

Dallanmanın eşboyutu (codimension):

$\dot{x} = f(x, \alpha)$ ve $x \rightarrow f(x, \alpha)$ sistemlerine ilişkin dallanmanın eşboyutu parametre uzayının boyutu ile ilgili dallanma yüzeyinin boyutu arasındaki farka eşittir.

Dallanmaların sınıflandırılması için bir yol nasıl buluruz?

$$* \dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R^n, \quad \alpha \in R^m \quad \dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in R^n, \quad \beta \in R^m \quad \#$$

Topolojik Eşdeğerlilik: Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa * sistemi # sistemine topolojik olarak eşdeğerdir

Parametreye bağlı $p: R^m \rightarrow R^m$ p homeomorfizm $\beta = p(\alpha)$

$h_\alpha: R^n \rightarrow R^n$ h_α homeomorfizm $y = h_\alpha(x)$

Zamanla değişimin yönünü koruyarak

Topolojik Eşdeğerlilik: $(x, \alpha) = (0, 0)$ 'ın küçük bir komşuluğunda tanımlanmış $(x, \alpha) \rightarrow (h_\alpha(x), p(\alpha))$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlanıyorsa sistemi * , # sistemine yerel olarak orijin civarında topolojik eşdeğerdir

$$p: R^m \rightarrow R^m \quad p, \alpha = 0, p(0) = 0 \text{ civarında homeomorfizm}$$

$$h_\alpha: R^n \rightarrow R^n \quad h_\alpha, x = 0, h_\alpha(0) = 0 \text{ 'ın } U_\alpha \text{ komşuluğunda } * \text{ sisteminin yörüngelerini } \# \text{ sisteminin yörüngelerine zamanda değişim yönünü koruyarak taşıyan homeomorfizm}$$

???

Topolojik eşdeğer ama dallanmanın incelenmesi daha kolay olan bir sistem

$$\# \dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R^n, \quad \alpha \in R^m \quad * \dot{\xi} = g(\xi, \beta, \sigma), \quad \xi \in R^n, \quad \beta \in R^m, \quad \sigma \in R^l$$

Dallanma parametresi
Çok terimlinin katsayıları

sisteminin $\alpha = 0$ parametre değerinde $x = 0$ noktasında bir denge noktası olsun

Benzer şekilde * sisteminin $\beta = 0$ parametre değerinde $\xi = 0$ noktasında bir denge noktası olsun

Topolojik örnek: # sistemi $x = 0$ denge noktasında ve $\alpha = 0$ parametre değerinde * sistemi ile aynı dallanma koşullarını sağlıyorsa ve orijin civarında bazı σ değerleri için yerel olarak * sistemine topolojik eşdeğer ise * sistemi dallanma için # sisteminin topolojik örneği olarak isimlendirilir.

Çaprazlık koşulu

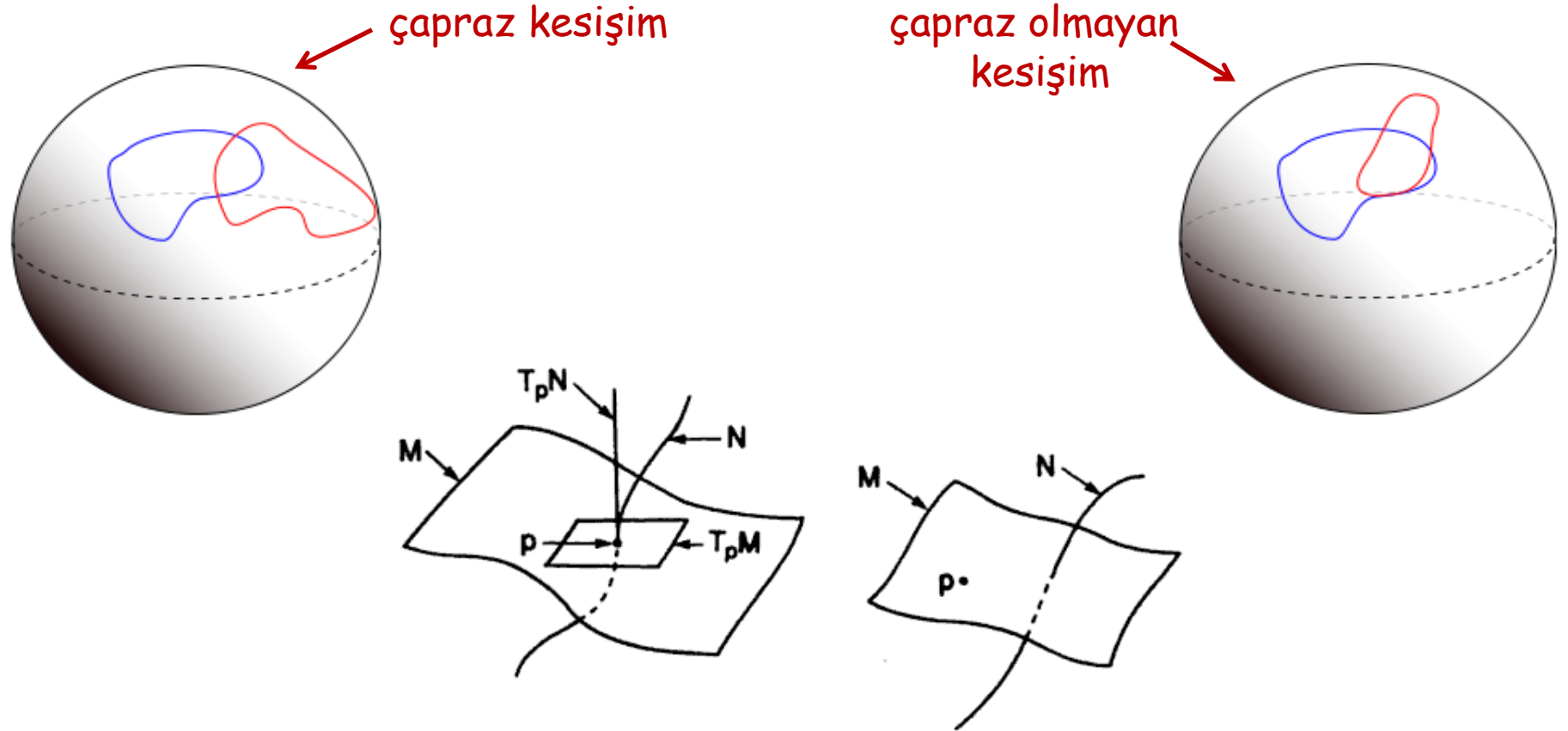
$$\frac{\partial^i f(x, \alpha)}{\partial^i \alpha}$$

Dejenere olmama koşulu

$$\frac{\partial^i f(x, 0)}{\partial^i x}$$

Gerekli Bilgi (çapraz kesişim-transversal intersection)

İki düzgün manifold $M, N \in R^n$ 'un her hangi bir kesişim noktasında, bu manifoldlardan en az birine tanjant n tane lineer bağımsız vektör var ise Bu iki manifold “transversal kesiyor” denir.



<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/54/Sphere-nontransverse.svg>

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e6/Sphere-transverse.svg>

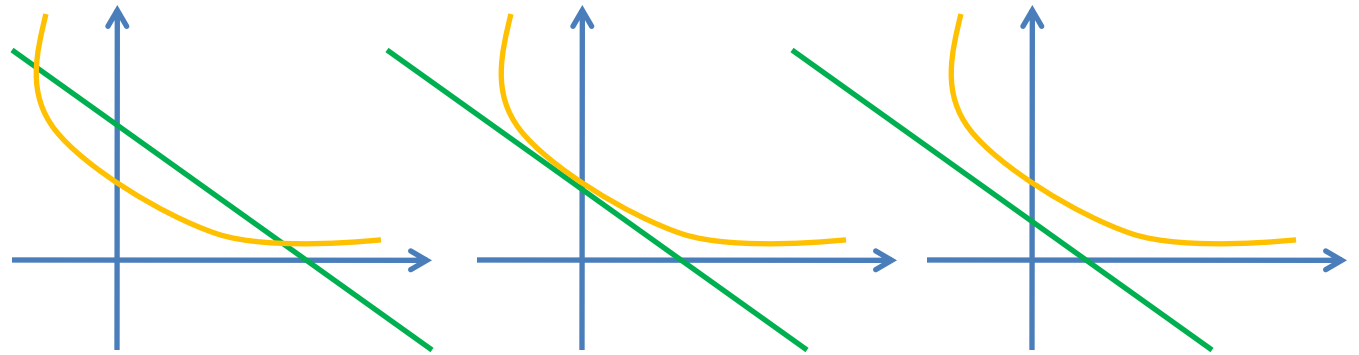
S. Wiggins, "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, 1999

Bir örnek

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

$$0 = r - x^* - e^{-x^*}$$

$$x^* - r = -e^{-x^*}$$



$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

$$\dot{x} = r - x \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

$$\dot{x} = r - 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$



Node



Saddle



Saddle-node



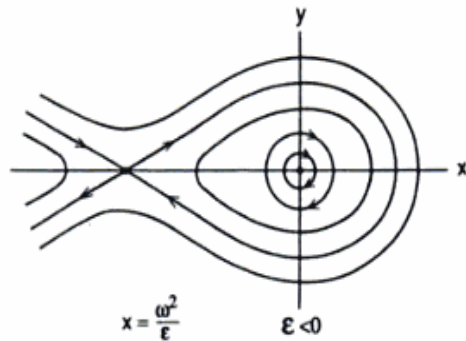
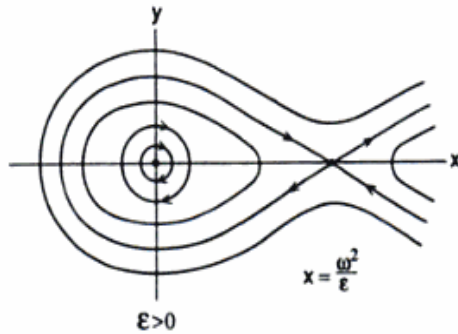
No Equilibria

→ Daha önce görmüştük

Düğüm-Eyer
Dallanması

Durum portresi küçük düzensizlikler (perturbation) altında değişmeyen dinamik sistemlerin özellikleri neler?

Önce küçük düzensizlikler



$$\dot{x} = y$$

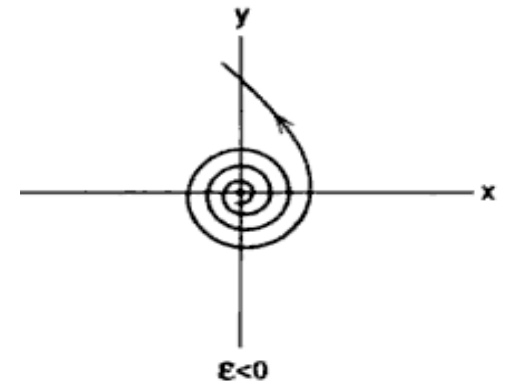
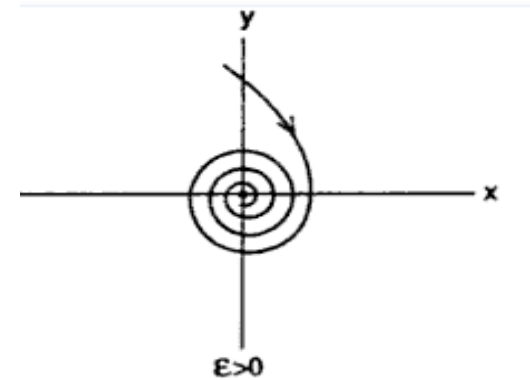
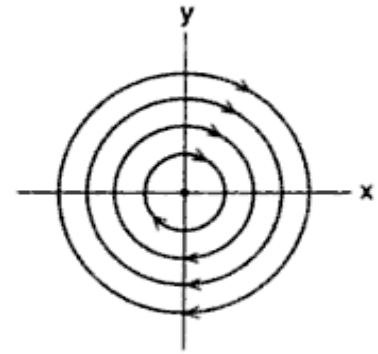
$$\dot{y} = -\omega_o^2 x$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\omega_o^2 x - \epsilon y$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\omega_o^2 x - \epsilon x \cos t$$



Topolojik Eşdeğerlilik:

$$D_\varphi = \{T, R^n, \varphi^t\}$$

$$D_\psi = \{T, R^n, \psi^t\}$$

$h: R^n \rightarrow R^n$ h homeomorfizm

Zamanla değişimin yönünü koruyarak

D_φ ve D_ψ topolojik eşdeğerdir

$$\Leftrightarrow Or_{D_\varphi}(x_0) = h(Or_{D_\psi}(y_0))$$

Dallanma: Bir parametrenin değişimi ile topolojik olarak eşdeğer olmayan durum portresinin oluşumuna “dallanma” denir.

Teorem: (Implicit function)

$$f: R^{n+m} \rightarrow R^m, \quad f \in C^\infty$$

$(x, y) \in R^{n+m}$ ' de bir noktayı $(a, b) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ ile belirtelim

$\Rightarrow f(a, b) = c \in R^m$ $f_y|_{(a, b)}$ matrisi tersinir ise a 'yı içeren bir açık küme

U ve b 'yi içeren bir açık küme V olmak üzere $g: U \rightarrow V$, $g \in C^1$ vardır, öyle ki: $\{(x, g(x))\} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \cap (U \times V)$

$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f \in C^\infty, \quad f(x^*) = 0 \longrightarrow$ Hiperbolik denge noktası

* $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in R^n, \quad g \in C^\infty,$

$$F(x_\varepsilon^*(\varepsilon), \varepsilon) \triangleq f(x_\varepsilon^*(\varepsilon)) + \varepsilon g(x_\varepsilon^*(\varepsilon)) = 0, \quad x_\varepsilon^*(0) = x^*$$

$$F_x|_{(x^*, 0)} = f_x|_{x^*} \longrightarrow x_\varepsilon^*(\varepsilon) \text{ Hiperbolik denge noktası}$$

ve * sistemleri denge noktası civarında topolojik eşdeğer

Hiperbolik denge noktası küçük düzensizlikler altında topolojik olarak değişiklik göstermiyor

Epsilon yakın dinamik sistemler: $\longrightarrow C^1$ yakın

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad \dot{x} = g(x), \quad x \in R^n, \quad g, f \in C^\infty$$

$$d_1 = \sup_{x \in U} \left\{ \|f(x) - g(x)\| + \left\| \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} \right\| \right\}, \quad U \subset R^n$$

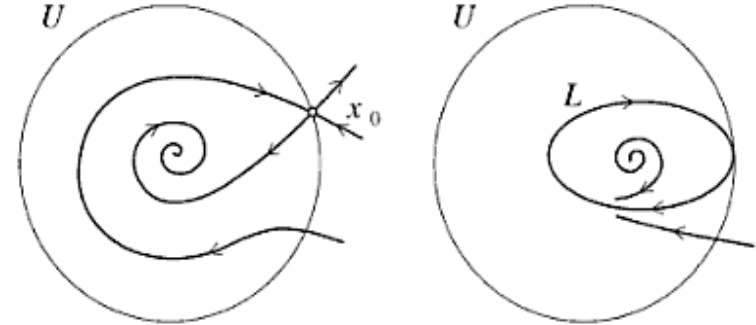
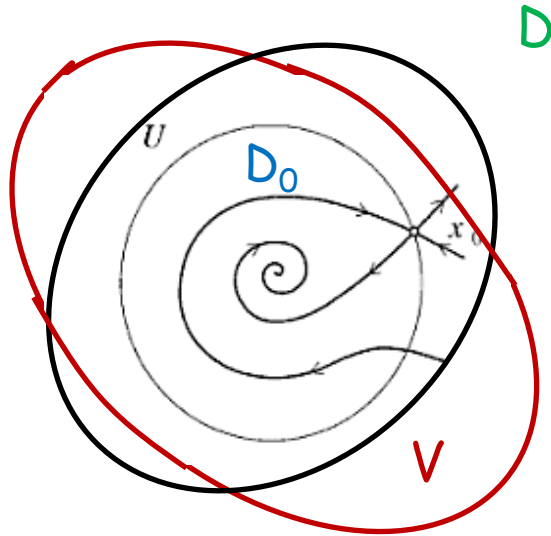
$d_1 < \varepsilon$ ise f ve g sistemleri epsilon yakındır

$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f \in C^\infty$

* $\dot{x} = g(x), \quad x \in R^n, \quad g \in C^\infty$

Kesin yapısal kararlı sistemler:

- # sistemine U bölgesinde C^1 yakın olan bir * sistemi U bölgesinde
 # sistemine topolojik eşdeğer ise # sistemi * sistemine U bölgesi
 içinde *kesin yapısal kararlıdır*.



Yapısal kararlı sistemler:

U ve V bölgeleri belirlenebiliyorsa
 # sistemi $D_0 \subset R^n$ 'de yapısal kararlıdır

Yapısal kararlılık için bir tanım daha

Definition 12.1.1 (Structural Stability) *Consider a map $f \in \text{Diff}^r(M, M)$ (resp. a $\mathbf{C}^r$ vector field in $\mathbf{C}^r(M, M)$); then f is said to be structurally stable if there exists a neighborhood $\mathcal{N}$ of f in the $\mathbf{C}^k$ topology such that f is $\mathbf{C}^0$ conjugate (resp. $\mathbf{C}^0$ equivalent) to every map (resp. vector field) in $\mathcal{N}$.*

Now that we have defined structural stability, it would be nice if we could determine the characteristics of a specific system which result in that system being structurally stable. From the point of view of the applied scientist, this would be useful, since one might presume that a dynamical system used to model phenomena occurring in nature should possess the property of structural stability. Unfortunately, such a characterization does not exist, although some partial results are known, which we will describe shortly. One approach to the characterization of structural stability has been through the identification of typical or generic properties of dynamical systems, and we now discuss this idea.

Theorem 12.1.4 (Peixoto's Theorem) *A C^r vector field on a compact boundaryless two-dimensional manifold M is structurally stable if and only if*

- i) the number of fixed points and periodic orbits is finite and each is hyperbolic;*
- ii) there are no orbits connecting saddle points;*
- iii) the nonwandering set consists of fixed points and periodic orbits.*

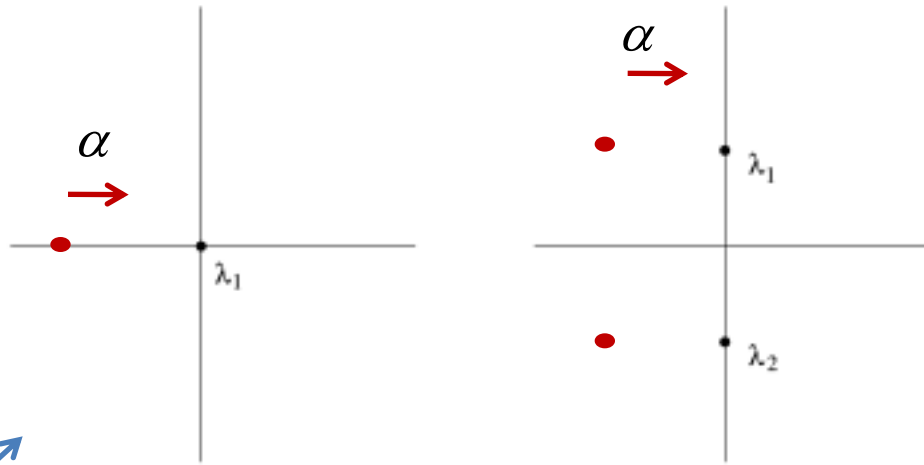
Moreover, if M is orientable, then the set of such vector fields is open and dense in $C^r(M, M)$ (note: this is stronger than generic).

Genericity and structural stability as defined above have been guiding forces behind much of the development of dynamical systems theory. The approach often taken has been to postulate some “reasonable” form of dynamics for a certain class of dynamical systems and then to prove that this form of dynamics is structurally stable and/or generic within this class. If one is persistent with this approach one is occasionally successful and eventually a significant catalogue of generic and structurally stable dynamical properties is obtained. This catalogue is useful to the applied scientist in that it gives some idea of what dynamics to expect in a specific dynamical system. However, this is hardly adequate. Given a specific dynamical system, is it structurally stable and/or generic?

We would like to give computable conditions under which a specific dynamical system is structurally stable and/or generic. For certain special types of motions such as periodic orbits and fixed points, this can be done in terms of the eigenvalues of the linearized system. However, for more general, global motions such as homoclinic orbits and quasiperiodic orbits, this cannot be done so easily, since the nearby orbit structure may be exceedingly complicated and defy any local description. What this boils down to is that to determine whether or not a specific dynamical system is structurally stable, one needs a fairly complete understanding of its orbit structure, or

to put it more cynically, one needs to know the answer before asking the question. It might therefore seem that these ideas are of little use to the applied scientist; however, this is not exactly true, since the theorems describing structural stability and generic properties do give one a good idea of what to *expect*, although they cannot tell what is precisely happening in a specific system. Also, the reader should always ask him or herself whether or not the dynamics are stable and/or typical in some sense. Probably the best way of mathematically quantifying these two notions for the applied scientist has yet to be determined.

Bir parametreye bağılı yerel dallanmalar için basit koşullar



Dallanmanın eşboyutu=1

Düğüm-Eyer
Katlanma
Limit nokta

Hopf
Andronov-Hopf