iii) ✓

Sürekli fonksiyonlar Uzayının tanımı

$X = (X, d)$

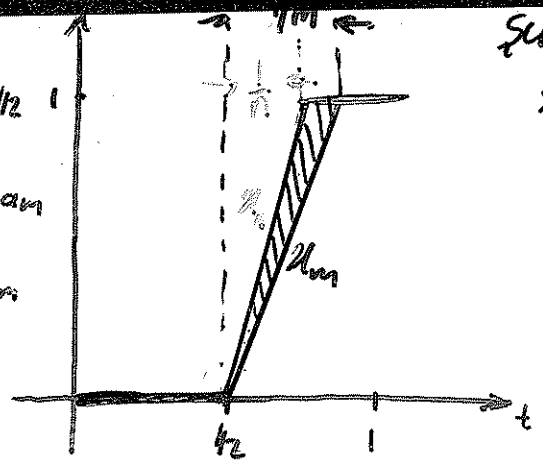
$J = [0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt$$



(a)

$$x_m(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1/2 \\ m(t-\frac{1}{2}) & 1/2 < t < a_m \\ 1 & t \geq a_m \end{cases}$$



(b)

$d(x_m, x_n) < \varepsilon$, $\quad m, n \geq 1/\varepsilon$ için (a)'daki fonksiyonlar Cauchy dizisi oluştururlar

$$d(x_m, x) = \int_0^{1/2} |x(t)|\,dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\,dt + \int_{a_m}^{1} |1 - x(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow d(x_m, x) \to 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x(t) = 0 & t \in [0, 1/2) \\ x(t) = 1 & t \in (1/2, 1] \end{array}\right\} x(t) \notin C_{[0,1]}$$

Sabit Nokta : $T: X \to X$ $x \in X$ x, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır $\iff$ $Tx = x$

Şuhubi sf. 279

Büzülme : $X = (X, d)$

Şuhubi sf. 279

$T: X \to X$, T, X'de bir büzülmedir

$\iff$

$\exists\ 0 < \alpha < 1 \ni d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

Şuhubi sf. 279

Teorem: Banach Sabit nokta teoremi

BST 1.

$X = (X, d)$, $X \neq \emptyset$, X tam

$T: X \to X$, T, X'de bir büzülme

$\Rightarrow$ T'nin tek bir sabit noktası vardır

tanıt: herhangi bir $x_0 \in X$

"ardışıl dizi" (x_n) tanımla:

$$x_0 \quad x_1 = Tx_0 \quad x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots\dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \dots\dots$$

(x_n) dizisinin Cauchy olduğunu göstermek için:

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1})$$

T büzülme $\Rightarrow$ $\leq \alpha\, d(x_m, x_{m-1})$

$$= \alpha\, d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

$$\leq \alpha^2\, d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\vdots$$

$$\leq \alpha^m d(x_1, x_0)$$

Üçgen eşitsizliği $\Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$

$$\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1)$$

geometrik dizinin toplamı $\Rightarrow = \alpha^m \left(\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} \right) d(x_0, x_1)$

Hatırlatma: <u>Geometrik dizi</u>

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

ilk n teriminin toplamı: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \; r \neq 1$

Nasıl??

T büzülme $\Rightarrow 0 < \alpha < 1 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

$d(x_0, x_1) \to$ bir sabit

$0 < \alpha < 1$

$\Rightarrow \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$ m'i yeterince büyük ve $n > m$ alınarak bu ifade istenildiği kadar küçük kılınabilinir.

$$\Downarrow$$

(x_n) Cauchy

Nereden biliyoruz?

X tam $\Rightarrow x_m \to x$

Böylece neyi göstermiş olduk?

x'in T'nin sabit noktası olduğunu göstermek için:

Üçgen eşitsizliği $\Longrightarrow$ $d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$

Nasıl $\Downarrow$??

T Büzülme $\Rightarrow$ $\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$

$x_m \to x$ $\Rightarrow$ $d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) < \varepsilon$ $\exists \varepsilon > 0$

$\uparrow$ Bunu nasıl söyleyebiliriz?

yakınsaklığın tanımından $\Rightarrow$ $d(x, Tx) = 0 \xRightarrow[\cancel{\text{tanımından}}]{\text{metrik}} x = Tx \xRightarrow[\text{tanımından}]{\text{sabit nokta}} x$, T'nin bir sabit noktasıdır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için:

$Tx = x$ ve $T\tilde{x} = \tilde{x}$ olsun

Büzülme $\Rightarrow$ $d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$

$\Downarrow$

$0 < \alpha < 1$ $\Rightarrow$ $d(x, \hat{x}) = 0$

$\Rightarrow$ $x = \tilde{x}$

Erhan'ı 2(2?0)

Teorem: <u>İterasyon, Hata Sınırları</u>

BST 2 $X = (X, d)$, $X \neq \emptyset$, X tam

$T: X \to X$ T, X'de bir büzülme

herhangi bir x_0 ile başlıyan "ardışıl dizi" T'nin tek sabit noktası x'e yakınsar

$\Longrightarrow$ Hata kestirimleri

Öncül kestirim: $d(x_m, x) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

Son kestirim: $d(x_m, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$

Tanıt

BST 1 $\Longrightarrow \quad d(x_m, x_n) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad n > m$

$(x_n) \to x \Rightarrow n \to \infty \Rightarrow d(x_m, x) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

$m = 1$, $\underbrace{x_0 \text{ yerine } y_0,\ x_1 \text{ yerine } y_1}_{\text{Bunlar bir kısıtlama getirir mi?}}$ alıp $d(x_m, x) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

yeniden yazılırsa:

$$d(y_1, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

$y_0 = x_{m-1}$, $y_1 = Ty_0 = x_m$ alınırsa

$$d(x_m, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$$

Teorem: Bir Yuvarda büzülme

BST3 $X = (X, d)$, $Y \subset X$, $T : X \to X$, X tam

$Y = \{x \mid d(x, x_0) \le r\}$ T, Y'de bir büzülme ve

$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha) r$

$\Longrightarrow$ "ardışıl dizi" $x \in Y$, x'e yakınsar

x, T'nin bir sabit noktasıdır

x, T'nin Y'de tek sabit noktasıdır.

<u>tanıt:</u> x_m'ler ve x'in Y'de olduğu gösterilmelidir

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$ ← Bunu BST 1'den beri biliyoruz

$m=0$, n'yerine m konulursa

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

Nasıl?!

hipotezden $\Rightarrow$ $d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r$

$$d(x_0, x_m) < r$$

$$\Downarrow$$

x_m'lerin hepsi Y'nin içinde

$x_m \to x$ + Y kapalı $\Rightarrow$ $x \in Y$

BST 1 $\Rightarrow$ tanıt tamamlandı.

<u>Teorem:</u> <u>Süreklilik</u>

Lineer Denklemler

X: reel sayılardan oluşmuş n-lilerin oluşturduğu küme

$$d(x,z) = \max_j |\xi_j - \zeta_j|$$

$X = (X, d)$ tam

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

$T: X \to X$, $\quad y = Tx \hat{=} Cx + b$ $\qquad C = (c_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$b = (\beta_j) \in X$

sabit bir n-li

T'ye Büzülme diyebilmemiz ne zaman mümkündür?

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \xi_k + \beta_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$d(y, w) = d(Tx, Tz) = \max_j |\eta_j - w_j|$$

$$= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk} (\xi_k - \zeta_k) \right|$$

$$\leq \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

$$= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

$$d(Tx, Tz) \leq d(x, z) \max \sum^{n} |c_{jk}|$$

$$\alpha \triangleq \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

Yanıt: $\max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1$

Teorem: LDT Lineer Denklemler

$x = Cx + b$ ile verilen sistem (C, b verilmiş)

$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n$ koşulunu sağlıyorsa

$\Rightarrow \exists!$ çözüm x

çözüm x, "ardışıl dizi" $x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b$'in $m = 0, 1, \ldots$

limiti olarak keyfi bir $x^{(0)}$ için elde edilir.

Bu çözüme ilişkin hata sınırları aşağıdaki gibidir.

$$d(x^{(m)}, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)})$$

Burada elde edilen sınırlar seçilen metriğe göre değişir

başka ne metriğe bağlı?

Genel olarak karşılaştığımız lineer denklem takımları nasıldır?

n- bilinmeyenli, n lineer, cebrik denklemden oluşan sistemler:

$$Ax = c \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; c \in \mathbb{R}^n$$

$$\det A \neq 0 \implies A \hat{=} B - G \qquad \det B \neq 0$$

$$(B - G)x = c$$

$$Bx - Gx = c$$

$$Bx = Gx + c$$

$$x = B^{-1}Gx + B^{-1}c \implies C \hat{=} B^{-1}G \quad b \hat{=} B^{-1}c$$

$$Ax = c \implies x = Cx + b$$ ✓ Bunun için ne yapacağımızı biliyoruz.

Jakobi İterasyonu

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} \xi_k^{(m)} \right) \qquad j=1,2,\dots n$$

↳ Bunun işe yaraması için ilk göze çarpan nedir?

$Ax = c$ 'den başlayıp nasıl

C ve b $\quad x = Cx + b$

tanımlanmış ki yukarıdaki ifade elde edilmiş?

$C \triangleq -D^{-1}(A-D)$

$b \triangleq D^{-1}c$

$D = \operatorname{diag}(a_{jj})$

$\Longrightarrow$ Yakınsaklık için $\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| < 1$

veya

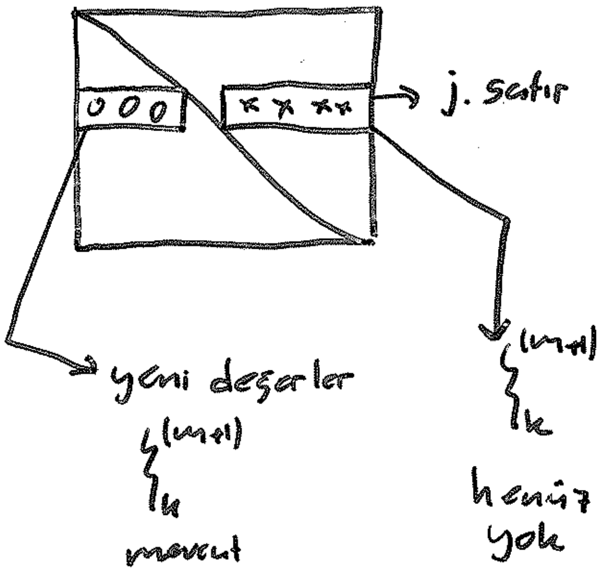
$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}|$$

Yakınsaklık ne zaman garanti?

Gauss-Seidel İterasyonu

dikkat!!

$$\xi_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\,\xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}\,\xi_k^{(m)}\right)$$



$$a_{jj} \neq 0$$

altüçgen matris

üstüçgen matris

$$A \triangleq -L + D - U$$

$$D \triangleq \operatorname{diag}(a_{jj})$$

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)}$$

$$x = Cx + b \Rightarrow \begin{cases} C \triangleq (D-L)^{-1}U \\ b \triangleq (D-L)^{-1}c \end{cases}$$

Diferansiyel Denklemler

X: $C[J]$ – $J=[t_0-\beta,\ t_0+\beta]$ aralığında, reel değerli, sürekli fonksiyonlar

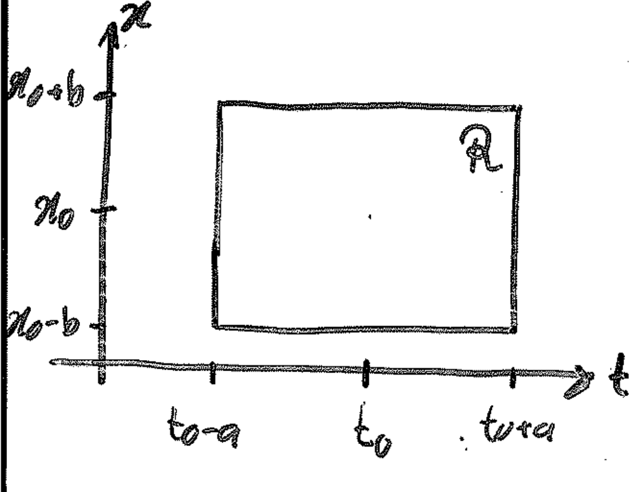
$$d \triangleq \max_{t\in J} |x(t)-y(t)|$$

Denklem: $\dot{x} = f(t,x)$ $\qquad (\dot{\ } \triangleq \frac{d}{dt})$

İlk değer problemi: $x(t_0)=x_0$, (x_0, t_0) belirli

Şuhubi sf. 283-285

Teorem: **Picard varlık ve teklik Teoremi**



$$R=\{(t,x) \mid |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$$

f, R'de sürekli

f, R'de sınırlı

$$|f(t,x)|\le c \quad , \ \forall (t,x)\in R$$

f, R'de Lipschitz

$$|f(t,x)-f(t,v)| < k\,|x-v|$$

$$\forall (t,x),(t,v)\in R$$

$\Longrightarrow$ İlk değer probleminin tek çözümü vardır.

Çözüm $\beta < \min\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$ olmak üzere $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ aralığında vardır.

tanıt: $X: C(J)$ - $J=[t_0-\beta,\ t_0+\beta]$ aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlar

$$d \triangleq \max_{t\in J} |x(t)-y(t)|$$

$\Rightarrow C(J)$ tam $\Rightarrow \tilde{C} \subset C(J)$, $\tilde{C}: |x(t)-x_0| < c\beta$

eşitsizliğini sağlayan $x \in C(J)$ fonksiyonlarının oluşturduğu küme.

$\tilde{C}$, $C(J)$'de kapalı $\Rightarrow \tilde{C}$ tam.

$\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$

integre edilirse

$$\Rightarrow Tx \triangleq x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

$x = Tx$?? $T: \tilde{C} \to \tilde{C}$??

Gerçekten T var mı? ↓ Bu nasıl yazıldı?

$c\beta < b$

$\Rightarrow T$, $\forall x \in \tilde{C}$ için tanımlı

$x \in \tilde{C}$, $\tau \in J$, $(\tau, x(\tau)) \in R$,

f, R'de sürekli

$$\Rightarrow Tx = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

Gerçekten $T: \tilde{C} \to \tilde{C}$??

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau \right| \le c\,|t-t_0| \le c\beta$$

Hipotezden $\Rightarrow |Tx(t) - Tv(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]\,d\tau \right|$

$$\leq |t-t_0| \max_{\tau\in J} k\,|x(\tau) - v(\tau)|$$

$$\leq k\beta\, d(x,v)$$

$\Downarrow$ nasıl yazıldı?

$$d(Tx, Tv) \leq \alpha\, d(x,v) \qquad \alpha = k\beta$$

Hipotezden $\Rightarrow \alpha = k\beta < 1$

$\Rightarrow T$, $\widetilde{C}$'de büzülme

BST 3 $\Rightarrow T$'nin tek $x \in \widetilde{C}$ sabit noktası var

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

f'in sürekli olduğu R'de
$(\tau, x(\tau)) \in R$

$\Rightarrow x(t)$ türetilebilinir ve $\dot{x} = f(x,t)$

$x(t_0) = x_0$

sağlar.

Bu diziyi nasıl oluşturacağız?

$\Rightarrow$ Çözüm: $(x_0, x_1, \ldots)$ dizisinin limitidir.

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \qquad n=0,1,\ldots$$

Integral Denklemler

I-) $$x(t) - \mu \int_a^b k(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau = v(t)$$

2. türden Fredholm denklemi

x ; $[a,b]$ aralığında tanımlı bilinmeyen fonksiyon (sürekli)

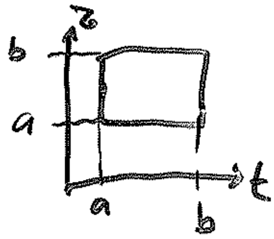
$[a,b]$ verilen aralık

parametre

Denklemin "kernel"i

$G=[a,b]\times[a,b]$ aralığında tanımlı verilen bir fonksiyon (sürekli)

$[a,b]$'de verilen bir fonksiyon (sürekli)



Neredeyiz?

$C[a,b]$ — X, $J=[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar

$$d(x,y) = \max_{t\in J} |x(t)-y(t)|$$

$$|k(t,\tau)| \leq c \qquad \forall (t,\tau)\in G$$

$$Tx(t) \mathrel{\hat{=}} v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)\, x_n(\tau)\, d\tau$$

T, $|\mu| < \dfrac{1}{c(b-a)}$ ise büzülme

II) $$x(t) - \mu \int_a^t k(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau = v(t)$$

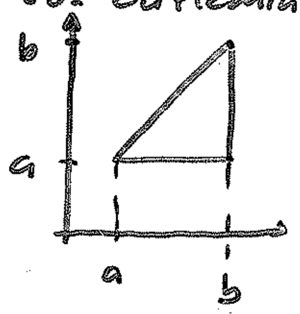
Volterra denklemi

cf. Fredholm

fark: v, $[a,b]$'de sürekli

k, $t\tau$ düzleminde $a \leq \tau \leq t$,

$a \leq t \leq b$, üçgeninde sürekli



Teorem: Sabit Nokta

$X = (X,d)$, X, tam, $T: X \to X$, T^m büzülme, $m \in \mathbb{Z}^+$

$\Longrightarrow$ T'nin bir sabit noktası vardır.

Vektör Uzayı

$(X, \mathbb{K})$

X kümesi, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır

$\Longleftrightarrow$

(A) $\forall x, y \in X \quad \exists!\, x+y \in X$

(A1) $x+y = y+x \quad \forall x, y \in X$

(A2) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in X$

(A3) $\exists!\, \theta \in X \ni x+\theta = x \quad \forall x \in X$

(A4) $\forall x \in X \quad \exists!\, -x \ni x+(-x) = \theta$

(SM) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X \quad \exists!\, \alpha x \in X$

(SM1) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad \forall x \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(SM2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(SM3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall x \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(SM4) $\exists!\, 1 \in \mathbb{K} \ni 1.x = x \quad \forall x \in X$

Cebirsel işlemler $\Longrightarrow$ vektör toplama $X \times X \to X$

Skalerlerle çarpma $\mathbb{K} \times X \to X$

Özellik: $(X, \mathbb{K}) \Rightarrow$ (i) $\alpha\theta = \theta \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(ii) $0.x = \theta \quad \forall x \in X$

(iii) $(-\alpha)x = -(\alpha x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

İspat: (i) $\alpha x \overset{(A3)}{=} \alpha(x+\theta) \overset{(SM2)}{=} \alpha x + \alpha\theta \overset{(SM)}{\Rightarrow} \alpha\theta = \theta$

(ii) $\alpha x = (\alpha + 0)x \overset{(SM3)}{=} \alpha x + 0.x \overset{(SM)}{\Longrightarrow} 0.x = \theta$

(iii) $\theta = 0x = (\alpha + (-\alpha))x = \alpha x + (-\alpha)x \Rightarrow -(\alpha x) = (-\alpha)x$

Altuzay,

- $Y \subset X$, $\ni \forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$
- $Y = X$, uygun olmayan altuzay
- X'in $(X \neq \emptyset)$ diğer tüm altuzayları, uygun altuzaylardır

Gergi

Şuhubi sf. 70

$M \subset X$, $M \neq \emptyset$

M'in içerdiği vektörlerin tüm lineer kombinasyonlarının oluşturduğu kümeye M'nin gergisi denir

Gergi M' X'in bir Y alt uzayıdır

Y, M tarafından oluşturulmuştur.

Lineer bağımsız, Lineer bağımlı

$(X, \mathbb{K})$

- $x_1, x_2, \ldots, x_r \in X$, lineer bağımsızdır

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r = 0 \quad \alpha_r \in \mathbb{K}$$

$$\xRightarrow{\text{herzaman}} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$$

- X, lineer bağımsız değil ise lineer bağımlıdır.

Sonlu ve Sonsuz boyutlu vektör uzaylar

- $\dim X = n \Longleftrightarrow X$'de, lineer bağımsız elemanların sayısı en fazla n'dir.

- $\dim X = \infty \Longleftrightarrow$ her $n = 1, 2, \ldots$ için X'de n tane lineer bağımsız eleman vardır.

- $X = \{0\}$, $\dim X = 0$

- X sonlu boyutludur $\Longleftrightarrow 0 \leq \dim X < \infty$

Baz, bileşen

$(X, \mathbb{K})$, $\dim X = n$

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \in X$, $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, X'in bir bazıdır

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall x \in X$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$

ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, her $x \in X$ için tektir.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ 'lara x'in bileşenleri denir.

$X \neq \{0\}$ olan her vektör uzayının bir bazı vardır

Teorem: Alt uzayın boyutu

$(X, \mathbb{K})$, $\dim X = n$, Y, X'in uygun alt uzayı

$\Rightarrow \dim Y < n$

tanıt; (i) $n=0 \Rightarrow X = \{0\} \Rightarrow X$'in uygun alt uzayı yoktur

(ii) $\dim Y = 0 \Rightarrow Y = \{0\}$

hipotezden $\Rightarrow X \neq Y \Rightarrow \dim X \geq 1$

$\Rightarrow \dim Y < \dim X = n$

(iii) $\dim Y = n \Rightarrow Y$'nin n tane baz elemanı var
$\dim X = n$
$\Big\} \Rightarrow$ Y'nin baz ayni zamanda X'in bazı

$\Rightarrow X = Y$

$\Rightarrow \dim Y < n$

$T: \mathcal{D}(T) \to Y$, T birebir

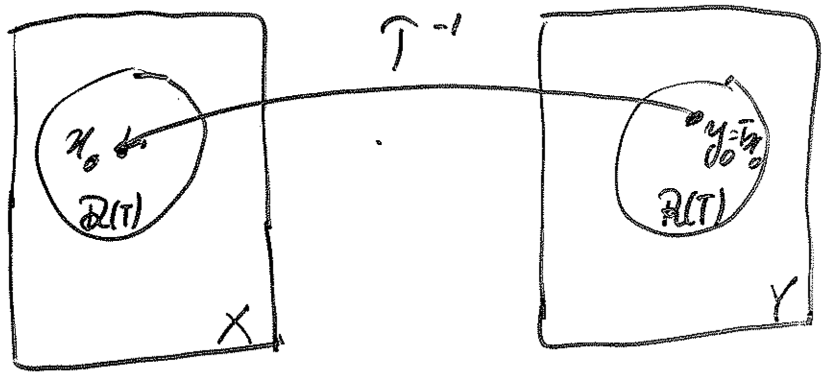
$x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ $\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$

$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$T^{-1}: \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$

$y_0 \in \mathcal{R}(T)$, $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ $\quad y_0 \to x_0$, $Tx_0 = y_0$

T^{-1}, T'nin ters dönüşümüdür



$T^{-1}Tx = x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$

$TT^{-1}y = y \quad \forall y \in \mathcal{R}(T)$

şuhubi sf. 323

Norm

$(X, \mathbb{K})$ $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ $\quad \exists x, y \in X, \ \alpha \in \mathbb{K}$

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Doğal Metrik

şuhubi sf. 324

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad x, y \in X$$

Normlu Uzay, Banach Uzayı

şuhubi sf 323, 324

- Bir normla donanmış bir vektör uzayına normlu uzay $(X, \|\cdot\|)$ adı verilir
- Doğal metriğine göre tam olan bir normlu uzaya Banach uzayı adı verilir

Özellik: Genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği

şuhubi sf. 323

$(X, \|\cdot\|) \Rightarrow \forall x, y \in X$

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

tanıt: $\|x \pm y\| = \|x + (\pm y)\| \leq \|x\| + \|\pm y\| = \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Benzer şekilde   Bu sefer nasıl ise başlanarak?

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$$

$$\longrightarrow \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$$

x yerine $-x$ alınıp tekrarlanırsa

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x + y\|$$

$\Rightarrow$ Norm süreklidir

1) <u>Öklid Uzayı $\mathbb{R}^n$</u>

Norm: $\|x\| \triangleq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right)^{1/2}$

Metrik: $d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^2 \right)^{1/2}$

2) <u>ℓ^∞</u>

Norm: $\|x\| \triangleq \sup_j |\xi_j|$

Metrik: $d(x,y) = \|x - y\| = \sup_j |\xi_j - \eta_j|$

3) <u>$C[a,b]$</u>

Norm: $\|x\| \triangleq \max_{t \in J} |x(t)|$

Metrik: $d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$

Teorem: Banach uzayının altuzayı

NU2

X Banach uzayının, altuzayı Y tamdır

$\Longleftrightarrow$

Y kümesi, X'de kapalı.

tanıt: MU7'den

Yakınsaklık, limit, Cauchy Dizisi

(i) $(X, \|\cdot\|)$, (x_n), X'de bir dizi, (x_n) yakınsaktır

$\Longleftrightarrow$

$\exists x \in X$, $\ni \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$

$x_n \to x$, x, (x_n)'in limiti

(ii) $(X, \|\cdot\|)$, (x_n), X'de bir dizi, (x_n), Cauchydir

$\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \ni \|x_m - x_n\| < \varepsilon$, $\forall m,n > N$

Sonsuz Seri

$(X, \|\cdot\|)$, (x_n), X'de bir dizi, (x_n)'le (s_n) kısmi toplamları ilişkilendirilebilinir:

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots\cdots \qquad \text{sonsuz seridir.}$$

Sonsuz serilerin yakınsaklığı ve mutlak yakınsaklığı

- (S_n) yakınsak ise, sonsuz seri yakınsaktır ve S serinin toplamıdır
- $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, mutlak yakınsaktır

Schauder Bazı,

- $(X, \|\cdot\|)$, $(e_n) \in X$, $\exists\ \forall x \in X \quad \exists!\ (\alpha_n)$

$n \to \infty \quad \| x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) \| \to 0$,

(e_n), X için Schauder Bazıdır.

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, x'in (e_n)'e göre açılımıdır.

$\Rightarrow$ $(X, \|\cdot\|)$'in Schauder Bazı var ise, X ayrılabilirdir

Teorem: Ayrılabilir $(X, \|\cdot\|)$

NU3 $(X, \|\cdot\|)$, $(X, \mathbb{R})$, $\dim X = n \Rightarrow (X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir

tanıt: (i) $X = \{0\}$, tanıt tamam

(ii) $\dim X = n$, $n \geq 1$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, X'e ilişkin baz $\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$M = \{ x \in X \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}, \forall i \}$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan $\Rightarrow$ $\tilde{x} \in X$, $\varepsilon > 0$, $\exists x \in M \ni$

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \tilde{\alpha}_i| \|e_i\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ M, X'de yoğun

$\mathbb{Q}$ sayılabilir $\Rightarrow$ M sayılabilir $\Rightarrow$ X ayrılabilir

sf. 18 Yoğun küme ayrılabilir küme tanımından

Teorem: Lineer Kombinasyonlar

NUL $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, $(X, \|\cdot\|)$'de lineer bağımsız bir küme

$$\Rightarrow \exists c > 0 \ni \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|)$$

Bu teoremin söylediği ne?!!

tanıt: $s \triangleq |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$

(i) $s = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots n$, tanıt tamamlandı

(ii) $s > 0$, $\beta_i \triangleq \alpha_i / s \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$

Gösterilecek
Tekrar yazılırsa

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c}$$

neden mi?!

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \dots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1\right)$$

$(y_m) \ni \|y_m\| \to 0$, $m \to \infty$

Bu durumda ne olur?

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1 \Rightarrow |\beta_j^{(m)}| \leq 1 \Rightarrow \forall j \ (\beta_j^{(m)}) \text{ sınırlı}$$

Bu nedir?

Bolzano-Weierstrass Teoremi $\Rightarrow$ $(\beta_j^{(m)})$ yakınsak altdizisi var

$\beta_1 \triangleq \lim_{m\to\infty} (\beta_1^{(m)})$, $(y_{1,m})$'de (y_m)'in bu diziye karşılık düşen altserisi olsun

$\beta_2 \triangleq \lim_{m\to\infty} (\beta_2^{(m)})$, $(y_{2,m})$'de (y_m)'in bu diziye karşılık düşen altserisi olsun

$\vdots$ $\vdots$

$\beta_n \triangleq \lim_{m\to\infty} (\beta_n^{(m)})$, $(y_{n,m})$ " " "

" " "

$\Downarrow$ yeni bir dizi oluşturuldu

$(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \ldots)$, y_m'in altserisi

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1$$

$$\gamma_j^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \beta_j \Longrightarrow y_{n,m} \xrightarrow{m\to\infty} y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \qquad \sum|\beta_j| = 1$$

nereden biliyoruz?!!

$\Rightarrow$ tüm β_j'lar sıfır değil

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ lineer bağımsız $\Bigg\} \Rightarrow y \neq 0$

$y_{n,m} \to y \xRightarrow[\text{sürekliliği}]{\text{normun}} \|y_{n,m}\| \to \|y\|$

$\left.\begin{array}{l} \text{varsayım} \Rightarrow \|y_m\| \to 0 \\ (y_{n,m}),\ y_m\text{'in alt dizisi} \end{array}\right\} \Rightarrow \|y_{n,m}\| \to 0$

$\Rightarrow \|y\| = 0 \Rightarrow y = 0$

Çelişki!!!

Teorem: Tamlık

NU5 $(X, \|\cdot\|)$, Y, X'in altuzayı, $\dim Y = n$

Y'nin boyutunun sonlu olduğu ifade ediliyor

$\Rightarrow Y$, tamdır

• Her sonlu boyutlu normlu uzay tamdır

Teorem: Kapalılık

NU6 $(X, \|\cdot\|)$, Y, X'in alt uzayı, $\dim Y = n$

$\Rightarrow Y$, X'de kapalıdır

• Normlu uzay X'in her sonlu boyutlu alt uzayı X'de kapalıdır

Eşdeğer Normlar

$(X, \mathbb{K})$, $\|\cdot\|$; $\|\cdot\|_0$ X'de tanımlı normlar $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_0$

$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{K} \ni a, b > 0$, $\forall x \in X$ $a\|x\|_0 \le \|x\| \le b\|x\|_0$

Teorem: Eşdeğer Normlar

NU7 Sonlu boyutlu vektör uzayı X'de tanımlı herhangi bir norm $\|\cdot\|$, herhangi bir başka norm $\|\cdot\|_0$'a denktir.

- Sonlu boyutlu vektör uzayda her norm başka bir norma eşdeğerdir

Kompaklık

$(X, \|\cdot\|)$ kompaktır $\Longleftrightarrow$ $\forall \{x_n\}$, X'de $\exists$ yakınsak alt dizi

$M \subset X$ kompaktır $\Longleftrightarrow$ $\forall \{x_n\}$, M'de $\exists$ yakınsak alt dizi $\{x_{n_m}\} \ni \lim_{m\to\infty} x_{n_m} \in M$

Teorem: Kompaklık

NU8 (X, d), $M \subset X$, M kompakt $\Longrightarrow$ M, kapalı ve sınırlı

aradaki fark nedir?

Teorem: Kompaklık

NU9 $(X, \|\cdot\|)$, $\dim X = n$, $M \subset X$, M kompakt $\Longleftrightarrow$ M, kapalı ve sınırlı

- Sonlu boyutlu, normlu uzayın herhangi bir alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul alt kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Riesz'in Lemması

$(X, \|\cdot\|)$, Y ve Z, X'in alt uzayları, Y kapalı ve Z'nin uygun alt kümesi $\Longrightarrow$ $\forall \alpha \in (0,1)$

$\exists z \in Z \ni \|z\| = 1,$

$\forall y \in Y, \ \|z - y\| \geq \alpha$

Teorem: Sonlu Boyut

N.U.10 $(X, \|\cdot\|)$, $M = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$

M, X'de kompakt $\Longrightarrow$ X sonlu boyutlu

Teorem Sürekli Dönüşüm

N.U.11 $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ $T: X \to Y$, T, sürekli

$M \subset X$, M kompakt

$\Longrightarrow$ M'nin T altındaki görüntüsü kompakttır

Sonuç Teorem: Maximum ve Minimum

$T: M \to \mathbb{R}$, $M \subset (X, \|\cdot\|)$, T sürekli, M kompakt

$\Longrightarrow$ T, M'de maksimum ve minimumlarına erişir.

Türetilebilirlik, Türev   Şuhubi sf. 160

$f: X \to Y, \quad y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \triangleq \frac{dy}{dx}$$ 'in anlamı

$$f'(x) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ olmak üzere

var ve tek ise, bu limit'e y'nin x'e göre türevi denir. f'e de x noktasında türetilebilir denir

Gateaux türevi   Şuhubi sf. 563

$(X, \|\cdot\|), \quad (Y, \|\cdot\|)$

$D \subset X \qquad T: D \to R$

$R \subset Y$

$x \in D$,

$h \in X$, h, herhangi bir vektör

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\left[T(x+\alpha h) - Tx\right] \triangleq \delta T(x; h)$$

varsa, T, x vektöründe, h vektörü doğrultusunda Gateaux türetilebilirdir. Bu limit her $h \in X$ için varsa, T, x'de Gateaux türetilebilirdir.

Sedrabi sf. 567

Fréchet türevi

$(X, \|\cdot\|)$, $D \subset X$

$(Y, \|\cdot\|)$ $R \subset Y$

$T : D \to R$

sabit bir $x \in D$ ve her $h \in X$ için h'a göre lineer ve sürekli ve

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| T(x+h) - T(x) - \delta T(x;h) \|}{\|h\|} = 0$$

olan $\delta T(x;h) \in Y$ var ise, T, x'de Fréchet türetilebilirdir ve $\delta T(x;h)$, T'nin x'de h doğrultusunda Fréchet türevidir.

Operatörlerin Eşitliği: $T_1 : D(T_1) \to Y, \quad T_2 : D(T_2) \to Y$

$$T_1 = T_2 \iff D(T_1) = D(T_2)$$
$$T_1 x = T_2 x \quad \forall x \in D(T_1) = D(T_2)$$

Kısıtlanmış Operatör $T : D(T) \to Y \;,\; B \subset D(T)$

$$T\big|_B : B \to Y \ni T\big|_B x = Tx \quad \forall x \in B$$

Genişlemiş Operatör $T : D(T) \to Y \quad D(T) \subset M$

$$\tilde{T} : M \to Y \ni \tilde{T}\big|_{D(T)} = T$$

Teorem: (Sınırlı Lineer Genişletme)

$T : D(T) \to Y$, T, sınırlı lineer operatör

$D(T) \subset (X, \|\cdot\|)$, Y, Banach uzayı

$\Longrightarrow \tilde{T} : \overline{D(T)} \to Y$, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ olmak üzere

$\tilde{T}$ sınırlı lineer operatördür.

Lineer Operatör

T, lineer operatördür $\Leftrightarrow$ (1) $\mathcal{D}(T)$ bir vektör uzayıdır

$\mathcal{R}(T)$ aynı cisim üzerinde tanımlanmış bir vektör uzaydadır

Tanım bölgesi

Değer bölgesi

(2) $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y) \Leftrightarrow \begin{cases} T(x+y) = Tx + Ty \\ T(\alpha x) = \alpha Tx \end{cases}$$

Örnekler: Aşağıdaki örneklerdeki ortak hata nedir?

1) <u>Birim operatör</u> $\quad I_x : X \to X \quad I_x x \hat{=} x \quad \forall x \in X$

$$I_x(x+y) = x+y$$

$$I_x x + I_x y = x+y$$

2) <u>Türetme</u> $\quad X$ - $[a,b]$'de tanımlı tüm açık terimlilerin oluşturduğu vektör uzay

$$Tx(t) \hat{=} x'(t)$$

$$T(x+y) = (x+y)' = x'+y'$$

$$Tx + Ty = x'+y'$$

3) <u>t. ile çarpma</u> $\quad X : C[a,b]$

$$Tx(t) \hat{=} t\,x(t)$$

$$T(x(t)+y(t)) = t(x(t)+y(t)) = t\,x(t) + t\,y(t)$$

$$Tx(t) + Ty(t) = t\,x(t) + t\,y(t)$$

Teorem: Değer bölgesi ve Sıfır uzayı

T, lineer operatör $\Longrightarrow$ (i) $\mathcal{R}(T)$ bir vektör uzay

NUR

(ii) $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty \Longrightarrow \dim \mathcal{R}(T) \leq n$

(iii) $\mathcal{N}(T)$ bir vektör uzay

tanıt: (i) $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$

$$y_1 = Tx_1 \qquad x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$$
$$y_2 = Tx_2$$

$\mathcal{D}(T)$ vektör uzay $\Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{D}(T)$

nereden biliyoruz?

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Bunu nasıl yazdık?

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{R}(T)$$

$\alpha_1, \alpha_2, y_1, y_2$ keyfi değerlerdi, $\mathcal{R}(T)$, bir vektör uzaydır

(ii) Herhangi $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathcal{R}(T)$ seç

$$y_1 = Tx_1$$
$$y_2 = Tx_2 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{D}(T)$$
$$\vdots$$
$$y_{n+1} = Tx_{n+1}$$

$$\dim \mathcal{D}(T) = n \Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$'in hepsi sıfır değil

Neden?!!

T lineer $\Rightarrow T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1}$

$= 0$

$\Rightarrow \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$ lineer bağımsız bir küme değildir.

y'ler keyfi seçilmişti $\Rightarrow R(T)$'nin $n+1$ veya daha fazla elemandan oluşmuş bir lineer bağımsız alt kümesi yoktur.

$\Rightarrow \dim R(T) \leq n$

(iii) $x_1, x_2 \in N(T) \Rightarrow Tx_1 = 0$

$Tx_2 = 0$

T, lineer $\Rightarrow T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$

$\Rightarrow N(T)$ bir vektör uzaydır.

Sonuç:

Teorem: Ters Operatör

NUB $T: D(T) \to Y$, lineer operatör

$D(T) \subset X, \quad R(T) \subset Y$

$\Rightarrow$ (i) $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ vardır $\Leftrightarrow Tx = \theta \Rightarrow x = \theta$

(ii) T^{-1} varsa, lineer operatördür

(iii) $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ ve T^{-1} vardır $\Rightarrow \dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$

Tanıt: (i) ($\Leftarrow$)

hipotez: $Tx = \theta \Rightarrow x = \theta$ neyi göstereceğiz?

$Tx_1 = Tx_2$ olsun

T lineer $\Rightarrow T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = \theta$

hipotezden $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow T^{-1}$ vardır ← Bunu nasıl söyledik?

($\Rightarrow$) hipotez: T^{-1} vardır $\Rightarrow Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_2 = \theta$ olsun $\quad Tx_1 = T\theta \Rightarrow x_1 = \theta$

(ii) T^{-1} vardır $\Rightarrow T^{-1}$ lineerdir

NU teoreminden $\Rightarrow \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ bir vektöruzaydır

$x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T) \qquad y_1 = Tx_1 \quad x_1 = T^{-1}y_1$

$y_2 = Tx_2 \quad x_2 = T^{-1}y_2$

T lineer $\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$

$x_j = T^{-1}y_j \Rightarrow T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$

$\Rightarrow T^{-1}$ lineerdir

(iii) NU teoremi T^{-1}'e uygulanırsa

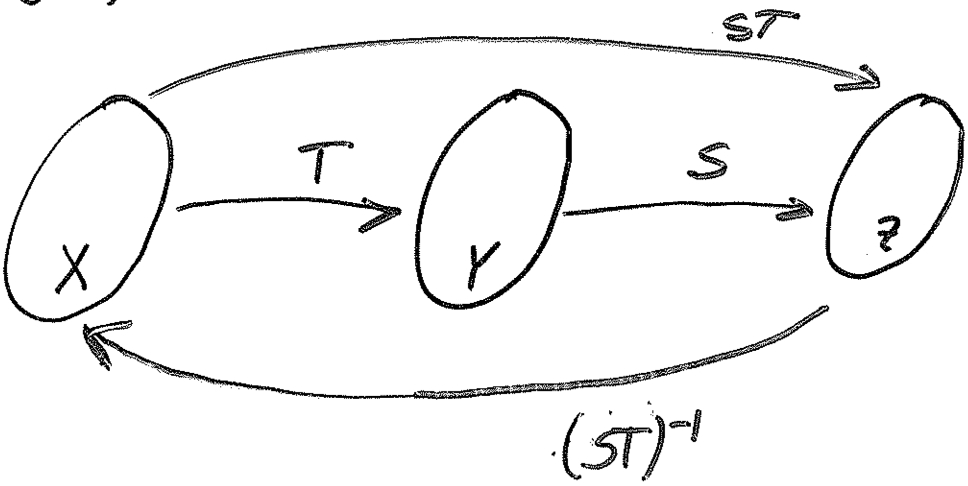
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dim \mathcal{R}(T) \leq \dim \mathcal{D}(T) \\ \Rightarrow \dim \mathcal{D}(T) \leq \dim \mathcal{R}(T) \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$$

Teorem: Çarpımın tersi

$$\left.\begin{array}{l} T: X \to Y \\ S: Y \to Z \end{array}\right\} \text{ bire bir ve üzerine lineer dönüşümler}$$

X, Y, Z vektör uzaylar.

$\Rightarrow (ST)^{-1}: Z \to X$ vardır ve $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$



tanıt: $ST: X \to Z$ bire bir ve üzerine $\Rightarrow (ST)^{-1}$ vardır

$$(ST)(ST)^{-1} = I_Z$$

S^{-1}'i uygula ve $S^{-1}S = I_Y$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} \\ S^{-1}(ST)(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow T(ST)^{-1} = S^{-1}$$

T^{-1}'i uygula ve $\cancel{TT}^{-1} = I_X$

$T^{-1}T = I_X$

$$\Rightarrow T^{-1}T(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

Sınırlı Lineer Operatör

$(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ $\mathcal{D}(T) \subset X$ $T: \mathcal{D}(T) \to Y$, lineer operatör

T sınırlı operatördür $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$

$\ni$ $\|Tx\| \le c\|x\|$

Operatörün Normu

$T: \mathcal{D}(T) \to Y$, T, sınırlı

$$\|T\| \triangleq \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

$$\|T\| = 0 \quad , \quad \mathcal{D}(T) = \{0\} \text{ ise}$$

Teorem: **Norm**

$(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ $\mathcal{D}(T) \subset X$, $T: \mathcal{D}(T) \to Y$ sınırlı lineer operatör

NUIS

$\Rightarrow$ a) T'nin normu şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|$$

b) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ norm aksiyomlarını sağlar

<u>tanıt</u>: a) $\|x\| = a$, $y = \frac{x}{a}$, $x \neq 0$ olsun

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow \|y\| = \frac{1}{a}\|x\| = 1 \\ + \\ T \text{ lineer} \end{array}\right\} \Rightarrow \|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\|T\left(\tfrac{1}{a}x\right)\right\|$$

$$= \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|$$

b) $\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$ norm koşullarını sağlar mı?

1) $\boxed{\|T\| \geq 0}$

2) $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \quad \forall x \in D(T) \Rightarrow T = \theta$

$$\boxed{\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = \theta}$$

3) $\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\,\|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, $\forall x \in D(T)$

$$\boxed{\|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|}$$

4) $\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|$

$\forall x \in D(T)$

$$\boxed{\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|}$$

Örnekler:

1) Birim Operatör $I_x : X \to X$ $\quad I_x x = x \quad \forall x \in X$

$$\|I_x\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|I_x x\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|}} \|x\| = 1$$

2) Türev Operatörü

X: $J=[0,1]$'de tanımlı tüm sch terimlilerin oluşturduğu normlu uzay

$$\|x\| \triangleq \max |x(t)| \ , \quad t\in J$$

$$Tx(t) \triangleq x'(t)$$

$$x_n(t) = t^n \ , \ n\in N \implies \|x_n\| = \max |t^n| = 1 \quad t\in[0,1]$$

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = n t^{n-1} \implies \|Tx_n\| = n \qquad \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n$$

$$\implies \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq c \text{ 'yi sağlayarak bir } c$$

yok

$\implies$ Türev operatörü sınırlı değil

3) Matris

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r \qquad y = Ax \qquad \|x\| \triangleq \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2 \right)^{1/2}$

$$y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{r} \eta_j^2 = \sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \right]^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2 \right)^{1/2} \right]^2$$

$$= \|x\|^2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2$$

$$\Rightarrow \|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2$$

$$c^2 \triangleq \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2$$

$\Rightarrow$ Matris operatörü sınırlı

Teorem: Sonlu Boyut

NU16 $(X, \|\cdot\|)$, $\dim X = n \Rightarrow X$'deki her lineer operatör sınırlıdır

tanıt: $\dim X = n \Rightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, X'e ilişkin bir baz olsun

$\Rightarrow$ herhangi bir $x \in X$, $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$

T lineer operatör $\Rightarrow \|Tx\| = \|\sum_{j=1}^{n} \xi_j Te_j\|$

üçgen eşitsizliğinden + normun 3. aksiyomu $\Rightarrow$ $\leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \, \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$

NU4 $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \|\sum \xi_j e_j\| = \frac{1}{c}\|x\|$

$\gamma \triangleq \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \gamma \|x\| \Rightarrow T$, sınırlı

Sürekli Operatör

$(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ $\mathcal{D}(T) \subset X$, $T: \mathcal{D}(T) \to Y$

- $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$, $\|x - x_0\| < \delta \ni \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$,

  T, $x_0 \in \mathcal{D}(T)$'de süreklidir
- T, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ için sürekli ise, T süreklidir

Teorem: Süreklilik ve Sınırlılık

$(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\mathcal{D}(T) \subset X$, $T: \mathcal{D}(T) \to Y$; T, lineer operatör

NUI7 a) T sürekli $\Leftrightarrow$ T sınırlı

b) T, bir noktada sürekli ise, T süreklidir

$\Rightarrow$ LİNEER OPERATÖR İÇİN SÜREKLİLİK ve SINIRLILIK BİR BİRİNE DENKTİR.

Teorem: Süreklilik, Sıfır uzay

NUI8 $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ $\mathcal{D}(T) \subset X$, $T: \mathcal{D}(T) \to Y$, T, sınırlı ve lineer

$\Rightarrow$ a) $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$, $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

b) $\mathcal{N}(T)$, kapalıdır.

Lineer Fonksiyonel Şuhubi sf. 93, sf. 366

Lineer fonksiyonel f, lineer operatördür $\ni \mathcal{D}(f) \subset (X, \|\cdot\|)$

$f: \mathcal{D}(f) \to \mathbb{K} \longrightarrow$ cisim $(X, \mathbb{K})$ vektör uzayında tanımlanan cisim

Sınırlı Lineer Fonksiyonel, Fonksiyonel'in normu

- Sınırlı, lineer fonksiyonel, sınırlı, lineer bir operatördür

$\mathcal{D}(f) \subset (X, \|\cdot\|)$, $f: \mathcal{D}(f) \to \mathbb{K}$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ni \forall x \in \mathcal{D}(f)$

$$|f(x)| \leq c\|x\|$$

- $\|f\| \triangleq \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$, $\|f\| \triangleq \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$$

<u>Teorem:</u> <u>Süreklilik ve Sınırlılık</u>

$$(X, \|\cdot\|), \; \mathcal{D}(f) \subset X, \; f: \mathcal{D}(f) \to \mathbb{K}$$

NU19

$$f, \text{ sürekli} \iff f, \text{ sınırlı}$$

Örnek:

1) Norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, lineer olmayan bir fonksiyonel (Neden?)

2) Vektörel çarpım

$$f(x) \hat{=} x \cdot a = [\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; \xi_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

sabit alınınca

f lineer mi? $f(\alpha x + \beta y) = (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1) a_1 + (\alpha \xi_2 + \beta \eta_2) a_2 + (\alpha \xi_3 + \beta \eta_3) a_3$

$$= \alpha (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3) + \beta (\eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3)$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

f sınırlı mı? $|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\| . \|a\| \Rightarrow \|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ \|x\| = 1}}$ $\quad |f(a)| \leq \|a\|$

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

$$\Rightarrow \|f\| = \|a\|$$

3) $C[a,b]$

$f_1(x) \hat{=} x(t_0) \qquad x \in C[a,b], \quad t_0 \in J = [a,b]$

f_1 lineer mi? $\quad f_1(x+y) = (x+y)(t_0) = x(t_0) + y(t_0) = f_1(x) + f_1(y)$

$f_1(\alpha x) = \alpha x(t_0) = \alpha f_1(x)$

f_1 sınırlı mı? $\quad |f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\| \Rightarrow \|f_1\| \leq 1$

$x_0 = 1 \Rightarrow \|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_1\| = 1$

Şuhubi sf 93-94, sf. 375

Cebrik Dual Uzay

$(X, \|\cdot\|)$ üzerindeki tüm lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer vektör uzayına X^*, X'in cebrik dual uzayı denir.

Bu uzay için vektör uzayındaki cebrik işlemleri (Nelerdi?) tanımlamamız gerekiyor:

$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad \forall x \in X$

$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in X$

Bu işlemlerin benzerini daha önce kullandımız mı?

DİKKAT!! X^*, elemanları neler?!!

Şuhubi sf. 392

İkinci Cebrik Dual Uzay $\qquad X^{**}$

$(X, \|\cdot\|)$'in ikinci cebrik dual uzayı, X^*'in cebrik dual uzayıdır.

Uzay	Genel elemanı	Bir noktadaki değeri
X	x	
X^*	f	$f(x)$
X^{**}	g	$g(f)$

$$g(f) \hat{=} g_x(f) = f(x).$$ $x \in X$ sabit, $f \in X^*$ değişken

Zuhuri sf. 393

Kanonik Dönüşüm

$\forall x \in X$ için bir $g_x \in X^{**}$ vardır ve $C: X \to X^{**}$

$$x \to g_x$$

C dönüşümüne kanonik dönüşüm denir.

İzomorfizma. $T: X \to \tilde{X}$ 'ye birebir ve üzerine bir dönüşümdür

$$\ni \quad \tilde{d}(Tx, Ty) = d(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

- X vektör uzayından aynı cisime sahip $\tilde{X}$ vektör uzayına olan T izomorfizma, vektör uzayındaki iki cebrik işlemi korur;

$$\ni \quad T(x+y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \qquad \forall x,y \in X$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Cebrik refleksif $\quad C: X \to X^{**}$ üzerine dönüşüm ise, $R(C) = X^{**}$, X'e cebirsel refleksif denir

$\dim X = 3, \quad E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim Y = 2 \quad\quad = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$T: X \to Y \qquad x \in X \qquad y \in Y$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \overset{\xi_1}{2} \underset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + \overset{\xi_2}{1} \underset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} + \overset{\xi_3}{1} \underset{e_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad y = Tx$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \overset{\eta_1}{3} \underset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} + \overset{\eta_2}{0} \underset{b_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \overset{\tau_{11}}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \overset{\tau_{21}}{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \overset{\tau_{12}}{0} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \overset{\tau_{22}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \overset{\tau_{13}}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \overset{\tau_{23}}{0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\ell_1 \Rightarrow \quad 3 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1$

$\ell_2 \Rightarrow \quad 0 = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1$

$$T_{EB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(X, \mathbb{K})$, $\dim X = n$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, X'e ilişkin bir baz

$(Y, \mathbb{K})$, $\dim Y = r$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$, Y'e ilişkin bir baz

$T: X \to Y$, T, lineer operatör

$x \in X \quad x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$

$$\Rightarrow \quad y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k$$

> T, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baz vektörlerinin $y_k = Te_k$, $k=1,\dots,n$ görüntüleri ile tek olarak belirlenir.

$$\to \quad y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j$$

$$y_k = Te_k = \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j$$

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k\right) b_j$$

$$\Rightarrow \quad \eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \qquad j = 1, 2, \dots, r$$

$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ 'nın görüntüsü $y = Tx = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j$

$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \qquad j = 1, 2, \ldots, r$ ile elde edilebilinir.

$T_{EB} = (\tau_{jk})$ E ve B bazlarına göre, operatör T'yi belirtler.

X'deki lineer fonksiyoneller: $\dim X = n \quad \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$

$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \qquad \alpha_j \triangleq f(e_j)$

Bu büyüklük nedir? Bu büyüklük nedir?

f, X'in n baz vektöründeki değerleri α_j ile tek olarak belirlenir.

her $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ n tane skaler, X'de bir lineer fonksiyonel belirtler

$(1, 0, \ldots, 0) \rightarrow f_1$

$(0, 1, \ldots, 0) \rightarrow f_2 \qquad \exists\, f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$

$\vdots \qquad \vdots$

$(0, 0, \ldots, 1) \rightarrow f_n$

$\{f_1, f_2, \ldots f_n\}$, X'in $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ bazına ilişkin dual bazdır

Teorem: X^*'in boyutu

$(X, \mathbb{K})$ $\dim X = n$, $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$, X'e ilişkin bir baz

$\Rightarrow F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \ni f_k(e_j) = \delta_{jk}$ X'in cebrik duali

VUZO X^*'a ilişkin bazdır ve, $\dim X^* = \dim X = n$ dir.

ispat $\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0 \quad x \in X$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{kj} = \beta_j = 0$$

$\Rightarrow F$, lineer bağımsız küme

$f \in X^*$, bu kümeden yararlanarak ifade edilebilinir:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \qquad \alpha_j = f(e_j) \quad \forall x \in X$$

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_j$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x)$$

$$\Rightarrow f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$$

Teorem: Sıfır Vektör

$(X, \mathbb{K})$ $\dim X = n$, $x_0 \in X$ için $f(x_0) = 0 \quad \forall f \in X^*$

NUM $\Rightarrow x_0 = \theta$

Teorem: Cebirsel Refleksif

Sonlu boyutlu vektör uzayı cebirsel refleksif dir.

NU22

$(X, \|\cdot\|)$ X'e ilişkin cisim $\mathbb{K}$

$(Y, \|\cdot\|)$ Y'e ilişkin cisim $\mathbb{K}$

$B(X,Y)$ - X'den Y'ye tüm sınırlı lineer operatörlerden oluşan küme

$B(X,Y)$, normlu uzay oluşturur mu?

$T_1, T_2 \in B(X,Y)$ $\quad (T_1+T_2)x = T_1x + T_2x$

$(\alpha T)x = \alpha Tx$

Teorem: $B(X,Y)$ uzayı

$(X, \|\cdot\|)$

$(Y, \|\cdot\|)$

$B(X,Y)$ - X'den Y'ye tüm sınırlı, lineer operatörlerden oluşan vektör uzayı, aşağıda tanımlanan norm

NU23

$$\|T\| \triangleq \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

ile normlu vektör uzayı oluşturur.

Teorem: Tamlık

$(Y, \|\cdot\|)$, Y, Banach uzayı $\Rightarrow$ $B(X,Y)$ Banach uzayı

NU24

tanıt: $(T_n) \in B(X,Y)$ Cauchy

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \ni \quad \|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad , (m,n > N)$

$\Rightarrow \forall x \in X,\ m,n > N \quad \|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$
$< \varepsilon \|x\|$

Sabit bir x ve verilen $\tilde{\varepsilon}$ için $\varepsilon = \varepsilon_x$ belirlenebilir

$$\varepsilon_x \|x\| < \tilde{\varepsilon}$$

$\Rightarrow \|T_n x - T_m x\| < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow (T_n x)$ Y'de Cauchy

Y tam $\Rightarrow$ $(T_n x)$ yakınsar $\Rightarrow T_n x \to y$

$y \in Y$, $x \in X$'e bağlı ve bu bir $y = Tx$ operatörü belirler

T lineer : $\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z$

T sınırlı : $\forall m > N$, için $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$ olduğuna göre

ve $T_m x \to Tx$

$m \to \infty$, normun sürekliliğinden $\forall n > N$, $\forall x \in X$

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \le \varepsilon \|x\|$$

$\Rightarrow (T_n - T)$, $n > N$ için sınırlı operatör

$\Downarrow$

T_n sınırlı $\Rightarrow T = T_n - (T_n - T)$ sınırlı

$$T \in B(X, Y)$$

$\|T_n x - Tx\|$ 'de $\|x\| = 1$ için supremum bulunursa

$$\|T_n - T\| \le \varepsilon \Rightarrow \|T_n - T\| \to 0$$

Dual Uzay X'

$(X, \|\cdot\|)$, X'deki tüm sınırlı lineer fonksiyoneller normu

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$ ile tanımlı normlu uzay

oluştururlar, ve X', X'in dual uzayıdır.

Teorem:

$(X, \|\cdot\|)$ 'in X' dual uzayı Banach uzayıdır.

NUTS

Örnek: 1) ℓ^p 'nin dual uzayı ℓ^q dir. $\left[1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right]$

2) ℓ^1 'in dual uzayı ℓ^∞ 'dur.

ℓ^1 için Schauder bazı: $e_k = \delta_{kj}$

$$x \in \ell^1 \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

$f \in \ell^{1'}$, $\ell^{1'}$ ℓ^1'in dual uzayı

f sınırlı ve lineer $\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k)$

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\| \text{ neden?}$$

$$\sup_k |\gamma_k| \leq \|f\|$$

$$\Downarrow$$

$$(\gamma_k) \in \ell^\infty$$

Her $b = (\beta_k) \in \ell^\infty$ için ℓ^1 'de bir lineer, sınırlı fonksiyonel g

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k \quad \text{ile tanımlanabilir}$$

Bu neyi temsil ediyor?

$\Rightarrow g$ lineer, sınırlılık için: $|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \sup_j |\beta_j| \sum |\xi_k|$

$= \|x\| \sup_j |\beta_j|$

$g \in \ell^{1'}$

Norm'un aynı kaldığı gösterilmeli:

$$|f(x)| = \left|\sum \xi_k \gamma_k\right| \leq \sup_j |\gamma_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\gamma_j|$$

$$\|f\| \leq \sup_j |\gamma_j|$$

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j| \quad \text{nasıl?}$$

$$\|f\| = \|c\|_\infty \Leftarrow c = (\gamma_j) \in \ell^\infty$$

$$\ell^{1'} \to \ell^\infty$$

$$f \to c = (\gamma_j) \quad \text{izomorfizm}$$

Yaklaştırım Teorisi

Sahabi sf. 296
Kreyzig sf. 280

Teorem 5.8.1 (Weierstrass Yaklaştırım Teoremi)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq b < \infty$ bir sürekli fonksiyon olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in [a,b]$ için $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde reel katsayılı bir p polinomu vardır.

- Belirli özelliğe sahip fonksiyonları farklı fonksiyonlar ile yaklaşık belirleme

  sürekli fonksiyonları çok terimliler ile belirleme

- Gözönüne alınması gereken sorunlar: varlık
  teklik
  oluşturma

- Yaklaştırımın niteliği, pratik anlamı olan kriter ile belirlenir.

En iyi Yaklaştırım

$(X, \|\cdot\|)$, Y, X'in belirli bir altuzayı

$\forall x \in X$, $y \in Y$ ile yaklaşık belirlenir

$$\delta \hat{=} \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

$\exists\, y_0 \in Y \ni \|x - y_0\| = \delta$ varsa, y_0, Y'de x'e en iyi yaklaştırımdır.

varlık teoremi
↓
Teorem: En iyi yaklaştırımlar

YT 1 $(X, \|\cdot\|)$, Y, X'in altuzayı, $\dim Y = n$

$\Rightarrow$ her bir $x \in X$ $\exists\, y_0$, Y'de x'e en iyi yaklaştırım

<u>tanıt:</u> $x \in X$, $\tilde{B} = \{ y \in Y \mid \|y\| \leq 2\|x\| \}$

kapalı yuvar oluşturalım

$\Rightarrow \theta \in \tilde{B} \Rightarrow \delta(x, \tilde{B}) = \inf_{\tilde{y} \in B} \|x - \tilde{y}\| \leq \|x - \theta\| = \|x\|$

$y \notin \tilde{B} \Rightarrow \|y\| > 2\|x\|$

genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğinden

$\Rightarrow \|x - y\| \geq \big| \|y\| - \|x\| \big| > \|x\| \geq \delta(x, \tilde{B})$

$\Rightarrow \delta(x, \tilde{B}) = \delta(x, Y) = \delta$, δ, $y \in Y - \tilde{B}$ ile elde edilemez

→ neden?

$\Rightarrow$ varsa, x'e ait en iyi yaklaştırımlar $\tilde{B}$'de olmalı

kompaktlık teoreminden $\Rightarrow \tilde{B}$ kompakttır

normun sürekliliğinden + maksimum ve minimumlar teoreminden $\Rightarrow \exists\, y_0 \in \tilde{B} \ni \|x - y\|$'nin $y = y_0$'da minimumu vardır.

En iyi yaklaştırımın tanımından $\Rightarrow y_0$, x'in Y'deki en iyi yaklaştırımıdır.

Örnek:

- $C[a,b]$

$Y \triangleq \text{span}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i = t^i$

Y, $C[a,b]$'nin sonlu boyutlu alt uzayıdır ✓ Bu uzayda neler var?

En iyi yaklaştırım Teoreminden $\Rightarrow \max_{t\in J} |x(t) - p_n(t)| \leq \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|$

verilen bir x sürekli fonksiyonu için, derecesi en fazla n olan çok terimli en iyi yaklaştırıma karşı geliyor.

• Çok terimliler

Y, $[0, 1/2]$'de tanımlı tüm çok terimlilerin oluşturduğu küme

$\Rightarrow$ Y'nin boyutu nedir? $\dim Y =$

$x(t) \in C[0, 1/2]$, $x(t) = (1-t)^{-1}$

$y_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n$

$\forall \varepsilon, \exists N \ni \|x - y_n\| < \varepsilon, \forall n > N \Rightarrow \delta(x, Y) = 0$

Ancak $x(t)$ çok terimli olmadığından $\delta = \delta(x, Y) = \|x - y_0\| = 0$ sağlayacak bir y_0 yoktur.

Neden böyle oldu? $\delta(x, Y) = 0$ ile $\|x - y_0\| = 0$ arasındaki fark ne?

Varlık ✓

Şimdi teklik için koşullar aranacak

Şuhubi sf. 68

Konveks küme

$X = (X, \mathbb{K})$, $M \subset X$, M konvekstir

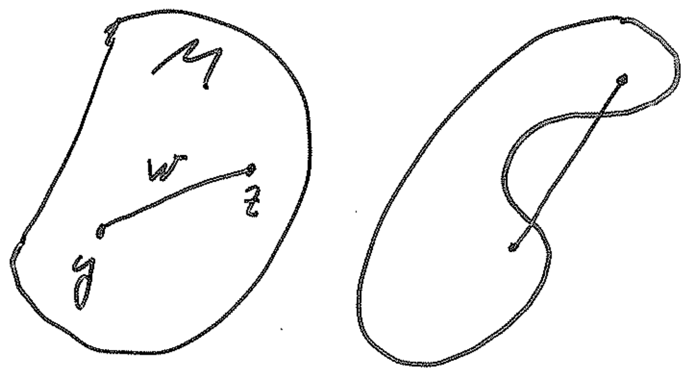
$\Longleftrightarrow$

$y, z \in M$ $\quad W = \{ v = \alpha y + (1-\alpha) z \mid 0 \leq \alpha \leq 1 \}$

$\Rightarrow W \subset M$

W'nın sınır noktaları

kapalı doğru parçası



Teorem: Konvekslik

$(X, \|\cdot\|)$, Y, X'in alt uzayı

M, $x \in X$ için Y'deki en iyi yaklaştırımların kümesi

$\Longrightarrow M$, konvekstir.

tanıt (i) $M = \{0\}$ tanıt tamamlandı

(ii) $M = \{m\}$ tanıt tamamlandı

(iii) $y, z \in M$

En iyi yaklaştırım tanımından $\Rightarrow \|x-y\| = \|x-z\| = \delta$

$w = \alpha y + (1-\alpha) z \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

$w \in Y \Rightarrow \|x-w\| \geq \delta$

$\|x-w\| = \|\alpha(x-y) + (1-\alpha)(x-z)\|$

$$\leq \alpha\|x-y\| + (1-\alpha)\|x-z\|$$

$$= \alpha\delta + (1-\alpha)\delta$$

$$= \delta$$

$\Rightarrow \|x-w\| = \delta$

y ve z herhangi noktalardı $\Rightarrow$ M, konveks tir.

Kesin Konveks

- Kesin konveks norm, normu 1 olan tüm x ve y'ler için

$$\|x+y\| < 2$$

olan normdur. ↘ Dikkat!! Buradaki konveks ne için tanımlanmış?!!

- Kesin konveks normu olan, normlu uzaya, kesin konveks normlu uzay denir

Tehlike teoremi

Teorem: En iyi Yaklaştırımlar

Kesin konveks normlu X uzayında, Y bu uzayın alt uzayı olmak üzere $x \in X$ için Y'de en fazla bir tane en iyi yaklaştırım vardır.

Sonuç: $C[a,b]$, kesin konveks değildir.

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = \frac{t-a}{b-a} \qquad t \in [a,b]$$

$\Rightarrow x_1, x_2 \in C[a,b], \quad x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow \|x_1\| = \|x_2\| = 1$

$$\|x_1 + x_2\| = \max_{t \in J} \left| 1 + \frac{t-a}{b-a} \right| = 2$$

Düzgün Yaklaştırım

Yaklaştırımlar
- normun seçimine bağlı
- normun seçimi de amaca bağlı

$C[a,b]$'deki norm seçimi: $\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$ $\quad J=[a,b]$

- Varlık
- Teklik $\Rightarrow$ Tekliği sağlayabilmek için daha detaylı inceleme gerekiyor.

Sıradışı nokta

$x \in C[a,b]$, $t_0 \in [a,b]$, t_0, x'in sıradışı noktasıdır

$\Rightarrow |x(t_0)| = \|x\|$

Haar Koşulu

Y, $C[a,b]$'nin alt uzayı, $\dim Y = n$

$\forall y \in Y$, $y \neq 0$, $[a,b]$'de en fazla $n-1$ sıfırı var

$\Rightarrow Y$, Haar koşulunu sağlar

Teorem: Haar Koşulu

Her $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset Y$ bazı, her $J=[a,b]$ aralığındaki birbirinden farklı $t_1, t_2, \ldots, t_n$ noktalarının oluşturduğu n'li için

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \vdots & & & \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

Y, Haar koşulunu sağlar

Teklik teoremi

Teorem: En iyi Yaklaştırım

Y, C[a,b]'nin alt uzayı, dim Y = n.

$\forall x \in C[a,b]$ için Y'de tek bir en iyi yaklaştırım vardır

$$\Longleftrightarrow$$

Y, Haar koşulunu sağlar

Teorem: Çok terimliler

Y_n, $y=0$'ı da kapsayan ve verilen bir n için, n dereceyi aşmayan tüm çok terimlileri içeren C[a,b]'nin bir alt uzayıdır

$x \in C[a,b]$'nin Y_n'deki en iyi yaklaştırımı tektir.

Varlık ✓

Teklik ✓

Oluşturma nasıl yapılacak?

Problem: $x \in C[-1,1]$, $x(t) = t^n$

$$Y = \text{span}\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$$

x'e Y'den bir yaklaştırım belirlemek

Yeniden ifade edilirse: $z \hat{=} t^n - \underbrace{(\alpha_{n-1} t^{n-1} + \alpha_{n-2} t^{n-2} + \cdots + \alpha_0)}_{y}$

$\|z\|$'yi enazlayan y'yi belirle

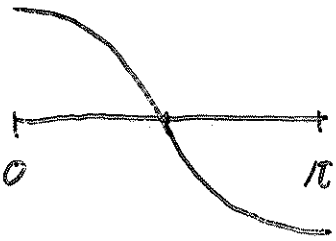
Bir başka deyişle: n. dereceden tüm çok terimliler içinden $[-1,1]$ aralığında 0'dan farkının en büyük değeri en az olan $\underline{z \text{, çok terimlisini}}$ bul.

özelliği ne?!

$t \hat{=} \cos\theta \qquad \theta \in [0, \pi] \qquad t \in [-1,1]$

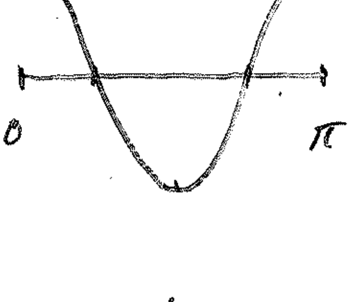
$\cos n\theta$'nın $[0,\pi]$ aralığında $n+1$ tane sıradışı noktası var.

$n=1$



$\cos\theta$

$n=2$



$\cos 2\theta$

$\cos n\theta$'yı $\cos\theta$ cinsinden çok terimli olarak ifade edebilir sek $t \hat{=} \cos\theta$'dan yararlanarak problemin çözümünü buluruz ← Neden? Nasıl?

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{nj}\cos^j\theta \qquad (n=1,2,\dots)$$

$n=1 \quad \cos\theta = \cos\theta \quad \beta_{10}=0$

$n=2 \quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta + \sum_{j=0}^{1}\beta_{nj}\cos^j\theta$

$$= 2\cos^2\theta + \beta_{21}\cos\theta + \beta_{20} \qquad \beta_{21}=0,\ \beta_{20}=-1$$

n için doğru varsay, n+1 için doğru olduğunu göster.

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta$$

$+$

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$$

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

$$= 2\cos\theta\left(2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^j\theta\right)$$

$$- 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta - \sum_{j=0}^{n-2}\beta_{n-1j}\cos^j\theta$$

$$= 2^n\cos^{n+1}\theta + 2\beta_{n0}\cos\theta + 2\beta_{n1}\cos^2\theta + \dots + 2\beta_{nn-1}\cos^n\theta$$

$$- 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta - \beta_{n-10} - \beta_{n-11}\cos\theta - \dots - \beta_{n-1n-2}\cos^{n-1}\theta$$

$$= 2^n\cos^{n+1}\theta + \overbrace{2\beta_{nn-1}}^{\beta_{n+1,n}}\cos^n\theta + \overbrace{(2\beta_{nn-2} - 2^{n-2})}^{\beta_{n+1,n-1}}\cos^{n-1}\theta + \dots$$

$$+\cdots+\overbrace{(2\beta_{n0}-\beta_{n-1,1})}^{\beta_{n+1,1}}\cos\theta+\overbrace{\beta_{n-1,0}}^{\beta_{n+1,0}}$$

$$=2^n\cos^{n+1}\theta+\sum_{j=0}^{n}\beta_{n+1,j}\cos^j\theta$$

Chebyshev Çok terimlileri

Alterne Küme

$x\in C[a,b]$, $y\in Y$, Y, $C[a,b]$'nin altuzayı,

$t_0, t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$

$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

t_i'lerin oluşturduğu kümeye, $x-y$ için Alterne küme denir $\Longleftrightarrow$ $x(t_i)-y(t_i)$ peşpeşe gelen t_i değerlerinde $+\|x-y\|$ ve $-\|x-y\|$ değerlerini sırayla alıyor

Teorem: <u>En iyi Yaklaştırım</u>

Y, $C[a,b]$'nin alt uzayı, $\dim Y=n$, Y, Haar koşulunu sağlıyor,

$x\in C[a,b]$, $y\in Y$ $\ni$ $x-y$ için $\exists$ $(n+1)$ tane elemanı olan alterne küme var $\Longrightarrow$ y, Y'de x'in en iyi yaklaştırımıdır.

Teorem: Chebyshev Çokterimlileri

$$\tilde{T}_n(t) = \frac{1}{n-1} T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t) \qquad n \geq 1$$

[-1, 1] aralığındaki tüm çok terimliler içinden $\tilde{T}_n(t)$'nin 0'dan farkı maksimum değeri en küçüktür.

$$\underbrace{T_n(t)}_{} \hat{=} \cos n\theta \quad , \quad \theta \hat{=} \arccos t \quad (n = 0, 1, \dots)$$

n. dereceden
1. türden Chebyshev çok terimlisi

$T_0(t) = \cos 0 = 1$

$T_1(t) = \cos\theta = t$

$T_2(t) = 2\cos^2\theta - 1 = 2t^2 - 1$

⋮

$T_{n+1}(t) = 2t\, T_n(t) - T_{n-1}(t) \qquad n = 1, 2, \dots$

Şuhubi sf 457

İç Çarpım

$(X, \mathbb{K})$, $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ $\ni \forall x, y, z \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

(iç1) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(iç2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(iç3) $\langle x, y \rangle = \langle \overline{y, x} \rangle$

(iç4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Şuhubi sf. 458

Doğal Norm

- $\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $\forall x \in X$
- $d(x,y) \triangleq \|x-y\| \triangleq \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ $\forall x, y \in X$

Şuhubi sf. 456

İç Çarpım Uzayı, Hilbert Uzayı

- Bir iç çarpım ile donanmış vektör uzayına, iç çarpım uzayı $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ adı verilir
- Doğal metriğe göre tam olan iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı adı verilir.

Şuhubi sf. 487

Bazı Özellikler

(1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ lineer

(2) $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$

(3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$ eşlenik lineer

<u>Özellik:</u> <u>Paralelkenar özelliği</u>

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle) \Rightarrow \forall x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

<u>tanıt:</u> $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle$ (İÇ1)'den

$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$ (BÖ3)'den

$\langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle$

$= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

<u>Teorem:</u> <u>Paralelkenar özelliğinin etkisi</u> özhubi sf. 460

$(X, \|\cdot\|)$, X, iç çarpım uzayıdır $\Longleftrightarrow$ norm paralelkenar özelliğini sağlar

TÜM NORMLU UZAYLAR İÇ ÇARPIM UZAYI DEĞİLDİR

<u>Diklik</u>

- $x, y \in (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y diktir $x \perp y$
- $A \subset X$, $x \perp a$, $\forall a \in A$ ise $x \perp A$
- $A, B \subset X$, $a \perp b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ ise $A \perp B$

Örnekler:

1) $\mathbb{R}^n$, Öklid Uzayı

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \qquad \langle x, y\rangle \triangleq \overbrace{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n}^{x^T y = y^T x}$$

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2} = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2 + \cdots + (\xi_n-\eta_n)^2}$$

2) ℓ^2 uzayı $\quad x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \ni |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots$ yakınsaktır

$$\langle x, y\rangle \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$$

, bu dizinin yakınsaklığı Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinden yararlanarak gösterilir

---

Hatırlatma:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}$$ Cauchy - Schwarz eşitsizliği

---

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$$ Tamlığı önceden gösterildi

$\Rightarrow \ell^2$, Hilbert Uzayıdır.

3) ℓ^p, $p \neq 2$

Acaba ℓ^p'nin normu iç çarpımdan elde edilebilir mi?

Nasıl gösterebiliriz?!!

$x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^p \quad , y \in (1, -1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$

$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p} \qquad \|x+y\| = \|x-y\| = 2$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{?}{=} 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$2^2 + 2^2 \overset{?}{=} 2\left(2^{2/p} + 2^{2/p}\right)$$

$$8 \neq 2\left(2^{2/p} + 2^{2/p}\right), \; p \neq 2.$$

ℓ^p tam $\Rightarrow$ ℓ^p Banach uzayı ama Hilbert uzayı değil

4) <u>$C[a,b]$ uzayı</u>

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \qquad J = [a,b]$$

$$x(t) = 1 \qquad y(t) = \frac{t-a}{b-a} \quad \Rightarrow \|x\| = 1, \; \|y\| = 1$$

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a} \quad \Rightarrow \|x+y\| = 2$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a} \quad \Rightarrow \|x-y\| = 1$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{?}{=} 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$(2)^2 + (1)^2 \overset{?}{=} 2\left(1^2 + 1^2\right)$$

$$5 \neq 4$$

Şuhubi s/459

İç çarpımı normdan elde etmenin yolu $\Rightarrow$ polarizasyon özdeşliği

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \qquad \mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

$\mathrm{Im}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

Teorem: Schwarz eşitsizliği, Üçgen eşitsizliği (Debnath 51-458)

$(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, $\|\cdot\| \hat{=} \sqrt{\langle \cdot , \cdot \rangle}$

a) $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \|y\|$ eşitlik geçerlidir $\Leftrightarrow \{x, y\}$ lineer bağımlı birleşime

↳ Schwarz Eşitsizliği

b) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ eşitlik geçerlidir $\Leftrightarrow y=0$ veya $x = cy$ $(c \ge 0)$

ispat: a) (i) $y=0 \Rightarrow \langle x, 0\rangle = 0$ ispat tamamlandı

(ii) $y \neq 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$0 \le \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle$$

neden mi?!

$$= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\left[\langle y, x\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle\right]$$

$$\bar{\alpha} \hat{=} \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \Rightarrow 0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$$0 \le \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2$$

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \|y\|$$

eşitlik $0 = \|x - \alpha y\|$ olduğunda sağlanır $\Rightarrow x = \alpha y$

b) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2$

neden eşitsizlik

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$$

Schwarz eşitsizliğinden

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Eşitlik $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2\|x\|\,\|y\|$ durumunda sağlanır

$$2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = 2\|x\|\,\|y\|$$

$$\underbrace{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}_{\text{bir sayının reel kısmı}} = \|x\|\,\|y\| \geq \underbrace{|\langle x,y\rangle|}_{\text{aynı sayının mutlak değeri}}$$

Bir sayının reel kısmının değeri mutlak değerinden fazla olamayacağından eşitlik sağlanmalı $\Rightarrow x = \alpha y$

Sabuhi sf. 459

Teorem: <u>İç çarpımın Süreklılığı</u>

$$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle),\ x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow \langle x_n,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$$

<u>tanıt:</u>

$$|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle + \langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle|$$

$$\leq |\langle x_n,y_n-y\rangle| + |\langle x_n-x,y\rangle|$$

$$\leq \|x_n\|\,\underbrace{\|y_n-y\|}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|x_n-x\|}_{\downarrow\, 0}\,\|y\|$$

$$\Rightarrow |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \to 0$$

Teorem: <u>Tamlık</u>

$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\tilde{X},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, X ve $\tilde{X}$ aynı cisime sahip.

$\forall\,(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\exists\,H$, Hilbert uzayı ve $A: X \to \tilde{X}$ $\ni \langle Ax,Ay\rangle = \langle x,y\rangle$

$\tilde{X} \subset H$

H, isomorfizmler dışında tektir

Altuzay

H, Hilbert Uzayının, altuzayı Y bir iç çarpım uzayıdır.

Teorem: H- Hilbert Uzayı, Y, H'ın altuzayı

a) Y tamdır $\Leftrightarrow$ Y, H'da kapalı ise

b) $\dim Y = n \Rightarrow$ Y tamdır.

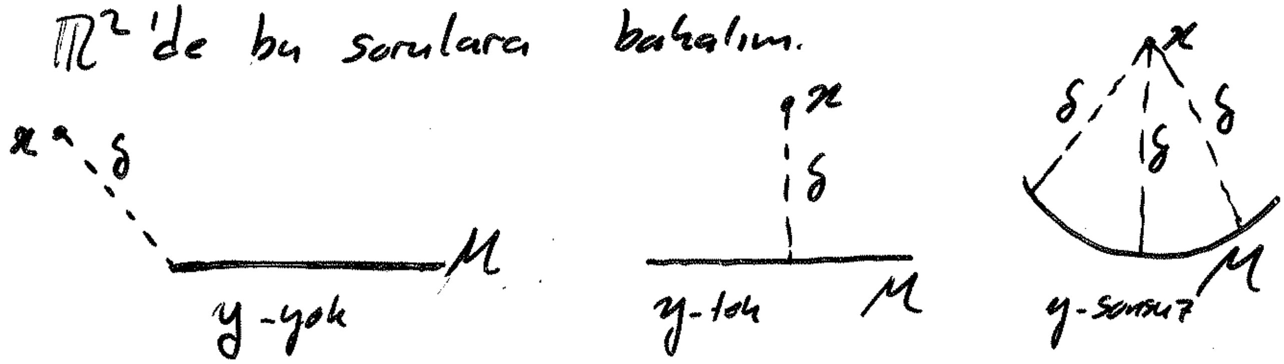
δ Mesafesi

$x \in X$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, x'den M'ye δ-mesafesi

- (X, d) $\quad \delta \triangleq \inf\limits_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y})$
- $(X, \|\cdot\|)$ $\quad \delta \triangleq \inf\limits_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\|$

Soru: 1) $\tilde{y}$ var mı? 2) $\tilde{y}$ tek mi? $\Big\}$ Daha öncede ilgilendik Nerede?

$\mathbb{R}^2$'de bu sorulara bakalım.

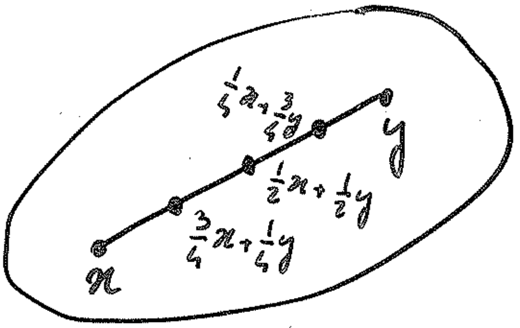


Doğru parçası, konveks küme

- $x, y \in X$, doğru parçası, $z \in X$ $\ni$ $z = \alpha x + (1-\alpha) y$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$

• $M \subset X$, M konveks $\Rightarrow$ $\forall x, y \in M$, x ve y'yi birleştiren doğru parçası, M'nin içinde ise.



Teorem: Mesafeyi enazlayan vektör

$$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle), \ M \subset X, \ M \neq \emptyset, \ M \text{ tam}, \ M \text{ konveks}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X, \ \exists!\, y \in M \ni \delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$$

tanıt: Varlık

Bu diziyi nasıl oluşturdu? inf. tanımının önemi ne?

$\delta_n \triangleq \|x - y_n\|$, inf.'un tanımından $\exists (y_n) \in M \ni \delta_n \to \delta$

1. adım (y_n)'in Cauchy olduğunu göster. Neden?!!

$$y_n - x \triangleq v_n \Rightarrow \|v_n\| = \delta_n \Rightarrow \|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\|$$
$$= 2\left\|\tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta \text{ - infimum} \\ M \text{ konveks} \Rightarrow \frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M \end{array}\right\} \Rightarrow 2\left\|\tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta$$

$$\left.\begin{array}{l} y_n - y_m = v_n - v_m \\ + \\ \text{paralelkenar özdeşliği} \end{array}\right\} \Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2$$
$$= -\|v_n + v_m\|^2 + 2\left(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2\right)$$
$$\leq -(2\delta)^2 + 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right)$$

$$\Rightarrow \delta_n \to \delta \Rightarrow (y_n) \text{ Cauchy}$$

2. adım M, tam $\Rightarrow (y_n)$ yakınsak, $y_n \to y \in M$

3. adım $y \in M \Rightarrow \|x-y\| \geq \delta$

4. adım $\|x-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$

5. adım 3. ve 4. adım'dan $\|x-y\| = \delta$

Teklik $\exists y \in M,\ y_0 \in M \ni \|x-y\| = \delta$ ve $\|x-y_0\| = \delta$

paralel kenar özdeşliğinden $\Rightarrow \|y-y_0\|^2 = \|(y-x)-(y_0-x)\|^2$

$$= 2\|y-x\|^2 + 2\|y_0-x\|^2 - \|(y-x)+(y_0-x)\|^2$$

$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\tfrac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2$$

$\frac{1}{2}(y+y_0) \in M \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\| \geq \delta \Rightarrow 2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2 \geq 2\delta^2+2\delta^2-2^2\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|$

Bu değer inf. tanımından daha küçük

$$\Rightarrow 0 \geq \|y-y_0\|^2$$

Normun tanımından $\Rightarrow y_0 = y$

Teorem: **Diklik**

$(X, \langle .,. \rangle)$, Y, X'in tam altuzayı, $x \in X$ belirlenmiş

$$\Rightarrow \exists!\, y \in Y \ni \delta = \|x-y\| \text{ ve } z = x-y \perp Y$$

İspat Varsayım: $z \not\perp Y \Rightarrow \exists y_1 \in Y,\ y_1 \neq 0 \ni \langle x, y_1 \rangle = \beta \neq 0$

Her hangi bir α skaler değeri için: $\|z-\alpha y_1\|^2 = \langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1 \rangle$

$$= \langle z,z\rangle - \bar{\alpha}\langle z,y_1\rangle - \alpha\left[\langle y_1,z\rangle - \bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle\right]$$

$$= \langle z,z\rangle - \bar{\alpha}\beta - \alpha\left[\bar{\beta} - \bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle\right]$$

$\bar{\alpha} \triangleq \dfrac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ seçilirse $\Rightarrow$ $\|z-\alpha y_1\|^2 = \langle z, z \rangle - \dfrac{\beta^2}{\langle y_1, y_1 \rangle}$

Teorem 'den $\Rightarrow$ $\|z\| = \|x-y\| = \delta$

$$\|z-\alpha y_1\| = \delta^2 - \frac{\beta^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2$$

$y_2 \triangleq y + \alpha y_1 \in Y$

$\Downarrow$

$z - \alpha y_1 = x - y_2$

$+$

δ'nın tanımından

$\Rightarrow$ $\|z-\alpha y_1\| \geq \delta$ $\Rightarrow$ $\langle z, y_1 \rangle \neq \beta$

Şuhubi sf. 69

Direkt Toplam

- $(X, \mathbb{K})$ Y, Z, X'in alt uzayları, $\forall x \in X$ $\exists!$ $x = y + z$, $y \in Y, z \in Z$

$$\Rightarrow X = Y \oplus Z$$

- Z, Y'nin X'deki cebrik tümleyenidir.

  Y, Z'nin X'deki " "

Ortogonal Tümleyen

Şuhubi sf. 54

$$Y^{\perp} = \{ z \in H \mid z \perp Y \}$$

Teorem: Direkt Toplam

H - Hilbert uzayı, Y, H'ın kapalı altuzayı

$$\Rightarrow H = Y \oplus Z, \quad Z = Y^{\perp}$$

<u>tanıt</u>: <u>Varlık</u>

H, tam, Y kapalı $\Longrightarrow$ Y, tam

Y tam $\Longrightarrow$ $\forall x \in H \ \exists y \in Y \ \ni x = y + z$
$z \in Z = Y^{\perp}$

<u>Teklik</u>

$\exists \ x = y + z$ ve $x = y_1 + z_1$ $\quad y, y_1 \in Y, \quad z, z_1 \in Z$

$\Rightarrow y - y_1 = z_1 - z \quad , \ y - y_1 \in Y \ , \ z_1 - z \in Z = Y^{\perp}$

$\Rightarrow y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow y = y_1, \quad z = z_1$

$$\boxed{x = y + z, \quad y \in Y, \ z \in Z = Y^{\perp}}$$

y: x'in Y'deki dik izdüşümü

$P: H \to Y$

$x \to y = Px$ $\quad$ P: H'ın Y'ye dik izdüşümü

<u>P'nin özellikleri</u>

- Sınırlı lineer operatör
- H'yı Y'ye dönüştürür
- Y'yi kendi üstüne dönüştürür
- $Z = Y^{\perp}$'yı $\{0\}$'a dönüştürür
- $P^2 = P$ idempotentdir
- $P|_Y$, Y'de birim operatördür

$\bullet\ U(1) = 1$

Yokedici

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$

$M^{\perp} = \{ x \in X \mid x \perp M \}$

$\Rightarrow x \in M^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in M$

$\Rightarrow$ ortogonal tümleyen özel bir yokedicidir.

- $x, y \in M^{\perp} \Rightarrow \forall v \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\langle \alpha x + \beta y, v \rangle = \alpha \langle x, v \rangle + \beta \langle y, v \rangle = 0$$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in M^{\perp} \Rightarrow M^{\perp}$ vektör uzay

- $M^{\perp}$ kapalıdır
- $x \in M \Rightarrow x \perp M^{\perp} \Rightarrow x \in (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow M \subset M^{\perp\perp}$

Teorem **Kapalı Altuzay**

H- Hilbert Uzayı, Y, H'nın kapalı alt uzayı $\Rightarrow Y = Y^{\perp\perp}$

Teorem: **Yoğun Küme**

H - Hilbert Uzayı, $M \subset H$, $M \neq \emptyset$

M'nin gergisi, H'de yoğun $\Leftrightarrow M^{\perp} = \{0\}$

Ortonormal Kümeler ve Diziler

- $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $M \subset X$ — M <u>ortogonal küme</u>, elemanları ortogonal çiftler ise.
- $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $M \subset X$ — M <u>ortonormal küme</u>, elemanlarının normu 1 ve ortogonal küme ise.
- M ortogonal / ortonormal, sayılabilir $\Rightarrow (e_n)$ ortogonal/ortonormal dizi oluşturur
- $\alpha \in I$, (x_α), $x_\alpha \perp x_\beta$ $\forall \alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$

  $\Rightarrow (x_\alpha)$ ortogonal aile,
- (x_α) ortogonal aile, $\|x_\alpha\| = 1$ $\forall \alpha \in I$

  $\Rightarrow (x_\alpha)$ ortonormal aile

<u>Teorem:</u> (Lineer bağımsızlık)

Ortonormal küme lineer bağımsızdır.

<u>Tanıt:</u> $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal olsun.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

$$\left\langle \sum_k \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lineer bağımsız $\blacksquare$

Ortonormal dizilere; lineer bağımsız diziler varken!!!
neden ihtiyaç duyalım ki?

• Ortonormal dizinin elemanlarını kullanarak x'i ifade ediyorsak, katsayıları bulmak daha kolay.

$(e_1, e_2, \dots), (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 'de ortonormal dizi olsun.

$$x \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

$$\langle x, e_j \rangle = \sum \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j$$

$$\Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

• $\hat{x} = x + \alpha_{n+1} e_{n+1}$ 'i ifade etmek için yeni bir terim eklemeyi mümkün kılıyor.

$$\hat{x} = x + \alpha_{n+1} e_{n+1} \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$$

sadece bir terim hesaplanması yeterli, diğer katsayılar aynı kalıyor.

• $z = x - y$,

$$y \in Y_n = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$x \in X, \quad x \notin Y_n$$

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

öyle α_k'lar var ki $z = x - y \perp y$

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum \langle x, e_k\rangle e_k, \sum \langle x, e_m\rangle e_m \right\rangle = \sum |\langle x, e_k\rangle|^2$$

$$\langle z, y\rangle = \langle x-y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle$$
$$= \left\langle x, \sum \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle - \|y\|^2$$
$$= \sum \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} - \sum |\langle x, e_k\rangle|^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}_{\text{Bu nasıl yazıldı?}} \\ z = x - y \end{array}\right\} \Rightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k\rangle|^2$$

$$\|z\| \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Teorem: (Bessel eşitsizliği)

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(e_n) \in X$, ortonormal dizi

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\underbrace{\langle x, e_k\rangle}_{\substack{x\text{'in ortonormal} \\ \text{dizi } (e_k)\text{'ya göre} \\ \text{Fourier katsayıları}}}|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \text{Bessel eşitsizliği}$$

Herhangi bir lineer bağımsız dizi verildiğinde nasıl bu diziden ortonormal dizi yaratırız?

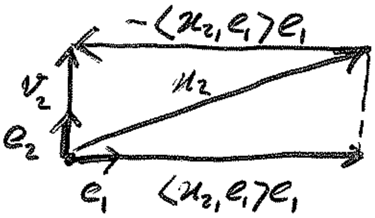
$$(x_i) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} (e_i) \implies \text{span}\{e_1, e_2, \dots e_n\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Herhangi bir lineer bağımsız dizi

ortonormal dizi

<u>Adım 1</u>: $e_1 \hat{=} \dfrac{1}{\|x_1\|} x_1$

<u>Adım 2</u>: $x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2$



$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$

$e_2 \hat{=} \dfrac{1}{\|v_2\|} v_2$

<u>Adım 3</u>: $v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$

$e_3 \hat{=} \dfrac{1}{\|v_3\|} v_3$

<u>Adım n</u>: $v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$

$e_n \hat{=} \dfrac{1}{\|v_n\|} v_n$

C[a,b]'nin tamlığı

X: J[a,b] kapalı aralığında tanımlı, sürekli tüm reel değerli fonksiyonlar

$$d(x,y) = \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|$$

(x_m), C[a,b]'de herhangi bir Cauchy dizisi olsun.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad d(x_m, x_n) = \max_{t\in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon, \quad \forall m,n > N$$

herhangi bir $t = t_0 \in J$ $\quad |x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \overset{\text{neden!!}}{\varepsilon} \quad \forall m,n > N$

$\Rightarrow (x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), \dots)$ reel sayılarda bir Cauchy dizisidir.

R tam olduğundan $\Rightarrow$ Dizi yakınsar

$$x_m(t_0) \to x(t_0), \quad m \to \infty$$

$\Rightarrow$ Böylece her $t \in J$ için, bir reel $x(t)$ dizisi bulunur.

Bu durumda nokta nokta $x(t)$ J'de tanımlanır ve

$x \in C[a,b]$, $x_m \to x$.

x acaba C[a,b]'nin elemanı mı?

$$\max_{t\in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \qquad m > N$$

$$n \to \infty$$

$\forall t \in J \quad |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad m > N \Longrightarrow x_m(t) \to x(t)$

x_n'ler J'de sürekli $\Rightarrow$ x'de J'de sürekli

$\Rightarrow x \in C[a,b]$

$\Rightarrow C[a,b]$ tam.

<u>Soru</u>: Diğer durumda ne farklıydı?

Neden tamlığı gösteremedik?

İ.T.Ü.
ELEKTRİK-ELEKTRONİK FAKÜLTESİ

Soru	1	2	3	4	5	6	7	8	Topl.
Not									

Tarih : . . . / . . . / . . .
Bölüm : . . . .
Ders : . . . .
No : . . . .
Adı, Soyadı : . . . .
İmzası : . . . .

Banach's fixed point theorem has important applications to iteration methods for solving systems of linear algebraic equations and yields sufficient conditions for convergence and error bounds.

To understand the situation, we first remember that for solving such a system there are various *direct methods* (methods that would yield the exact solution after finitely many arithmetical operations if the precision—the word length of our computer—were unlimited); a familiar example is Gauss' elimination method (roughly, a systematic version of the elimination taught in school). However, an iteration, or *indirect method*, may be more efficient if the system is special, for instance, if it is *sparse*, that is, if it consists of many equations but has only a small number of nonzero coefficients. (Vibrational problems, networks and difference approximations of partial differential equations often lead to sparse systems.) Moreover, the usual direct methods require about $n^3/3$ arithmetical operations (n = number of equations = number of unknowns), and for large n, rounding errors may become quite large, whereas in an iteration, errors due to roundoff (or even blunders) may be damped out eventually. In fact, iteration methods are frequently used to improve "solutions" obtained by direct methods.