Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

28 Nisan 2011

Outline

Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Lojistik Dönüşüm

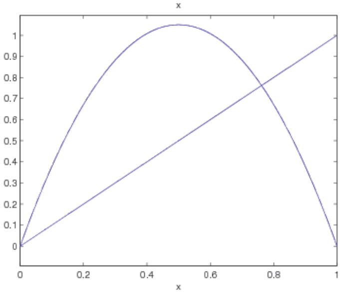
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

$x_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \implies x_n \to -\infty$

$$r = 4.2 \text{ için } f$$



Lojistik Dönüşüm

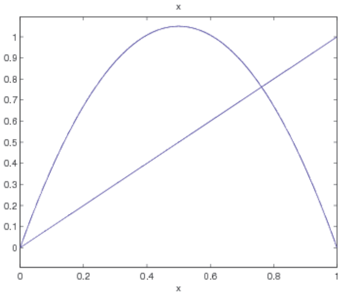
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

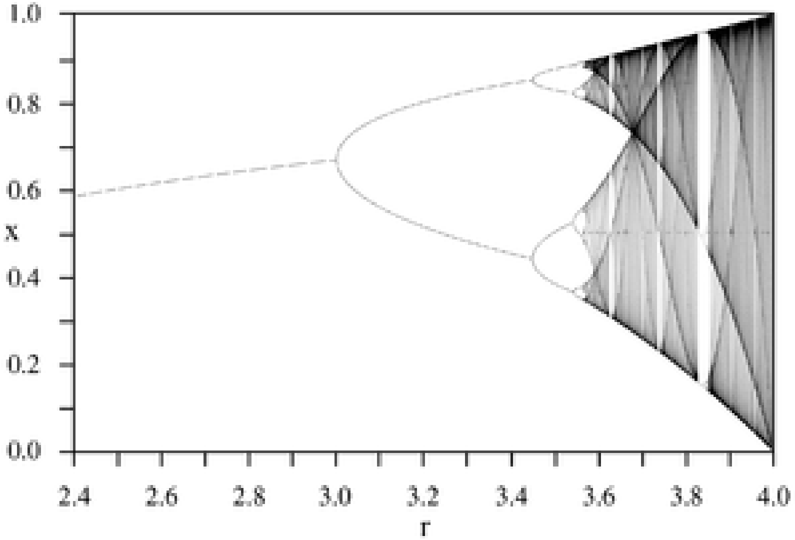
Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

$0 < r \leq 4$ ise $x_0 \in [0,4] \implies x_n \in [0,4]$, yani $\Lambda = [0,4]$ değişmez altuzaydır.

$$r = 4.2 \text{ için } f$$



Periyod Katlanması



Feigenbaum Evrensel Sabiti

μ_i: *i* inci periyod katlanmasının gerçekleştiği parametre değeri
Lojistik dönüşüm için $\frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_{n+2}-\mu_{n+1}} \rightarrow \delta = 4.669201609102990....$
Feigenbaum sabiti evrenseldir: Birçok fonksiyon için limit değer δ sabittir.

Lojistik Dönüşüm

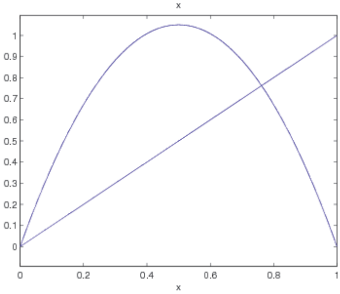
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

$r > 4$ ise ne olur?

$r = 4.2$ için



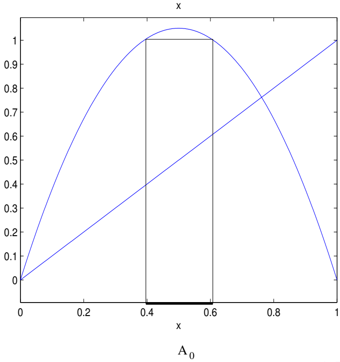
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için



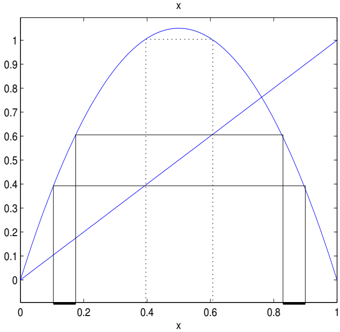
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$$r = 4.2 \text{ için}$$



A_1

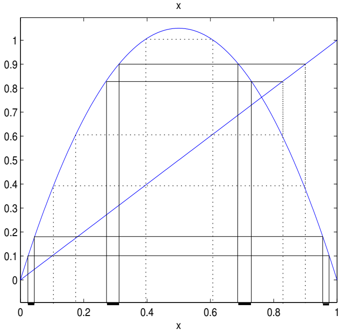
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$$r = 4.2 \text{ için}$$



A_2

Değişmez altküme Λ

$$A_0 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \notin [0,4]\}$$

Değişmez altküme Λ

$$A_0 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \notin [0,4]\}$$
$$A_1 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_0\}$$

Değişmez altküme Λ

$$A_0 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \notin [0,4]\}$$
$$A_1 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_0\}$$
$$A_2 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_1\}$$

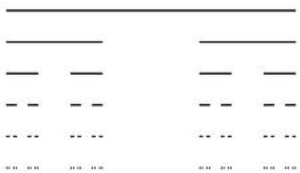
Değişmez altküme Λ

$$A_0 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \notin [0,4]\}$$
$$A_1 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_0\}$$
$$A_2 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_1\}$$
$$A_k = \{x \in [0,4] \mid n = 1, \ldots, k \text{ iken } f^n(x) \in [0,1] \; n = k \text{ ve } f^{k+1}(x) \notin [0,1]\}$$

Değişmez altküme Λ

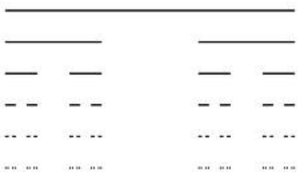
$$A_0 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \notin [0,4]\}$$
$$A_1 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_0\}$$
$$A_2 = \{x \in [0,4] \mid f(x) \in A_1\}$$
$$A_k = \{x \in [0,4] \mid n = 1, \ldots, k \text{ iken } f^n(x) \in [0,1] \ n = k \text{ ve } f^{k+1}(x) \notin [0,1]\}$$
$$\Lambda = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ değişmez altkümedir.}$$

Üçün ortası Cantor kümesi (Middle Third Cantor Set)



$$A_0 = [0, 1]$$

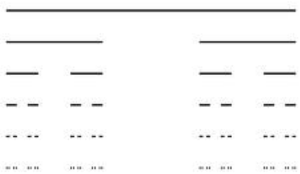
Üçün ortası Cantor kümesi (Middle Third Cantor Set)



$$A_0 = [0, 1]$$

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Üçün ortası Cantor kümesi (Middle Third Cantor Set)

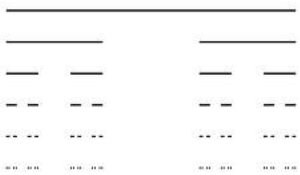


$$A_0 = [0, 1]$$

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Üçün ortası Cantor kümesi (Middle Third Cantor Set)



$$A_0 = [0, 1]$$

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$$

Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

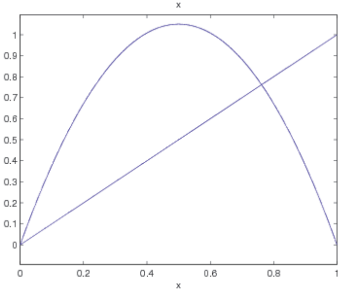
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Λ'da periyodik noktalar var mı?

$r = 4.2$ için f



Lojistik Dönüşüm

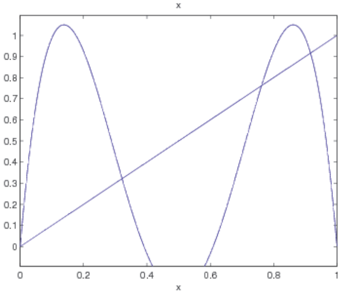
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$$r = 4.2 \text{ için } f^2$$



Lojistik Dönüşüm

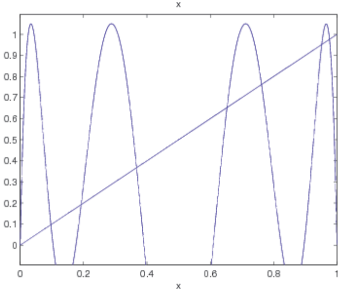
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^3



Lojistik Dönüşüm

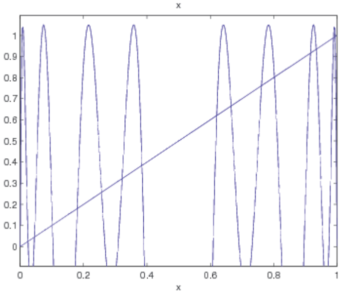
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^4



Lojistik Dönüşüm

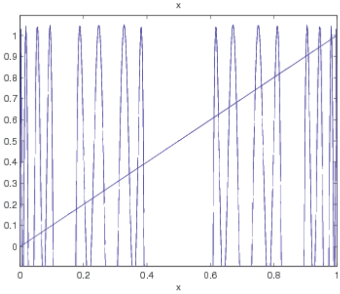
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^5



Sarkovskii Teoremi

Doğal sayıları aşağıdaki gibi sıralayalım:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd \cdots$$

$$\rhd 2^3\cdot 3 \rhd 2^3\cdot 5 \rhd \cdots\cdots \rhd 2^4 \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Sarkovskii Teoremi

Doğal sayıları aşağıdaki gibi sıralayalım:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots$$

$$\rhd 2^3 \cdot 3 \rhd 2^3 \cdot 5 \rhd \cdots\cdots \rhd 2^4 \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Teorem (Sarkovskii)

$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye sürekli bir f fonksiyonunun asal periyodu k olan bir periyodik çözümü varsa, $k \rhd l$ koşulunu sağlayan her l için asal periyodu l olan bir periyodik çözümü vardır.

Sarkovskii Teoremi

Doğal sayıları aşağıdaki gibi sıralayalım:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots$$

$$\rhd 2^3 \cdot 3 \rhd 2^3 \cdot 5 \rhd \cdots\cdots \rhd 2^4 \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Teorem (Sarkovskii)

$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye sürekli bir f fonksiyonunun asal periyodu k olan bir periyodik çözümü varsa, $k \rhd l$ koşulunu sağlayan her l için asal periyodu l olan bir periyodik çözümü vardır.

"Period three implies chaos", Li & Yorke, 1975.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.
- Sonlu sayıdaki açıkların kesişimi açıktır.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.
- Sonlu sayıdaki açıkların kesişimi açıktır.
- Kapalıların kesişimi kapalıdır.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.
- Sonlu sayıdaki açıkların kesişimi açıktır.
- Kapalıların kesişimi kapalıdır.
- Sonlu sayıdaki kapalının birleşimi kapalıdır.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.
- Sonlu sayıdaki açıkların kesişimi açıktır.
- Kapalıların kesişimi kapalıdır.
- Sonlu sayıdaki kapalının birleşimi kapalıdır.
- İçiçe kapalı kümelerin kesişimi boş değildir.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.
- Sonlu sayıdaki açıkların kesişimi açıktır.
- Kapalıların kesişimi kapalıdır.
- Sonlu sayıdaki kapalının birleşimi kapalıdır.
- İçiçe kapalı kümelerin kesişimi boş değildir.
- Kapalı bir küme içindeki yakınsak bir dizinin limiti kümenin içindedir.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y'de yoğun denir.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y'de yoğun denir.

- Kapalı bir küme tüm limit noktalarını içerir.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y'de yoğun denir.

- Kapalı bir küme tüm limit noktalarını içerir.
- Bir kümenin kapanışı kapalıdır.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y'de yoğun denir.

- Kapalı bir küme tüm limit noktalarını içerir.
- Bir kümenin kapanışı kapalıdır.
- V, $\overline{V}$'de yoğundur.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y'de yoğun denir.

- Kapalı bir küme tüm limit noktalarını içerir.
- Bir kümenin kapanışı kapalıdır.
- V, $\overline{V}$'de yoğundur.
- Rasyonel sayılar $\mathbb{R}$'de yoğundur.

Önbilgi

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V'nin limit noktaları denir.

V ile V'nin tüm limit noktalarının birleşimine V'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y'de yoğun denir.

- Kapalı bir küme tüm limit noktalarını içerir.
- Bir kümenin kapanışı kapalıdır.
- V, $\overline{V}$'de yoğundur.
- Rasyonel sayılar $\mathbb{R}$'de yoğundur.
- İrrasyonel sayılar $\mathbb{R}$'de yoğundur.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ kümesi bir $\epsilon > 0$ için $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığının içinde kalıyorsa, V'ye sınırlı denir.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ kümesi bir $\epsilon > 0$ için $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığının içinde kalıyorsa, V'ye sınırlı denir.

Sınırlı ve kapalı bir kümeye kompakt denir.

Önbilgi

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ kümesi bir $\epsilon > 0$ için $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığının içinde kalıyorsa, V'ye sınırlı denir.

Sınırlı ve kapalı bir kümeye kompakt denir.

- Kompakt bir kümede her dizinin yakınsak bir altdizisi vardır.
- Yani, V kompakt ve $\{x_n\} \in V$ ise $\exists \{n_k\} \to \infty$ öyleki $\{x_{n_k}\} \to x^* \in V$.

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

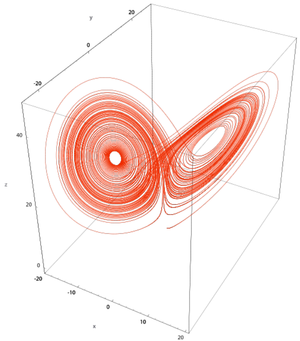
- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x)\\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y\\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

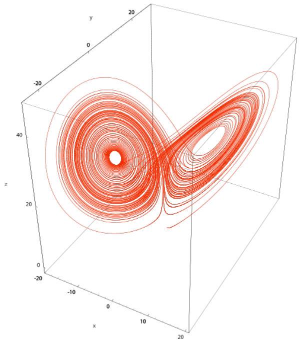
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x)\\
\dot{y} &= x(\rho - z) - y\\
\dot{z} &= xy - \beta z
\end{aligned}$$



Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y\\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \to J$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J,\ \text{açık } N \ni x\ \exists y \in N,\ n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Devaney Tipi Kaos

$x(k+1) = 2 \cdot x(k)$ da başlangıç koşullarına hassas bağımlı, ama kaotik mi?

Devaney Tipi Kaos

$x(k+1) = 2 \cdot x(k)$ da başlangıç koşullarına hassas bağımlı, ama kaotik mi?

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \to J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

Devaney Tipi Kaos

$x(k+1) = 2 \cdot x(k)$ da başlangıç koşullarına hassas bağımlı, ama kaotik mi?

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \to J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

f'in J de yoğun bir yörüngesi varsa, f topolojik geçişlidir.

Devaney Tipi Kaos

$x(k+1) = 2 \cdot x(k)$ da başlangıç koşullarına hassas bağımlı, ama kaotik mi?

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

f'in J de yoğun bir yörüngesi varsa, f topolojik geçişlidir.

Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f : V \rightarrow V$ fonksiyonuna kaotik denir:

- *f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.*
- *f topolojik geçişlidir.*
- *periyodik noktalar V'de yoğundur.*

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in Q \tag{1}$$

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in Q \tag{1}$$

Teorem

(1)'in her yörüngesi S^1 'de yoğundur.

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in Q \tag{1}$$

Teorem

(1)'in her yörüngesi S^1'de yoğundur.

İspat

- $\{\theta_n\}$ *ayrık noktalardan oluşur.*

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in Q \tag{1}$$

Teorem

(1)'in her yörüngesi S^1'de yoğundur.

İspat

- $\{\theta_n\}$ *ayrık noktalardan oluşur.*
- *O zaman, bir limit noktası vardır.*

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in Q \tag{1}$$

Teorem

(1)'in her yörüngesi S^1'de yoğundur.

İspat

- $\{\theta_n\}$ *ayrık noktalardan oluşur.*
- *O zaman, bir limit noktası vardır.*
- *Her* $\epsilon > 0$ *için* $\{\theta_n\}$*'de* S^1*'i en fazla* ϵ *büyüklüğünde aralıklara böler.*

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in Q \tag{1}$$

Teorem

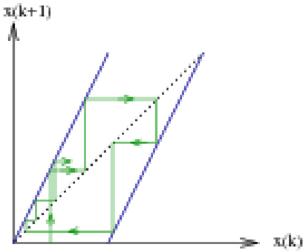
(1)'in her yörüngesi S^1'de yoğundur.

İspat

- $\{\theta_n\}$ *ayrık noktalardan oluşur.*
- *O zaman, bir limit noktası vardır.*
- *Her* $\epsilon > 0$ *için* $\{\theta_n\}$*'de* S^1*'i en fazla* ϵ *büyüklüğünde aralıklara böler.*

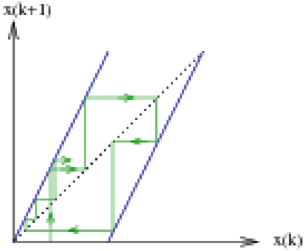
(1) sistemi topolojik geçişlidir ama kaotik değildir.

İkiye katlama dönüşümü



$$\theta(n+1) = 2 \cdot \theta(n) \bmod 1$$

İkiye katlama dönüşümü



$$\theta(n+1) = 2 \cdot \theta(n) \bmod 1$$

Bu dönüşümün kaotik olduğunu gösterelim.

Sembolik Dinamik Sistemler

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \mid s_j = 0, 1\}$$

Sembolik Dinamik Sistemler

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$$
$$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Sembolik Dinamik Sistemler

$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$
$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$
Σ_n'e dizi uzayı denir.

Sembolik Dinamik Sistemler

$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$
$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$
Σ_n'e dizi uzayı denir.
Σ_2'de $d(s,t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$ metriğini tanımlayalım.

Sembolik Dinamik Sistemler

$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$
$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$
Σ_n'e dizi uzayı denir.
Σ_2'de $d(s,t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$ metriğini tanımlayalım.

Önerme

$s, t \in \Sigma_2$ için

$$s_i = t_i, \; i = 0, 1, \dots, n \Longleftrightarrow d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

İspat

$s_i = t_i, \; i = 0, 1, \dots, n$ *ise* $d(s,t) = \dots$

Sembolik Dinamik Sistemler

$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$
$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$
Σ_n'e dizi uzayı denir.
Σ_2'de $d(s,t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$ metriğini tanımlayalım.

Önerme

$s, t \in \Sigma_2$ için

$$s_i = t_i,\ i = 0, 1, \dots, n \Longleftrightarrow d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

İspat

$s_i = t_i,\ i = 0, 1, \dots, n$ *ise* $d(s,t) = \dots$

$s_i = t_i,\ i = 0, 1, \dots, n$ *değilse* $\dots$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \ldots) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \ldots) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$$

- $(0, 0, 0, \ldots)$ ve $(1, 1, 1, \ldots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \ldots) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$$

- $(0, 0, 0, \ldots)$ ve $(1, 1, 1, \ldots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \ldots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0, 0, 0, \dots)$ ve $(1, 1, 1, \dots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \dots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \dots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\mathrm{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0, 0, 0, \dots)$ ve $(1, 1, 1, \dots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \dots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \dots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\mathrm{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$
- $\#(\mathrm{Per}_3(\sigma)) =?$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0, 0, 0, \dots)$ ve $(1, 1, 1, \dots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \dots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \dots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\mathrm{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$
- $\#(\mathrm{Per}_3(\sigma)) =?$
- $\#(\mathrm{Per}_n(\sigma)) =?$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0, 0, 0, \dots)$ ve $(1, 1, 1, \dots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \dots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \dots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\mathrm{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$
- $\#(\mathrm{Per}_3(\sigma)) =?$
- $\#(\mathrm{Per}_n(\sigma)) =?$
- $\mathrm{Per}_n(\sigma)$'nın Σ_2'de yoğun olduğunu gösterelim.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0,0,0,\dots)$ ve $(1,1,1,\dots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0,1,0,1,\dots)$ ve $(1,0,1,0,\dots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\mathrm{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$
- $\#(\mathrm{Per}_3(\sigma)) =?$
- $\#(\mathrm{Per}_n(\sigma)) =?$
- $\mathrm{Per}_n(\sigma)$'nın Σ_2'de yoğun olduğunu gösterelim.
- σ'nın Σ_2'de yoğun bir yörüngesini bulalım.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0, 0, 0, \dots)$ ve $(1, 1, 1, \dots)$, σ'nın sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \dots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \dots)$, σ'nın (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\mathrm{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$
- $\#(\mathrm{Per}_3(\sigma)) =?$
- $\#(\mathrm{Per}_n(\sigma)) =?$
- $\mathrm{Per}_n(\sigma)$'nın Σ_2'de yoğun olduğunu gösterelim.
- σ'nın Σ_2'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
- Başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı gösterelim.