

Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

5 Mayıs 2011

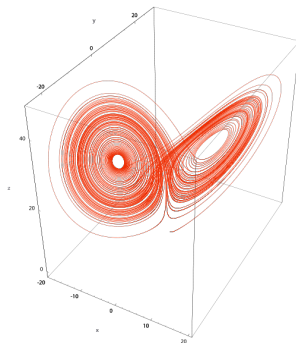
Outline

- 1 Devaney Tipi Kaos
- 2 Sembolik Dinamik Sistemler
- 3 Lyapunov Üsteli

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

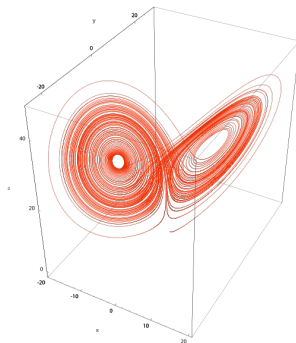
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



Başka bir çok kaotik sistem var. (Elegant Chaos, Sprott.)

Devaney Tipi Kaos

Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \rightarrow J$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J, \text{ açık } N \ni x \exists y \in N, n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

Devaney Tipi Kaos

Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \rightarrow J$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J, \text{ açık } N \ni x \exists y \in N, n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

f 'in J de yoğun bir yörüngesi varsa, f topolojik geçişlidir.

Devaney Tipi Kaos

Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \rightarrow J$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J, \text{ açık } N \ni x \exists y \in N, n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

f 'in J de yoğun bir yörüngesi varsa, f topolojik geçişlidir.

Tersi de doğru, ama ispatı kolay değil.

Devaney Tipi Kaos

Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \rightarrow J$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J, \text{ açık } N \ni x \exists y \in N, n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

f 'in J de yoğun bir yörüngesi varsa, f topolojik geçişlidir.

Tersi de doğru, ama ispatı kolay değil.

Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f : V \rightarrow V$ fonksiyonuna kaotik denir:

- f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.
- f topolojik geçişlidir.
- periyodik noktalar V 'de yoğundur.

Tanımda fazlalık

J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, On Devaney's Definition of Chaos, 1992.

Teorem

X , sonlu olmayan metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli olsun.

Tanımda fazlalık

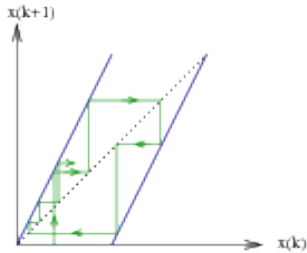
J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, On Devaney's Definition of Chaos, 1992.

Teorem

X , sonlu olmayan metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli olsun.

f topolojik geçişli ve periyodik yörüngeler yoğun ise f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.

İkiye katlama dönüşümü

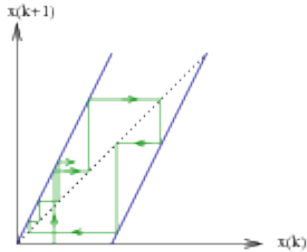


$$\theta(n+1) = 2 \cdot \theta(n) \bmod 1$$

$$\theta(n+1) = K_2(\theta(n))$$

Bu dönüşümün kaotik olduğunu göstereceğiz.

İkiye katlama dönüşümü



$$\theta(n+1) = 2 \cdot \theta(n) \bmod 1$$

$$\theta(n+1) = K_2(\theta(n))$$

Bu dönüşümün kaotik olduğunu
göstereceğiz.
İki yol var.

Sembolik Dinamik Sistemler

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$$

$$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Σ_n 'e dizi uzayı denir.

Σ_2 'de $d(s, t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$ metriğini tanımlayalım.

Önerme

$s, t \in \Sigma_2$ için

$$s_i = t_i, i = 0, 1, \dots, n \iff d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Sembolik Dinamik Sistemler

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$$

$$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Σ_n 'e dizi uzayı denir.

Σ_2 'de $d(s, t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$ metriğini tanımlayalım.

Önerme

$s, t \in \Sigma_2$ için

$$s_i = t_i, i = 0, 1, \dots, n \iff d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

İki dizinin ne kadar çok ilk terimi eşitse, diziler o kadar birbirine yakındır.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2 \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nın Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerekli kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani;
 $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nın Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerekli kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani;
 $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.
- σ 'nın Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nın Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerektiği kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani;
 $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.
- σ 'nın Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
 - Periyodik dizilerin tekrar eden kısımlarını sırayla yazalım:
 $(0), (1), (00), (01), (10), (11), (000), (001), (010), \dots$

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nın Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerektiği kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani;
 $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.
- σ 'nın Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
 - Periyodik dizilerin tekrar eden kısımlarını sırayla yazalım:
 $(0), (1), (00), (01), (10), (11), (000), (001), (010), \dots$
 - Bunları ardarda ekleyerek yeni bir dizi oluşturalım:
 $\bar{s} = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ \dots)$.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerektiği kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani; $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.
- σ 'nin Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
 - Periyodik dizilerin tekrar eden kısımlarını sırayla yazalım:
 $(0), (1), (00), (01), (10), (11), (000), (001), (010), \dots$
 - Bunları ardarda ekleyerek yeni bir dizi oluşturalım:
 $\bar{s} = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ \dots)$.
 - Bu dizi sağa kaydırılarak herhangi bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine istenildiği kadar yakın bir dizi elde edilebilir.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerektiği kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani; $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.
- σ 'nin Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
 - Periyodik dizilerin tekrar eden kısımlarını sırayla yazalım: $(0), (1), (00), (01), (10), (11), (000), (001), (010), \dots$
 - Bunları ardarda ekleyerek yeni bir dizi oluşturalım: $\bar{s} = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ \dots)$.
 - Bu dizi sağa kaydırılarak herhangi bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine istenildiği kadar yakın bir dizi elde edilebilir.
- Başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı gösterelim.

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
 - Y 'deki her noktaya keyfi yakın X 'den bir eleman varsa X , Y 'de yoğundur.
 - Σ_2 'deki bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
 - Gerektiği kadar büyük bir N sayısı için ilk N terimi sabit tutarak... Yani; $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$.
- σ 'nin Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
 - Periyodik dizilerin tekrar eden kısımlarını sırayla yazalım: $(0), (1), (00), (01), (10), (11), (000), (001), (010), \dots$
 - Bunları ardarda ekleyerek yeni bir dizi oluşturalım: $\bar{s} = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ \dots)$.
 - Bu dizi sağa kaydırılarak herhangi bir $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ dizisine istenildiği kadar yakın bir dizi elde edilebilir.
- Başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı gösterelim.
 - Birbirine çok yakın iki dizi sağa kaydırıldığında aralarındaki mesafe iki katına çıkar.

Kaydırma Dönüşümü

SONUÇ:

Kaydırma Dönüşümü

SONUÇ:

- $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kaotiktir.

Kaydırma Dönüşümü

SONUÇ:

- $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kaotiktir.
- $\overline{\Sigma}_2 := \Sigma_2 \setminus \{\text{Sonu } (0, 1, 1, 1, \dots) \text{ ile biten diziler.}\}$ $h : [0, 1] \rightarrow \overline{\Sigma}_2$,
 $h : x \rightarrow x$ 'in 2 tabanındaki açılımı.

Kaydırma Dönüşümü

SONUÇ:

- $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kaotiktir.
- $\overline{\Sigma}_2 := \Sigma_2 \setminus \{\text{Sonu } (0, 1, 1, 1, \dots) \text{ ile biten diziler.}\}$ $h : [0, 1] \rightarrow \overline{\Sigma}_2$,
 $h : x \rightarrow x$ 'in 2 tabanındaki açılımı.
- h , bir homeomorfizmdir. $\sigma h = hK_2$ dir. Yani, K_2 ile σ topolojik eşdeğerdir.

Kaydırma Dönüşümü

SONUÇ:

- $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ kaotiktir.
- $\overline{\Sigma_2} := \Sigma_2 \setminus \{\text{Sonu } (0, 1, 1, 1, \dots) \text{ ile biten diziler.}\}$ $h : [0, 1] \rightarrow \overline{\Sigma_2}$,
 $h : x \rightarrow x$ 'in 2 tabanındaki açılımı.
- h , bir homeomorfizmdir. $\sigma h = hK_2$ dir. Yani, K_2 ile σ topolojik eşdeğerdir.

Diğer yol?

Lyapunov Üsteli

