

Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

25 Nisan 2013

Outline

- 1 Lojistik Dönüşüm
- 2 Devaney Tipi Kaos
- 3 Sembolik Dinamik Sistemler

Lojistik Dönüşüm

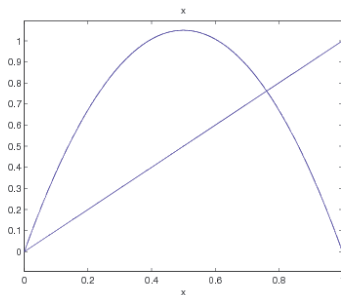
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

$x_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \implies x_n \rightarrow -\infty$

$r = 4.2$ için f



Lojistik Dönüşüm

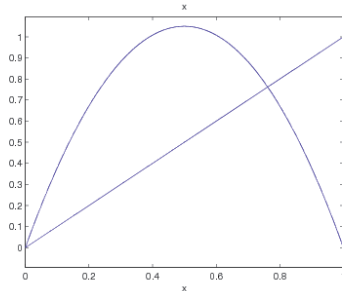
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

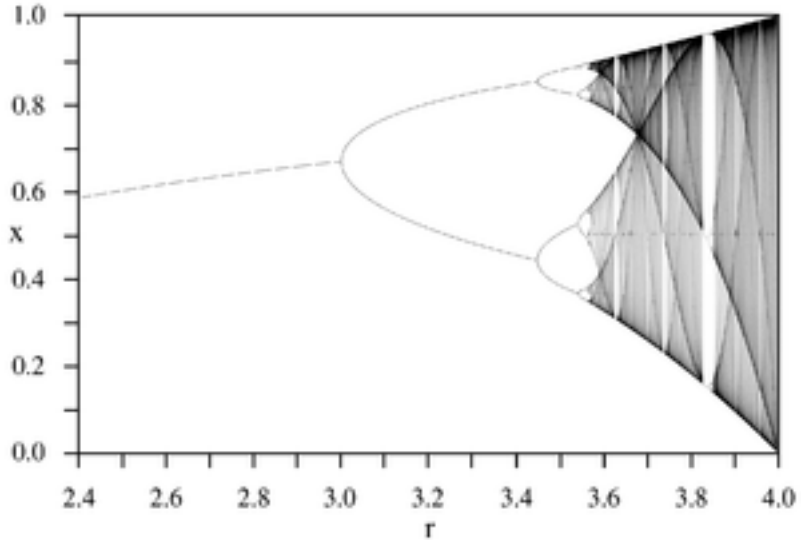
Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

$0 < r \leq 4$ ise $x_0 \in [0, 1] \implies x_n \in [0, 1]$, yani $\Lambda = [0, 1]$ değişmez altuzaydır.

$r = 4.2$ için f



Periyod Katlanması



Feigenbaum Evrensel Sabiti

μ_i : i inci periyod katlanmasının gerçekleştiği parametre değeri

Lojistik dönüşüm için $\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \rightarrow \delta = 4.669201609102990\dots$

Feigenbaum sabiti evrenselidir: Birçok fonksiyon için limit değer δ sabittir.

Lojistik Dönüşüm

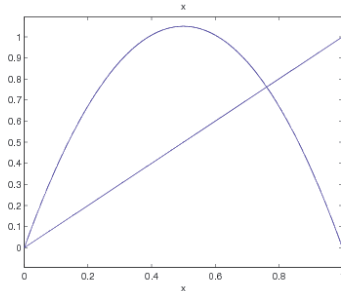
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

$r > 4$ ise ne olur?

$r = 4.2$ için



Lojistik Dönüşüm

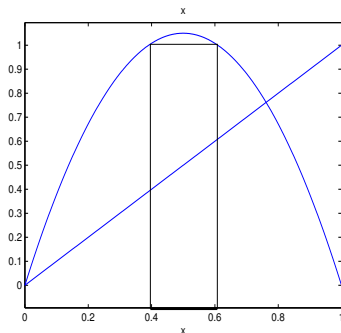
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için



A_0

Lojistik Dönüşüm

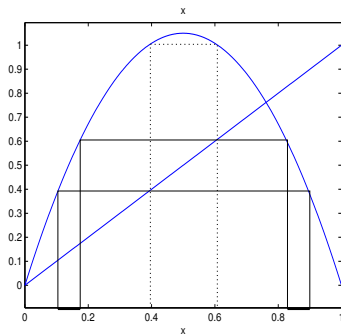
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için



A₁

Lojistik Dönüşüm

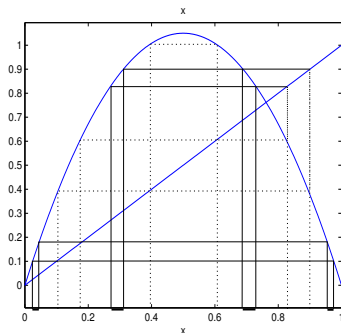
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için



A₂

Değişmez altküme Λ

$$A_0 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \notin [0, 1]\}$$

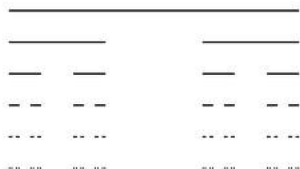
$$A_1 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \in A_0\}$$

$$A_2 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \in A_1\}$$

$$A_k = \{x \in [0, 1] \mid n = 1, \dots, k \text{ iken } f^n(x) \in [0, 1] \text{ } n = k \text{ ve } f^{k+1}(x) \notin [0, 1]\}$$

$$\Lambda = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ değişmez altkümedir.}$$

Üçün ortası Cantor kümesi (Middle Third Cantor Set)



$$A_0 = [0, 1]$$

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$$

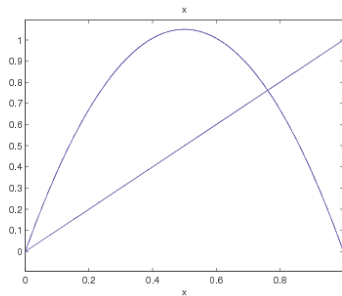
Lojistik Dönüşüm

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Λ 'da periyodik noktalar var mı?

$r = 4.2$ için f



Lojistik Dönüşüm

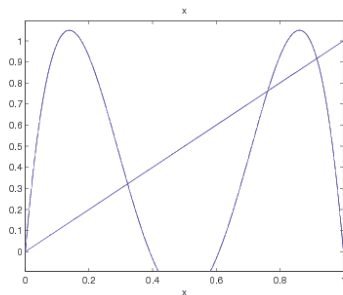
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^2



Lojistik Dönüşüm

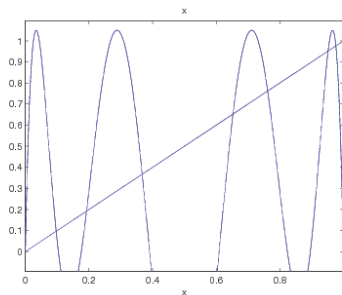
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^3



Lojistik Dönüşüm

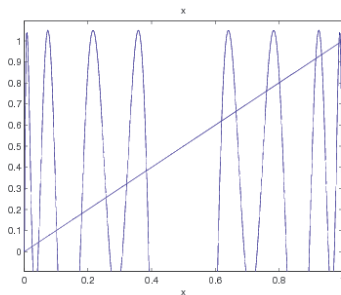
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^4



Lojistik Dönüşüm

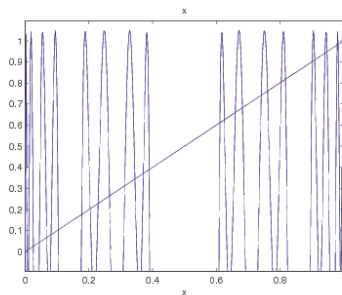
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^5



Sarkovskii Teoremi

Doğal sayıları aşağıdaki gibi sıralayalım:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \\ \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Teorem (Sarkovskii)

$\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye sürekli bir f fonksiyonunun asal periyodu k olan bir periyodik çözümü varsa, $k \triangleright l$ koşulunu sağlayan her l için asal periyodu l olan bir periyodik çözümü vardır.

“Period three implies chaos”, Li & Yorke, 1975.

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ açıktır, eğer her $x \in V$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in V$

$V \subset \mathbb{R}$ kapalıdır, eğer $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ açıksa.

- Açıkların birleşimi açıktır.
- Sonlu sayıdaki açıkların kesişimi açıktır.
- Kapalıların kesişimi kapalıdır.
- Sonlu sayıdaki kapalıların birleşimi kapalıdır.
- İç içe kapalı kümelerin kesişimi boş değildir.
- Kapalı bir küme içindeki yakınsak bir dizinin limiti kümenin içindedir.

Tanım

V içindeki yakınsak dizilerin limit noktalarına V 'nin limit noktaları denir.

V ile V 'nin tüm limit noktalarının birleşimine V 'nin kapanışı denir ve $\overline{V}$ ile gösterilir.

$V \subset Y \subset \mathbb{R}$ için $\overline{V} = Y$ ise V ye Y 'de yoğun denir.

- Kapalı bir küme tüm limit noktalarını içerir.
- Bir kümenin kapanışı kapalıdır.
- V , $\overline{V}$ 'de yoğundur.
- Rasyonel sayılar $\mathbb{R}$ 'de yoğundur.
- İrrasyonel sayılar $\mathbb{R}$ 'de yoğundur.

Tanım

$V \subset \mathbb{R}$ kümesi bir $\epsilon > 0$ için $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığının içinde kalıyorsa, V 'ye sınırlı denir.

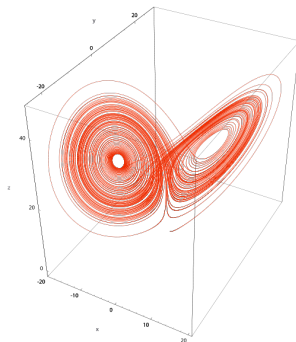
Sınırlı ve kapalı bir kümeye kompakt denir.

- Kompakt bir kümede her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.
- Yani, V kompakt ve $\{x_n\} \in V$ ise $\exists \{n_k\} \rightarrow \infty$ öyleki $\{x_{n_k}\} \rightarrow x^* \in V$.

Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \rightarrow J$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J, \text{ açık } N \ni x \exists y \in N, n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

Devaney Tipi Kaos

$x(k+1) = 2 \cdot x(k)$ da başlangıç koşullarına hassas bağımlı, ama kaotik mi?

Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : J \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. Her $U, V \subset J$ açık kümeleri için $f^k(U) \cap V$ koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa f topolojik geçişlidir denir.

f 'in J de yoğun bir yörüngesi varsa, f topolojik geçişlidir.

Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f : V \rightarrow V$ fonksiyonuna kaotik denir:

- f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.
- f topolojik geçişlidir.
- periyodik noktalar V 'de yoğundur.

Çember üzerinde irrasyonel dönme

$$\theta(n+1) = \theta(n) + 2\pi\lambda, \quad \theta \in S^1 = [0, 2\pi), \quad \lambda \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Teorem

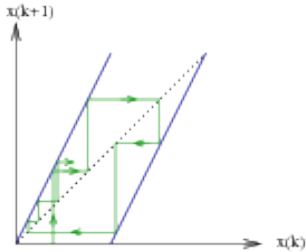
(1)'in her yörüngesi S^1 'de yoğundur.

İspat

- $\{\theta_n\}$ ayrık noktalardan oluşur.
- O zaman, bir limit noktası vardır.
- Her $\epsilon > 0$ için $\{\theta_n\}$, S^1 'i en fazla ϵ büyüklüğünde aralıklara böler.

(1) sistemi topolojik geçişlidir ama kaotik değildir.

İkiye katlama dönüşümü



$$\theta(n+1) = 2 \cdot \theta(n) \bmod 1$$

Bu dönüşümün kaotik olduğunu gösterelim.

Sembolik Dinamik Sistemler

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$$

$$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Σ_n 'e dizi uzayı denir.

Σ_2 'de $d(s, t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$ metriğini tanımlayalım.

Önerme

$s, t \in \Sigma_2$ için

$$s_i = t_i, i = 0, 1, \dots, n \iff d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

İspat

$s_i = t_i, i = 0, 1, \dots, n$ ise $d(s, t) = \dots$

$s_i = t_i, i = 0, 1, \dots, n$ değilse ...

Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $(0, 0, 0, \dots)$ ve $(1, 1, 1, \dots)$, σ 'nin sabit noktalarıdır.
- $(0, 1, 0, 1, \dots)$ ve $(1, 0, 1, 0, \dots)$, σ 'nin (asal) periyod-2 noktalarıdır.
- $\#(\text{Per}_2(\sigma)) =$ periyodu 2 olan noktaların sayısı $=?$
- $\#(\text{Per}_3(\sigma)) =?$
- $\#(\text{Per}_n(\sigma)) =?$
- $\text{Per}_n(\sigma)$ 'nin Σ_2 'de yoğun olduğunu gösterelim.
- σ 'nin Σ_2 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
- Başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı gösterelim.