Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

21 Nisan 2011

Outline

Homoklinik Dallanma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\ \dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

Homoklinik Dallanma

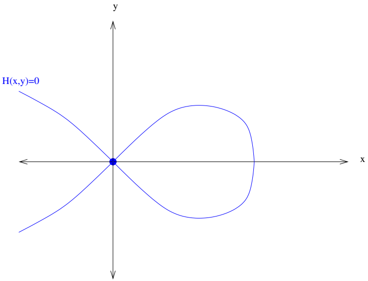
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\ \dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ için $H(x.y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.

Homoklinik Dallanma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\ \dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

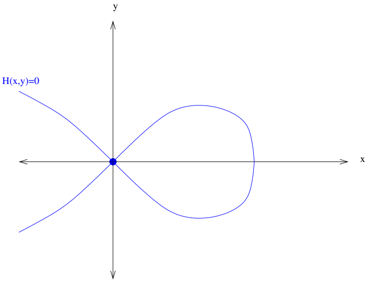
$\alpha = 0$ için $H(x.y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



Homoklinik Dallanma

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\
\dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy
\end{aligned}
$$

$\alpha = 0$ için $H(x.y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.

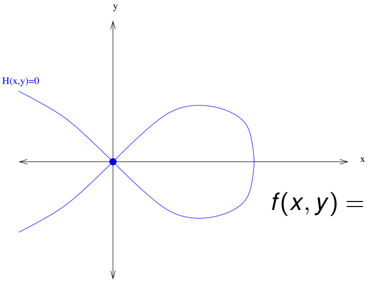


$$\nabla H(x, y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

Homoklinik Dallanma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\ \dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ için $H(x.y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



$$\nabla H(x,y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

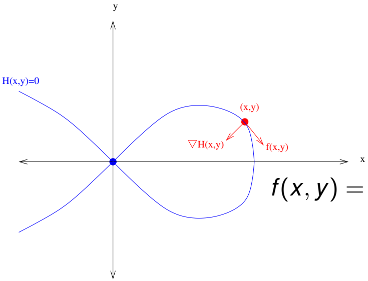
$$< f(x,y), \nabla H(x,y) >= 0$$

$$f(x,y) = (-x + 2y - x^2, (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy)$$

Homoklinik Dallanma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\ \dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ için $H(x.y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



$$\nabla H(x,y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

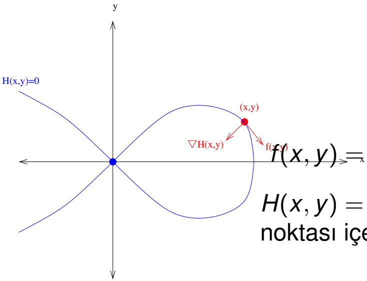
$$< f(x,y), \nabla H(x,y) >= 0$$

$$f(x,y) = (-x + 2y - x^2, (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy)$$

Homoklinik Dallanma

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\
\dot{y} &= (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy
\end{aligned}
$$

$\alpha = 0$ için $H(x.y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



$$\nabla H(x,y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

$$< f(x,y), \nabla H(x,y) >= 0$$

$$f(x,y) = (-x + 2y - x^2, (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy)$$

$H(x,y) = 0$ eğrisinin sağ yarı düzlemde denge noktası içermediğinden emin miyiz?

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

$x(0) = x_0$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0))$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1))$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0)))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

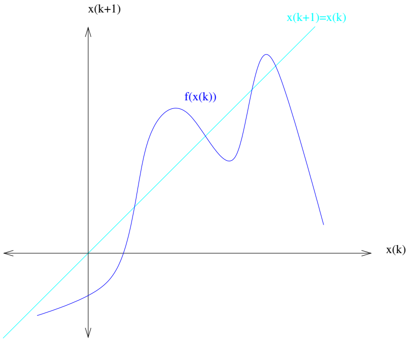
$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{1}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

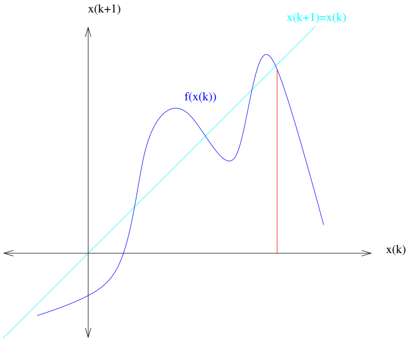


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

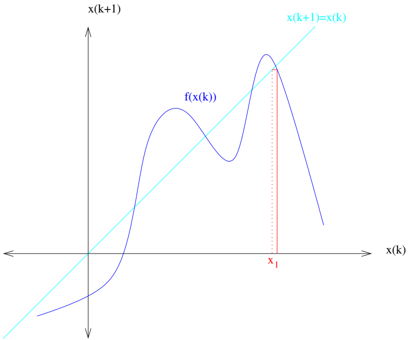


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

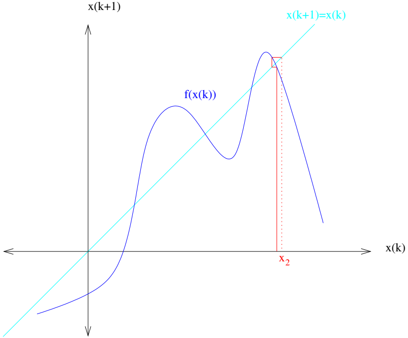


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

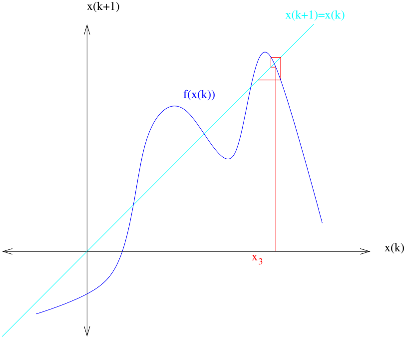


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

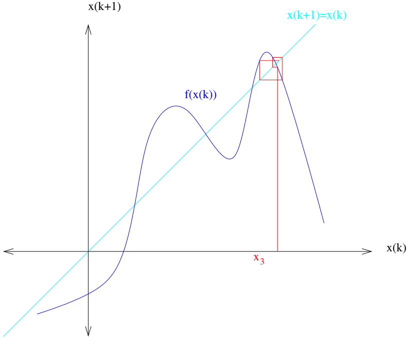


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

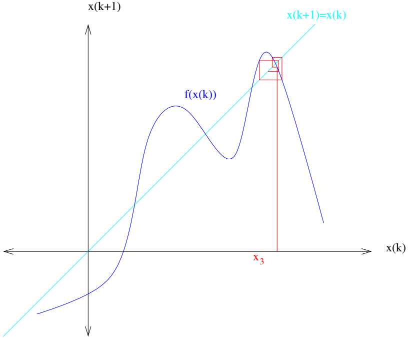


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

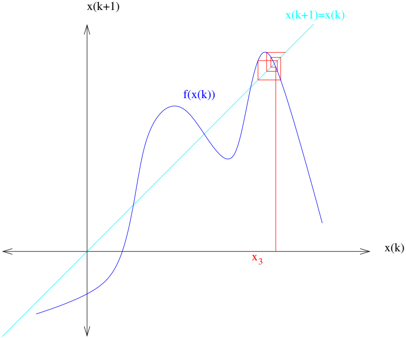


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

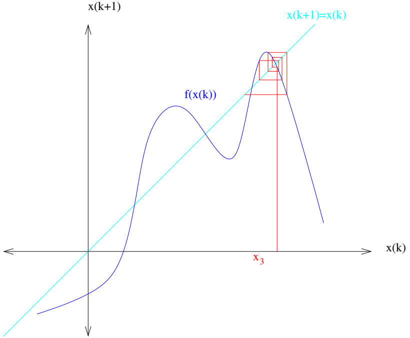


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

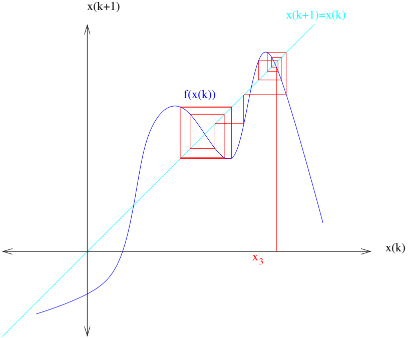


Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$
$\rightarrow x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.



Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0))$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1))$$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0)))$$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalardır:
$\{x^*, x^*, \ldots, x^*, \ldots\}$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalardır:
$\{x^*, x^*, \ldots, x^*, \ldots\}$

p-periyodik bir çözüm: $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_0, x_1 \ldots\}$

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalardır:
$\{x^*, x^*, \ldots, x^*, \ldots\}$

p-periyodik bir çözüm: $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_0, x_1 \ldots\} \ \rightarrow \ x_k = f^p(x_k)$,
$k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Ayrık zamanlısistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2}$$

$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$
$x(3) = f^3(x(0))$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalardır:
$\{x^*, x^*, \ldots, x^*, \ldots\}$

p-periyodik bir çözüm: $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_0, x_1 \ldots\} \rightarrow x_k = f^p(x_k)$,
$k = 0, 1, \ldots, p-1$.

$x^* = f^n(x^*)$ koşulunu sağlayan en küçük n sayısına x^*' ın asal periyodu denir.

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

x^* sabit noktası için $|f'(x^*)| < 1$ ise x^* asimptotik kararıdır.

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

x^* sabit noktası için $|f'(x^*)| < 1$ ise x^* asimptotik kararıdır.

$\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ periyodik çözümü için $|(f^p)'(x_0)| = |f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| < 1$ ise periyodik çözüm asimptotik kararlıdır.

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

x^* sabit noktası için $|f'(x^*)| < 1$ ise x^* asimptotik kararıdır.

$\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ periyodik çözümü için
$|(f^p)'(x_0)| = |f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| < 1$ ise periyodik çözüm asimptotik kararlıdır.

Başka nasıl çözümler olabilir?

Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Lojistik Dönüşüm

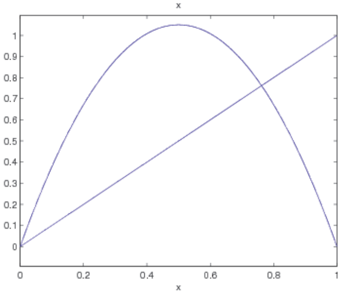
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$$r = 4.2 \text{ için } f$$



Lojistik Dönüşüm

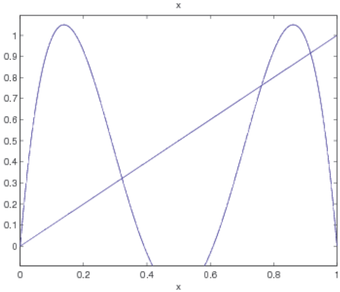
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$$r = 4.2 \text{ için } f^2$$



Lojistik Dönüşüm

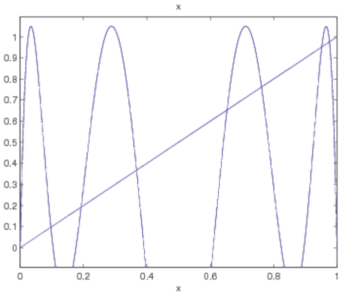
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$$r = 4.2 \text{ için } f^3$$



Lojistik Dönüşüm

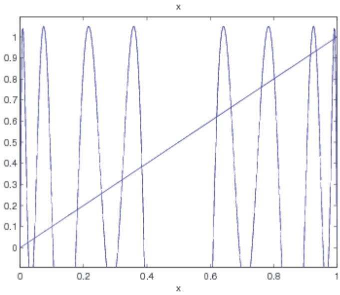
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$$r = 4.2 \text{ için } f^4$$



Lojistik Dönüşüm

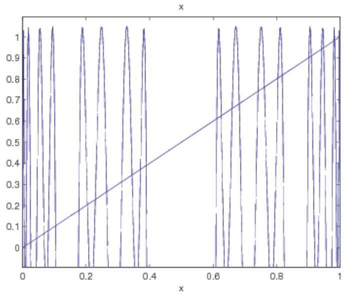
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$$r = 4.2 \text{ için } f^5$$



Lojistik Dönüşüm

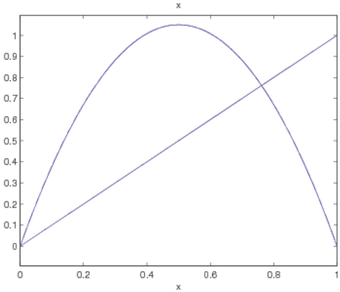
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için



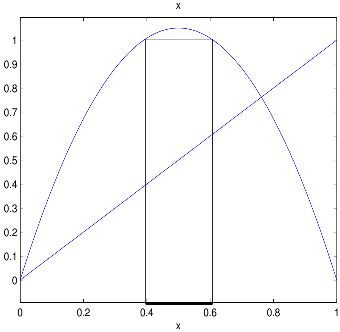
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$$r = 4.2 \text{ için}$$



A_0

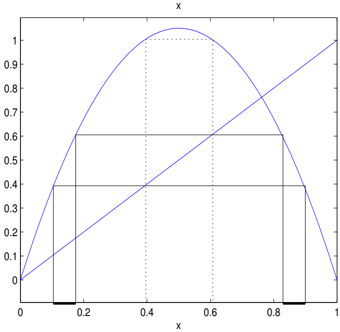
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$$r = 4.2 \text{ için}$$



A_1