# Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Neslihan Serap Şengör

oda no:1107
tel no:0212 285 3610
sengorn@itu.edu.tr

Özkan Karabacak

oda no:1117
tel no:0212 285 3506
ozkan2917@yahoo.com

# Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

- 16 Şubat 2012- 29 Mart 2012 Neslihan Serap Şengör (7 hafta)

- 2 Ödev % 20
- Yarıyıliçi Sınavı 5 Nisan 2012 % 20

- 9 Şubat 2011, 12 Nisan 2012- 10 Mayıs 2012 Özkan Karabacak (6 hafta)

- 1 Ödev % 20
- Yarıyılsonu Sınavı % 40

# Yararlanılan Kaynaklar


- H.K.Khalil, "Nonlinear Systems", 3rd Edition, Pearson Education, 2000.
- Y.A. Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory", Springer, 2004.
- J. Guckenheimer, P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields", Springer-Verlag, 1983.
- S. Wiggens, "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer, 2003.
- S.H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos", Addison-Wesley Pub. Comp., 2000.
- E. Ott, "Chaos in Dynamical Systems", Cambridge University Press, 1993.
- P.G. Drazin, "Nonlinear Systems", Cambridge University Press, 1993.

## Yararlanılacak Araç

### XPP/XPPAUT

Dinamik sistemleri çözmek, durum portreleri, dallanma diyagramlarını elde etmek için kullanılabilecek bir araç

B. Ermentrout, "Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical systems", siam,2002.

http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/whatis.html

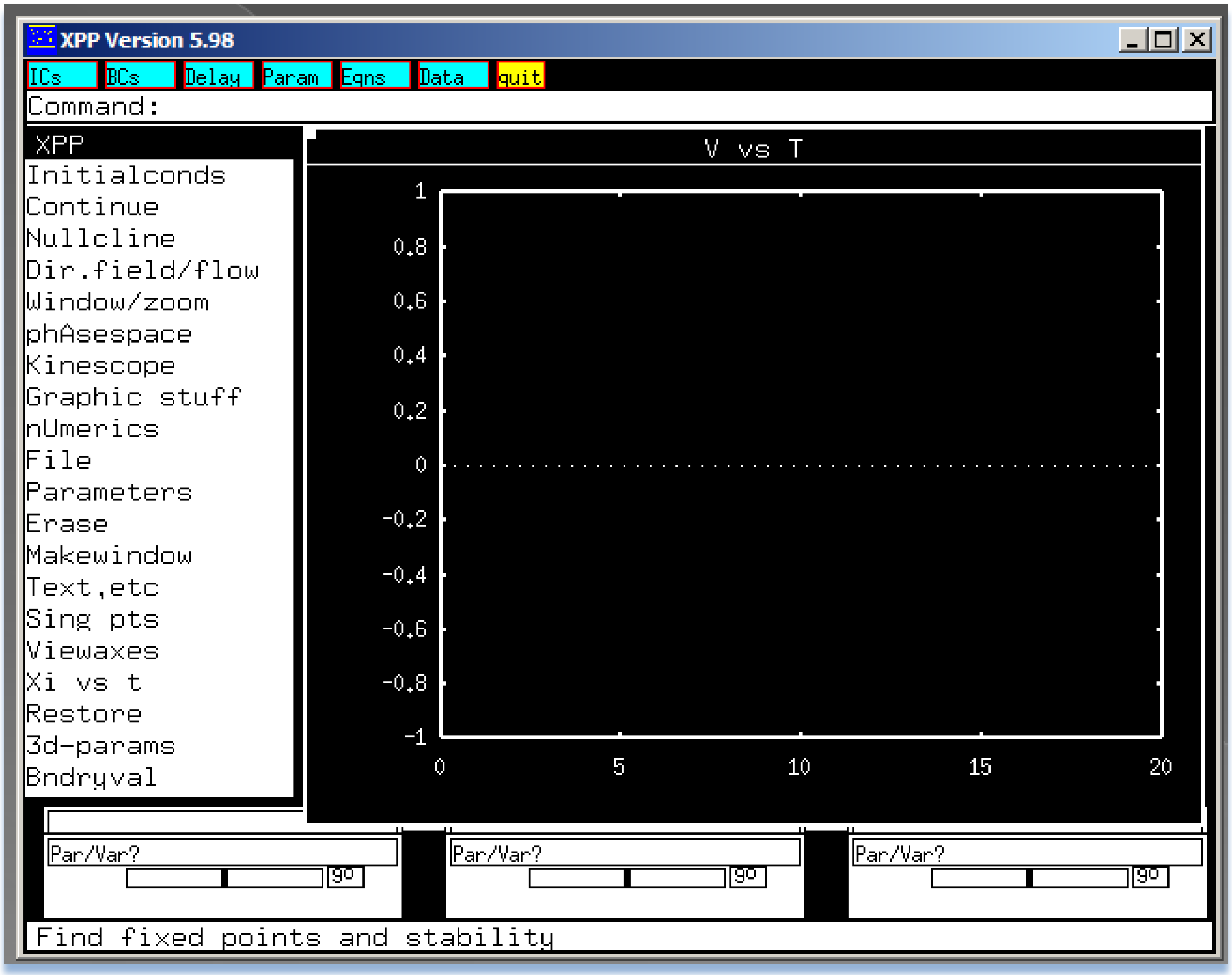
## Xppaut Çalıştırmak İçin Gerekenler

- **Xppaut, “xpp” ve “auto” isimli iki parçadan oluşur. Birbirleri arasında daima geçiş yapabilirsiniz. “auto”, dallanma diyagramını hesaplamak için kullanılır. [http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html](http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html) adresinden indirilebilir.**
- **xppaut_yüklediğiniz_dizin\xppaut\windows\xppall dizini altında xpp.bat dosyası mevcuttur. Bu dosya içerisine uygulama ile ilgili adreslerin doğru yazılması gerekmektedir. Örneğin benim makinemde xppaut aşağıda olan adresde yüklüdür. “G:\24_mart_2008_new_data\Doktora”. Dolayısıyla G:\24_mart_2008_new_data\Doktora\xppaut\windows\xppall adresinde olan xpp.bat dosyasının içeriği aşağıdaki şekildedir.**

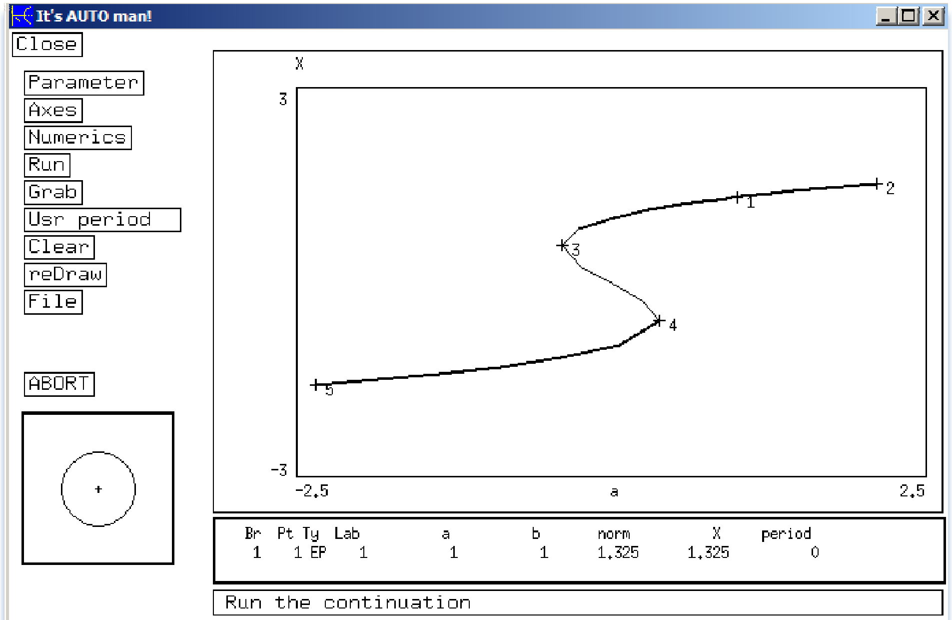
```
set BROWSER=C:\Program Files\Internet Explorer\iexplore.exe
Set XPPHELP=G:\24_mart_2008_new_data\Doktora\xppaut\windows\xppall\help\xpphelp.html
set DISPLAY=127.0.0.1:0.0
set HOME=G:\24_mart_2008_new_data\Doktora\xppaut\windows\xppall
G:\24_mart_2008_new_data\Doktora\xppaut\windows\xppall\xppaut %1 %2 %3
pause
```

A. Yiğit

# Xppaut çalıştığında nasıl bir ekran açılır?



# Örneklerle Dallanma Diyagramı Oluşturma




| Br | Pt | Ty | Lab | a | b | norm | X | period |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | LP | 3 | -0.3849 | 1 | 0.5773 | 0.5773 | 0 |

| BR | PT | TY | LAB | PAR(1) | L2-NORM | U(1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | EP | 1 | 1.000000E+00 | 1.324718E+00 | 1.324718E+00 |
| 1 | 8 | EP | 2 | 2.114129E+00 | 1.540305E+00 | 1.540305E+00 |

| BR | PT | TY | LAB | PAR(1) | L2-NORM | U(1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | LP | 3 | -3.849002E-01 | 5.773410E-01 | 5.773410E-01 |
| 1 | 14 | LP | 4 | 3.849002E-01 | 5.773498E-01 | -5.773498E-01 |
| 1 | 20 | EP | 5 | -2.346655E+00 | 1.577274E+00 | -1.577274E+00 |

## Neden doğrusal olmayan devreler, sistemler ve kaos?

Virtually, all physical systems are nonlinear in nature.

*M. Vidyasagar*

## O zaman neden hep lineer devreler ve sistemler ile ilgilenildi?

“. . . not to produce the most comprehensive
descriptive model
but
to produce the simplest possible model that
incorporates the major features of the
phenomenon of interest.”

*Howard Emmons*

Hatırlatma

## Lineer sistemi hatırlıyalım...

Başka nasıl
ifade ediyoruz?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_o) = x_o$$

durum değişkeni

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ilk koşul

çıkış değişkeni

giriş değişkeni

Bu değişkenlere ilişkin başka neyi belirtmemiz gerek........

$$x \in \ldots\ldots.. \qquad y \in \ldots\ldots.. \qquad u \in \ldots\ldots..$$

Bu sistemin çözümü.....

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Hatırlatma

## Ayrık zamanda lineer sistemi hatırlıyalım...

$$x'(k) = Ax(k) + Bu(k), \qquad x(k_o) = x_o$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad x'(k) \hat{=} x(k+1)$$

Bu sistemin çözümü.....

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{n=0}^{k} A^{N-1-n} Bu(n)$$

Hatırlatma

Bir özel hal: $\dot{x}(t) = Ax(t)$ Otonom sistem

Çözümü bir daha yazarsak

özdeğerler

$$x(t) = e^{\lambda_1 (t-t_o)} S_1 c_1 + e^{\lambda_2 (t-t_o)} S_2 c_2 + .....e^{\lambda_n (t-t_o)} S_n c_n$$

özvektörler

Çözüm, özvektörler ve özdeğerler ile nasıl değişir?

Hatırlatma

## Özvektörleri aynı özdeğerleri farklı iki sistem

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

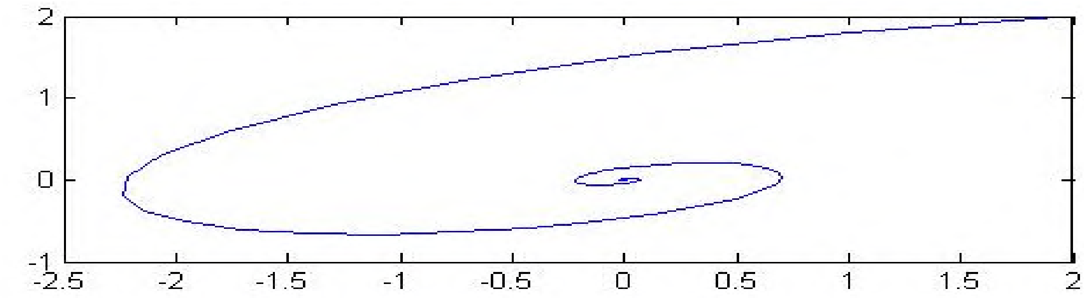
$$\lambda_{11} = -1-2i \quad \lambda_{21} = -3-2i$$
$$\lambda_{12} = -1+2i \quad \lambda_{22} = -3+2i$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 - 0.3651\,i \end{bmatrix} \qquad S_{21} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 - 0.3651\,i \end{bmatrix}$$

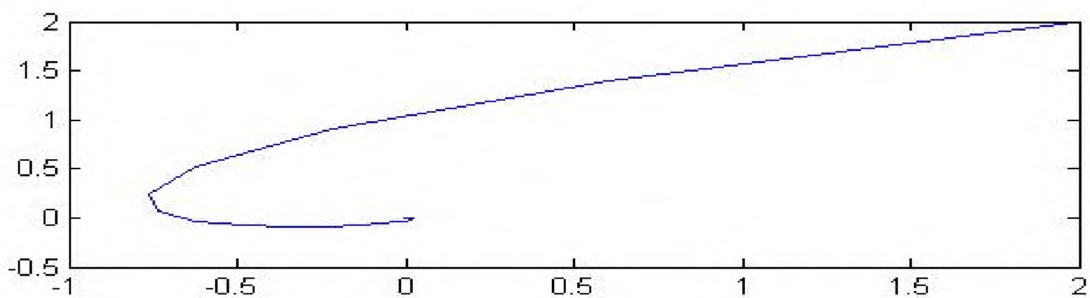
$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 + 0.3651\,i \end{bmatrix} \qquad S_{22} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 + 0.3651\,i \end{bmatrix}$$

## Hangisi daha hızlı sıfıra yaklaşıyor ?

A1 sistemi




A2 sistemi



Hatırlatma

# Özdeğerleri aynı özvektörleri farklı iki sistem

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -5 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 \\ 5 & -0.3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{11} = -0.25 + 2.235i \\ \lambda_{12} = -0.25 - 2.235i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{21} = -0.25 + 2.235i \\ \lambda_{22} = -0.25 - 2.235i \end{matrix}$$

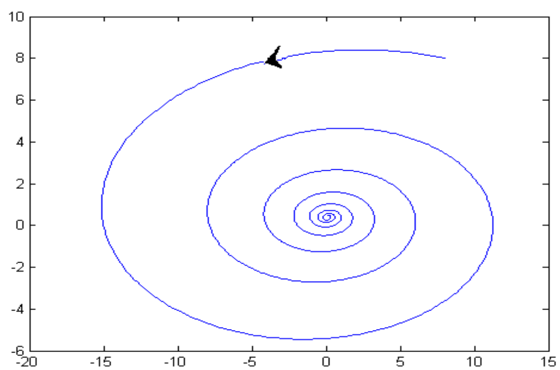
$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.9125 \\ 0.0051 + 0.4081i \end{bmatrix} \qquad S_{21} = \begin{bmatrix} 0.0051 + 0.4081i \\ 0.9125 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0.9125 \\ 0.0051 - 0.4081i \end{bmatrix} \qquad S_{22} = \begin{bmatrix} 0.0051 - 0.4081i \\ 0.9125 \end{bmatrix}$$

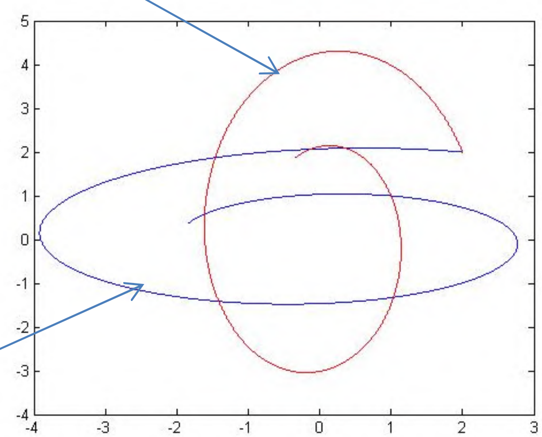
B1 sistemi

Hızlarında bir farklılık var mı?

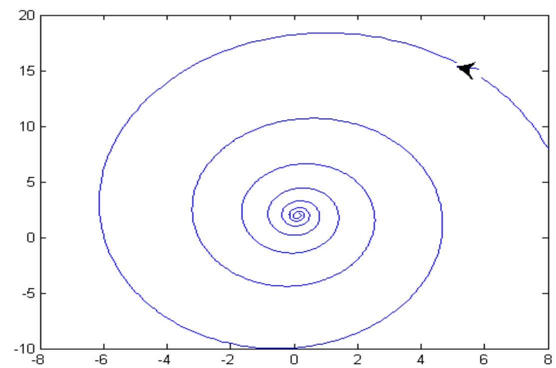
B2 sistemi




B1 sistemi

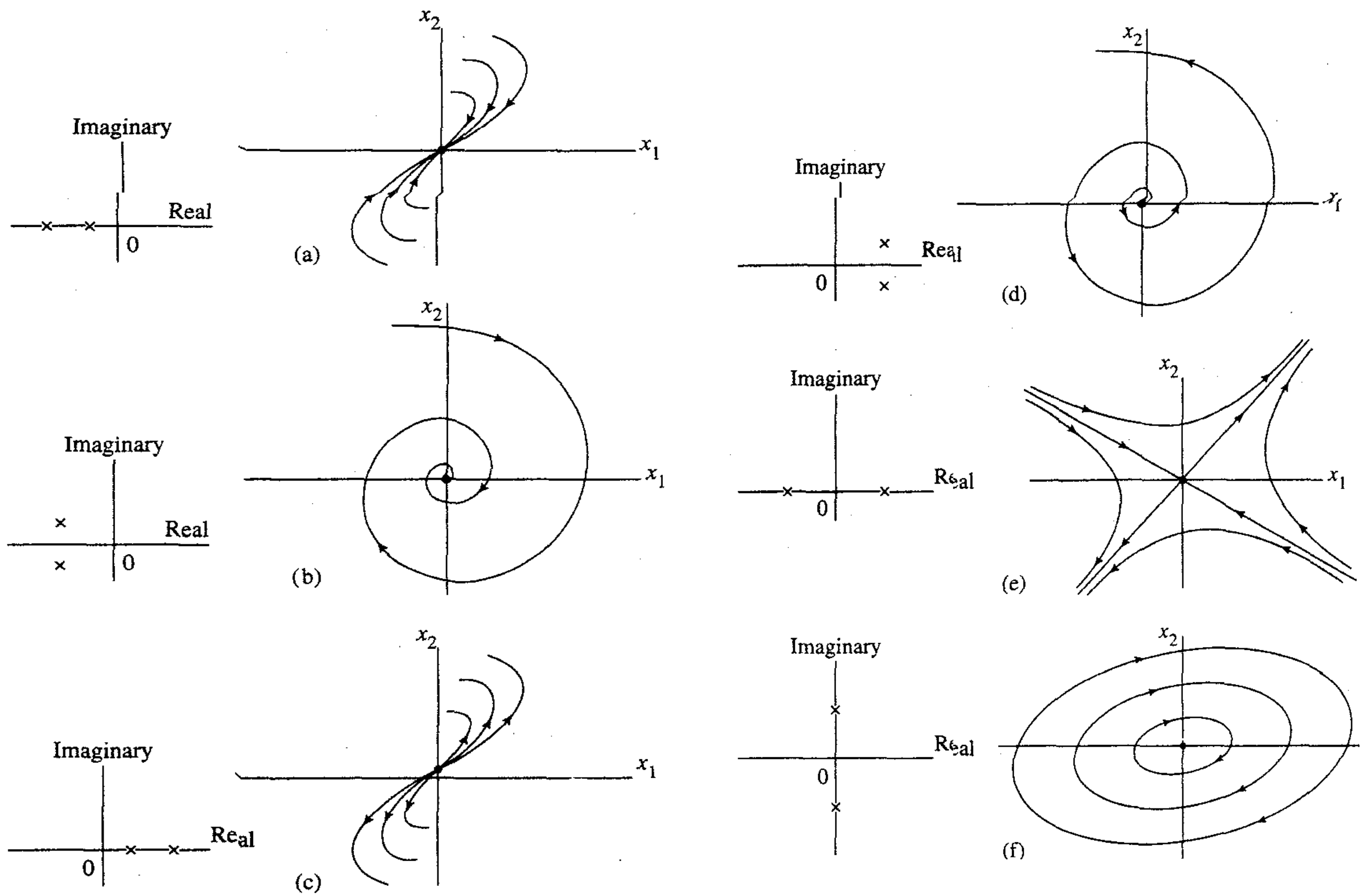



B2 sistemi



Hatırlatma

# Bu durumda lineer sistemin çözümleri neler olabilir?




Tüm bu durum portrelerinde ortak bir şey var, ne?

S. Haykin, "Neural Networks- A Comprehensive Foundation"2nd Edition, Prentice Hall, 1999, New Jersey.

Hatırlatma

## Otonom lineer sistem için başka ne diyebiliriz?

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Özel bir çözüm: denge noktası

$$0 = Ax_e \quad \Rightarrow \quad x_e = 0$$

## Denge noktasının Lyapunov anlamında kararlılığı

Tanım: Lyapunov anlamında kararlılık

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemine ilişkin bir denge noktası $x_d$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ bulunabiliyorsa; öyleki

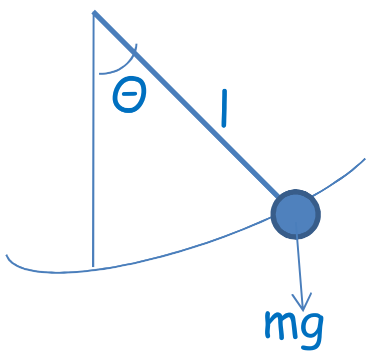
$$\left\| x(0) - x_d \right\| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \left\| x(t) - x_d \right\| < \varepsilon \quad \forall t > 0,$$

$x_d$ noktası Lyapunov anlamında kararlıdır.

Ve Lyapunov anlamında kararlılığı lineer sistemde anlamak için.....

# Bazı Doğrusal Olmayan Sistemler

Sarkaç




$$ml\ddot{\theta} = \underbrace{-mg\sin\theta}_{\text{yerçekimi}} \underbrace{- kl\dot{\theta}}_{\text{sürtünme}}$$

Durum uzayı gösterimi

$$x_1 \mathrel{\hat{=}} \theta, \quad x_2 \mathrel{\hat{=}} \dot{\theta}$$ → durum değişkenleri

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

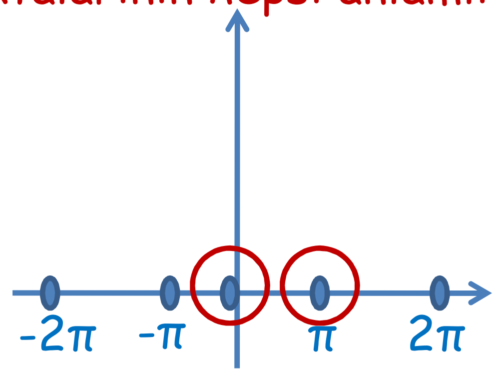
Bu denge noktalarının hepsi anlamlı mı?

Önce ne yapacağız ?

$$0 = x_2^*$$

$$0 = -\frac{g}{l}\sin x_1^* - \frac{k}{m}x_2^*$$

denge noktaları




Denge noktalarının civarındaki davranışı incelemek istesek ne yapmamız gerekir?

(0,0) civarında

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin kararlılığını incelemeyi biliyoruz

...........................................................................

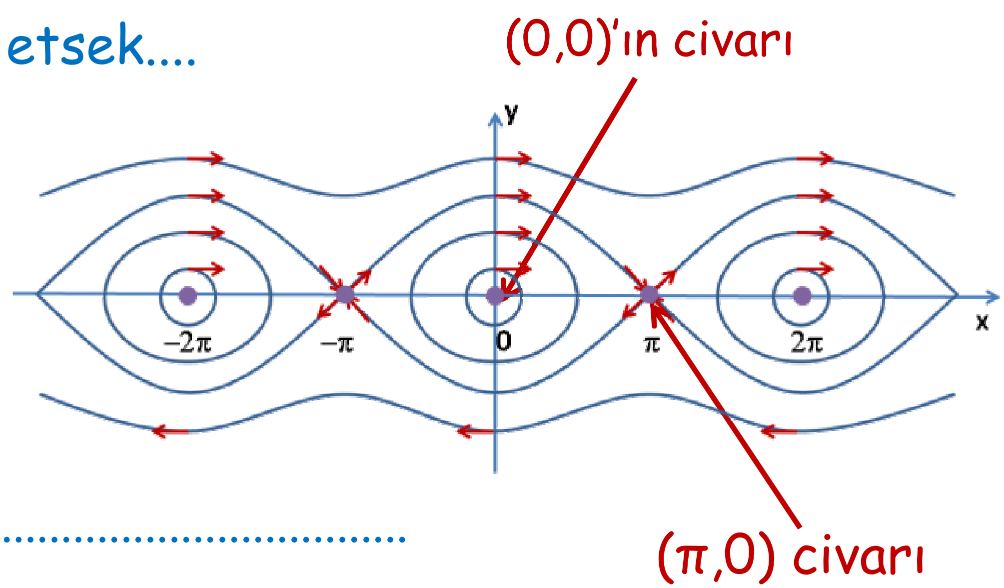
(π,0) civarında $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin de kararlılığını incelemeyi biliyoruz

..............................................................................

Sürtünmenin etkisini ihmal etsek....

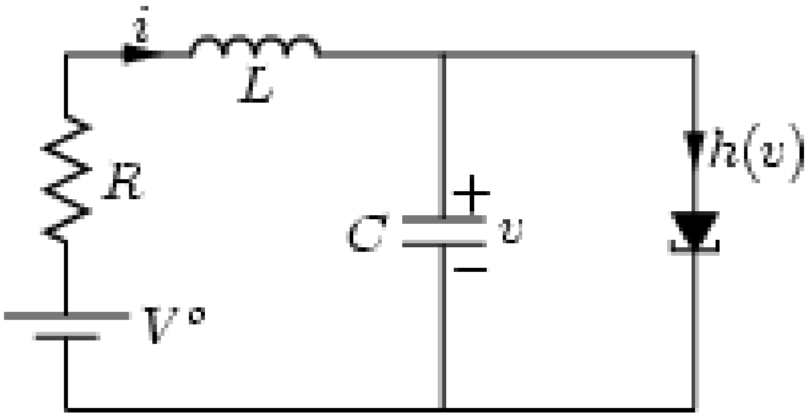
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

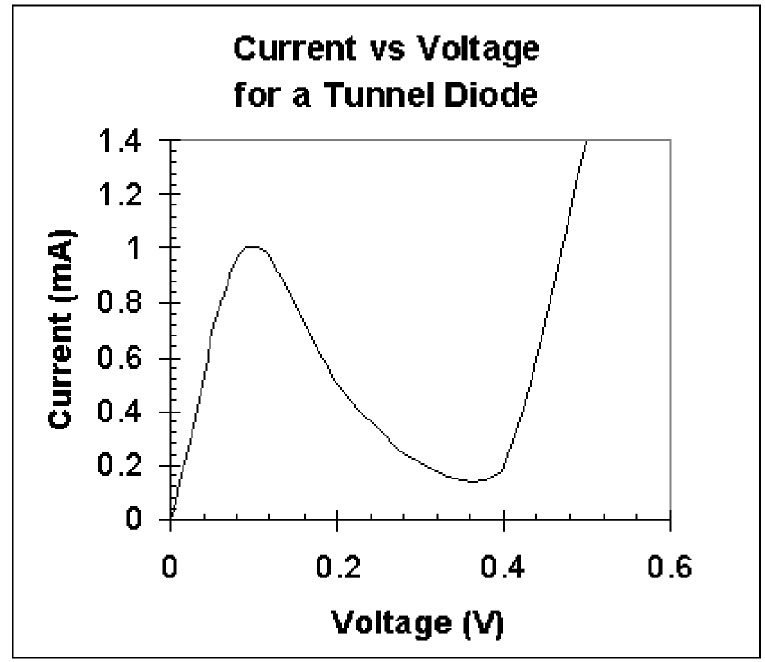



Bu sistemin kararlılığına baksak....................................

H.K.Khalil, "Nonlinear Systems", 3rd Edition, Pearson Education, 2000.

Tünel Diyod Devresi



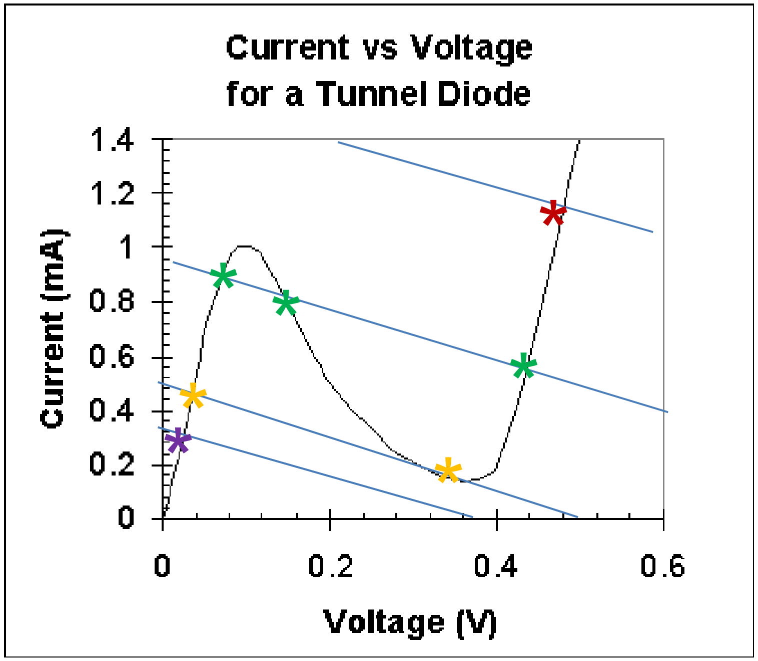

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C}\left[-h(v_C) + i_L\right]$$

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L}\left[-v_C - Ri_L + E\right]$$

$$\dot{x}_1 = \alpha\left[-h(x_1) + x_2\right]$$

$$\dot{x}_2 = \beta\left[-x_1 - \gamma x_2 + \mu\right]$$

Denge noktaları ....




$$0 = \alpha\left[-h(x_1^*) + x_2^*\right]$$

$$0 = \beta\left[-x_1^* - \gamma x_2^* + \mu\right]$$

$$h(x_1^*) = -\frac{1}{\gamma}x_1^* + \frac{1}{\gamma}\mu$$

## Notasyona ilişkin hatırlatma

$\ni$ : Öyle ki

$\forall$ : Her

$\exists$ : Vardır

$\exists!$ : Sadece bir tane vardır

# Dinamik Sistem

Dinamik sistem: $(T, X, \varphi^t)$

$\varphi^t : X \longrightarrow X$

a1) $\varphi^0 = I$

a2) $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ ▪

T zaman

T=R sürekli zaman

T=Z ayrık zaman

X durum uzayı

$X=R^n$

$X=C^n$

Hatırlatma: Metrik Uzay

$$(X,d) \ \ni \forall x, y, z \in X$$

$$d(.,.): X \mathrm{x} X \rightarrow R^{+}$$

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Çember

$$x_o \in X, r \in R^{+}$$

$$B(x_o,r) = \{x \in X \mid d(x,x_o) < r\}$$

$$\widetilde{B}(x_o,r) = \{x \in X \mid d(x,x_o) \leq r\}$$

$$S(x_o,r) = \{x \in X \mid d(x,x_o) = r\}$$

Sürekli Dönüşüm

$$X = (X,d) \ \ Y = (Y,\widetilde{d})$$

$$T: X \rightarrow Y$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ni d(x,x_o) \Rightarrow \widetilde{d}(Tx,Tx_o) < \varepsilon$$

T, $x_o$ 'da süreklidir

Yakınsama,Tam Uzay,Büzülme....

Hatırlatma

# Lineer Vektör Uzayı $V$

$x, y, z \in V$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere $V$'de iki cebrik işlem $+$ ve $\bullet$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

<u>Vektör toplama (VT)</u> $x + y \in V \quad \forall x, y \in V$

VT1 $\forall x, y \in V \qquad \mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x}$

VT2 $\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

VT3 $\exists! 0 \in V \quad \ni \quad \forall x \in V \quad x + 0 = x$

VT4 $\forall x \in V \quad \exists! (\text{-}x) \in V \quad \ni x + (-x) = 0$

Skaler ile çarpma (SÇ) $\alpha.x \in V \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$

SÇ1 $\forall \alpha \in F \quad \forall x,y \in V \quad \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

SÇ2 $\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall x \in V \quad (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

SÇ3 $\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall x \in V \quad \alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$

SÇ4 $\forall x \in V \quad 1.x = x$

# Norm

V vektör uzayı olmak üzere, aşağıdaki dört özelliği sağlayan fonksiyon $\|.\| : V \rightarrow R$ normdur

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$