

Düğüm-Eyer dallanması için ele alınan ön-örneğe yüksek mertebeden terimler eklense davranışı yapısal olarak değişir mi? Hatırlatma

Bu soru neden önemli

Lemma $\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3)$ sistemi $\dot{x} = \alpha + x^2$ sistemine orijin civarında topolojik olarak eşdeğerdir.

Topolojik Eşdeğerlik:

$$D_\varphi = \{T, R^n, \varphi^t\}$$

$$D_\psi = \{T, R^n, \psi^t\}$$

$$h: R^n \rightarrow R^n \quad h \text{ homeomorfizm}$$

Zamanla değişimin yönünü koruyarak

D_φ ve D_ψ topolojik eşdeğerdir

$$\Leftrightarrow Or_{D_\varphi}(x_0) = h(Or_{D_\psi}(y_0))$$

Tanıt iki aşamalı (1) Denge noktalarının analizi yapılıyor

Kapalı fonksiyon (Implicit Function) teoreminden yararlanılarak denge noktalarını içeren manifoldun yerel olarak dallanma parametresini durum değişkenine bağlı olacak şekilde ifade edilebildiği gösterilip, her iki sistem için denge noktalarının birbirlerine yakın olduğu gösterilir.

Teorem: (Implicit function)

Hatırlatma

$$f : R^{n+m} \rightarrow R^m, \quad f \in C^\infty$$

$(x, y) \in R^{n+m}$ 'de bir noktayı $(a, b) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ ile belirtelim
 $\Rightarrow f(a, b) = c \in R^m$ $f_y|_{(a,b)}$ matrisi tersinir ise a 'yı içeren bir açık küme

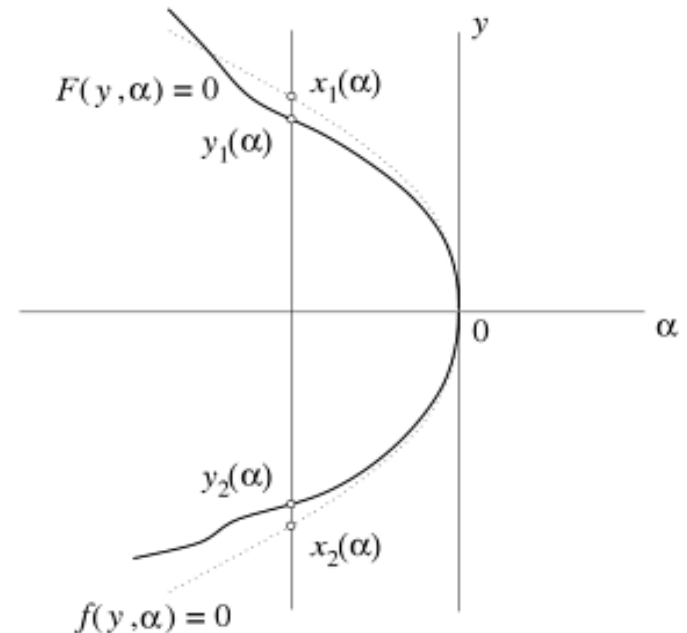
U ve b 'yi içeren bir açık küme V olmak üzere $g : U \rightarrow V$, $g \in C^1$ vardır,
öyle ki: $\{(x, g(x))\} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \cap (U \times V)$

(2) Homeomorfizm $y = h_\alpha(x)$ oluşturuluyor

$$\alpha \geq 0, \quad h_\alpha(x) = x$$

$$\alpha < 0, \quad h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x$$

Nasıl belirlenecek?



Düğüm-Eyer dallanması için ele alınan ön-örneğe yüksek mertebeden terimler eklense de topolojik eşdeğerliğin korunduğu görüldü.

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \alpha \in R$$

$f(x, \alpha)$ sisteminin $\alpha = 0$ parametre değeri için $x = 0$ 'da denge noktası olsun ve bu denge noktası civarında $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ olsun.

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3)$$

Bu koşul neye karşı geliyor?

Nasıl yazıldı?

$$f_0(0) = f(0, 0) = 0 \quad f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$$

Nasıl ?

$$f(x^*, \alpha_d) = 0 \longrightarrow \text{denge noktası} \checkmark$$

$$f_x(x^*, \alpha_d) = 0 \longrightarrow \text{Hiperbolik değil} \checkmark$$

$$f_{xx}(x^*, \alpha_d) \neq 0 \longrightarrow \text{Dallanma noktasında kuadratik terimler içermekte}$$

$$f_\alpha(x^*, \alpha_d) \neq 0 \longrightarrow \text{Çaprazlık koşulu}$$

Teorem

Kuznetsov'04 (84)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R \quad *$$

$$f \in C^\infty, \quad f(0,0) = 0, \quad \lambda \hat{=} f_x(0,0) = 0$$

$$(1) \quad f_{xx}(0,0) \neq 0$$

$$(2) \quad f_\alpha(0,0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ * Sistemini $\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$ dönüştüren tersinir koordinat ve parametre dönüşümleri vardır.

Tanıt * Sisteminin verilen koşullar altında dönüşümler ile $\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$ sistemine dönüştüğünü gösterilecek. $\leftarrow$ Neden yararlanabiliriz?

Hatırlatma $f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3)$

$$f_0(0) = f(0,0) = 0 \quad f_1(0) = f_x(0,0) = 0$$

denge noktası

Hiperbolik değil

Koordinat-ötelemesi: $\xi \hat{=} x + \delta \Rightarrow x = \xi - \delta$

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + O((\xi - \delta)^3)$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 \\ &\quad + O(\xi^3 - 3\xi^2\delta + 3\xi\delta^2 - \delta^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 \\ &\quad + O(\xi^3) + O(\delta)\xi^2 + O(\delta^2)\xi + O(\delta^3)\end{aligned}$$

$$\dot{\xi} = [f_0(\alpha) + f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)]$$

$$+ [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi$$

$$+ [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2$$

$$+ O(\xi^3)$$

← Bu terimin yok olması
için koşul yazılabilir.

Hipotezden $f_{xx}(0,0) \neq 0 \Rightarrow f_2(0) \neq 0$

$$F(\alpha, \delta) \hat{=} f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2) = 0$$

Teorem: (Implicit function)

Hatırlatma

$$f : R^{n+m} \rightarrow R^m, \quad f \in C^\infty$$

$(x, y) \in R^{n+m}$ 'de bir noktayı $(a, b) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ ile belirtelim
 $\Rightarrow f(a, b) = c \in R^m$ $f_y|_{(a,b)}$ matrisi tersinir ise a 'yı içeren bir açık küme

U ve b 'yi içeren bir açık küme V olmak üzere $g : U \rightarrow V$, $g \in C^1$ vardır,
öyle ki: $\{(x, g(x))\} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\} \cap (U \times V)$

$$F(\alpha, \delta) \hat{=} f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha) \Rightarrow F(0,0) = 0$$

Hipotezden $f_1(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$

$$F_\delta(0,0) = -2f_2(0) \neq 0$$

Hipotezden $f_2(\alpha)|_{\alpha=0} \neq 0$

$$F_\alpha(0,0) = f_1'(0)$$

Kapalı fonksiyon teoreminden yerel olarak $\delta = \delta(\alpha)$ fonksiyonu var ve tektir,
ve $\delta(0) = 0, F(\alpha, \delta(\alpha)) \equiv 0$
 $\Rightarrow \delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2)$ Nasıl?

$$\begin{aligned}\dot{\xi} = & [f_0(\alpha) + f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\ & + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\ & + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 \\ & + O(\xi^3)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{\xi} = & [f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)] \\ & + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 \\ & + O(\xi^3)\end{aligned}$$

Yeni bir parametre tanımlama:

$$\dot{\xi} = \underbrace{[f_0'(0) + O(\alpha^2)]}_{\mu} + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3)$$

$$\mu \hat{=} \mu(\alpha) = f_0'(0)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha)$$



$$\mu(0) = 0$$

$$\mu'(0) = f_0'(0) = f_\alpha(0,0)$$

Hipotezden $f_\alpha(0,0) \neq 0$

Ters fonksiyon teoreminden $\alpha = \alpha(\mu), \alpha(0) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hipotezden } f_\alpha(0,0) \neq 0 \\ \text{Ters fonksiyon teoreminden } \alpha = \alpha(\mu), \alpha(0) = 0 \end{array} \right\} \dot{\xi} = \mu + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3)$$

Ölçekleme: $\eta \hat{=} |b(\mu)|\xi, \beta \hat{=} |b(\mu)|\mu$

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$$



Lemma $\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3)$ sistemi $\dot{x} = \alpha + x^2$ sistemine orijin civarında topolojik olarak eşdeğerdir.

Teorem $\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R \quad *$

$$f \in C^\infty, \quad f(0,0) = 0, \quad \lambda \triangleq f_x(0,0) = 0$$

$$(1) \quad f_{xx}(0,0) \neq 0$$

$$(2) \quad f_\alpha(0,0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ * Sistemini $\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$ dönüştüren tersinir koordinat ve parametre dönüşümleri vardır.



$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R$$

$$f \in C^\infty, \quad f(0,0) = 0, \quad \lambda \triangleq f_x(0,0) = 0$$

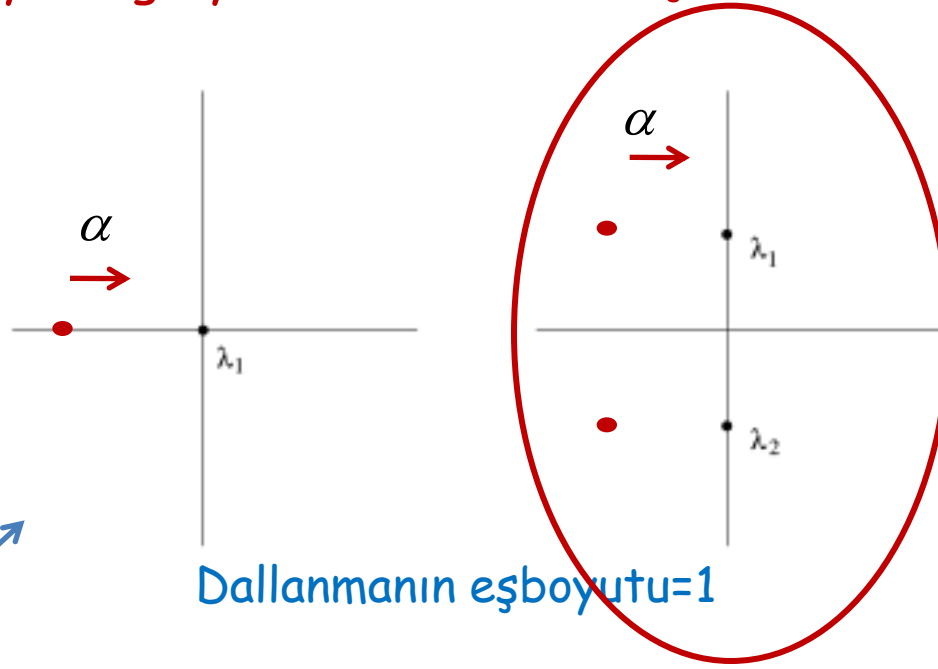
$$(1) \quad f_{xx}(0,0) \neq 0$$

$$(2) \quad f_\alpha(0,0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ * Sistemi orijin civarında $\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2$ sistemine topolojik olarak eşdeğerdir.

Bir parametreye bağılı yerel dallanmalar için basit koşullar

Hatırlatma



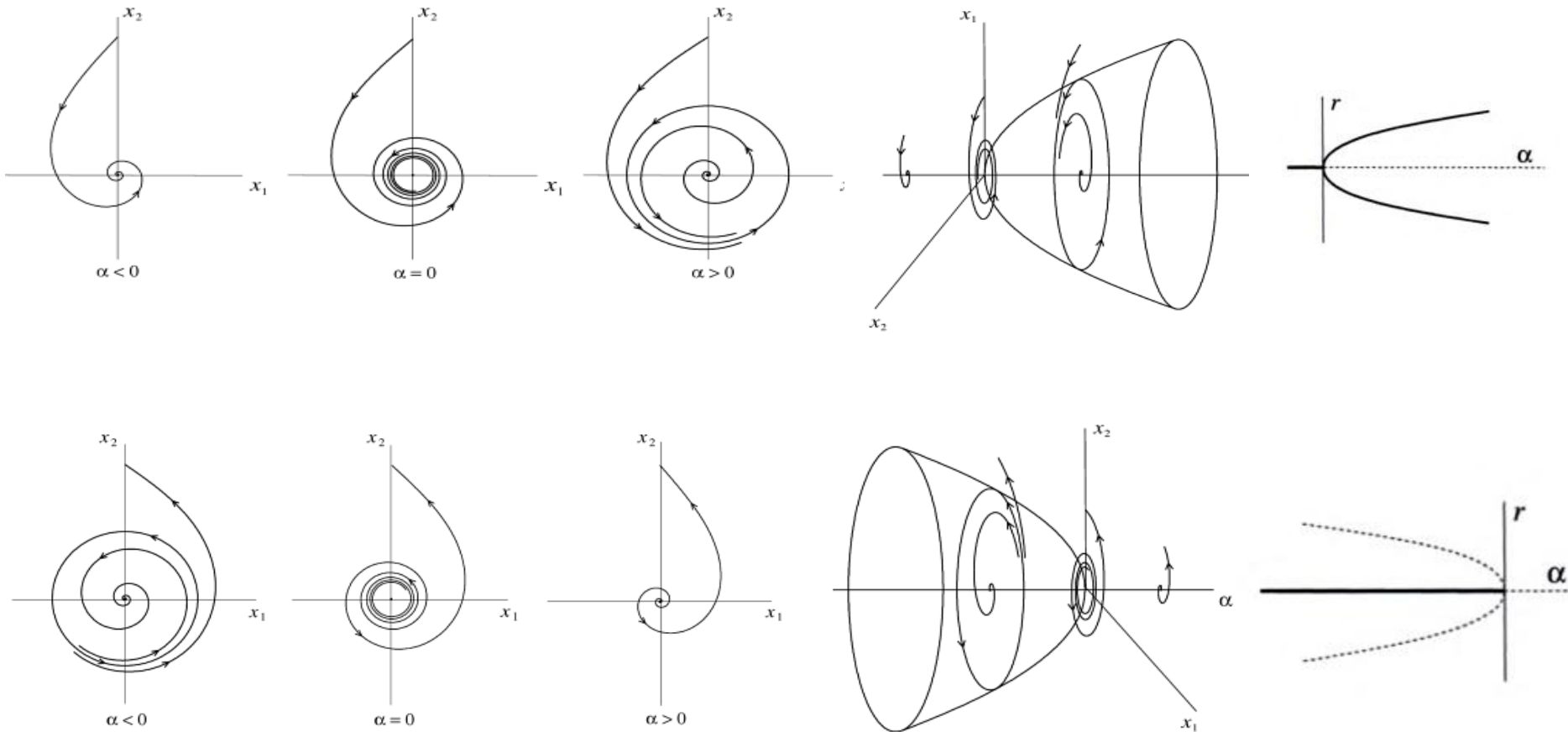
Dallanmanın eşboyutu=1

Düğüm-Eyer
Katlanma
Limit nokta

Hopf
Andronov-Hopf

Hopf Dallanması

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} z &\hat{=} x_1 + ix_2 \\ &\Rightarrow \\ z &\hat{=} \rho e^{j\varphi} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$



Hopf Dallanması

Teorem

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad *$$

$f \in C^\infty$ yeterince küçük tüm $|\alpha|$ 'lar için $x = 0$ 'da $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ özdeğerleri $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ olan denge noktası olsun.

(1) $l_1(0) \neq 0$ l_1 birinci Lyapunov katsayısı

(2) $\mu'(0) \neq 0$

$\Rightarrow$ * Sistemini
$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + O(\|y\|^4) \quad **$$

dönüştüren tersinir koordinat, parametre ve zamanı ölçekleyen dönüşümler vardır.

Lemma

$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$ sistemi orijin civarında (**) sistemine topolojik olarak eşdeğerdir.

$\dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$

Bazı diğer yerel dallanmalar için koşullar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R^n$$

Uç Dallanması: x^* denge noktasının α_d parametre değerinde bir uç dallanma noktası olması için sağlaması gereken koşullar aşağıdakilerdir:

$$f(x^*, \alpha_d) = 0 \longrightarrow \text{denge noktası}$$

$$f_x(x^*, \alpha_d) = 0 \longrightarrow \text{Hiperbolik değil}$$

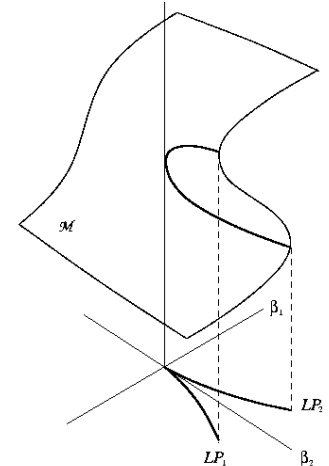
$$f_{xx}(x^*, \alpha_d) = 0, \quad f_{xxx}(x^*, \alpha_d) \neq 0 \longrightarrow \text{Dallanma noktasında kuadratik terimler içermemekte ancak kübik terimler içermekte}$$

$$f_\alpha(x^*, \alpha_d) = \alpha \quad f_{x\alpha}(x^*, \alpha_d) = \beta \longrightarrow \text{Çaprazlık koşulu}$$

ile tanımlanan α ve β lineer bağımsız

Uç Dallanması için örnek:

$$\dot{x} = \alpha + \beta x + \chi x^3$$



$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R^n$$

Diren Dallanması: $x^* = 0$ denge noktasının α_d parametre değerinde bir uç dallanma noktası olması için sağlaması gereken koşullar aşağıdakilerdir:

$$f(x^*, \alpha_d) = 0 \quad \longrightarrow \text{denge noktası}$$

$$f_x(x^*, \alpha_d) = 0 \quad \longrightarrow \text{Hiperbolik değil}$$

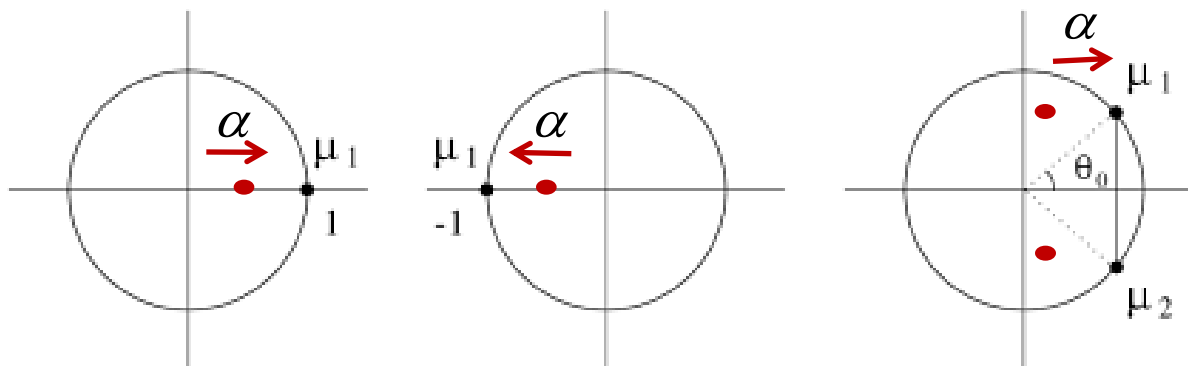
$$f_{xxx}(x^*, \alpha_d) \neq 0 \quad \longrightarrow \text{Dallanma noktasında kuadratik terimler içermemekte ancak kübik terimler içermekte}$$

$$f_{x\alpha}(x^*, \alpha_d) \neq 0 \quad \longrightarrow \text{Çaprazlık koşulu}$$

Diren Dallanması için örnek:

$$\dot{x} = \beta x + \chi x^3$$

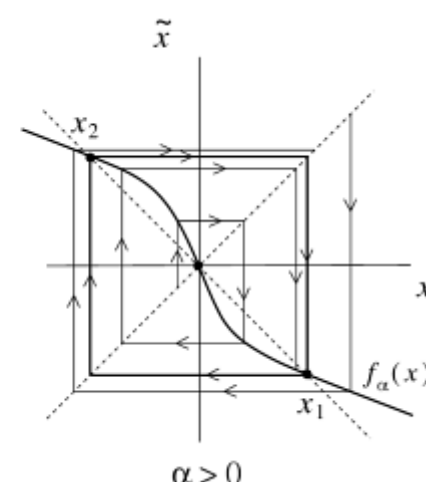
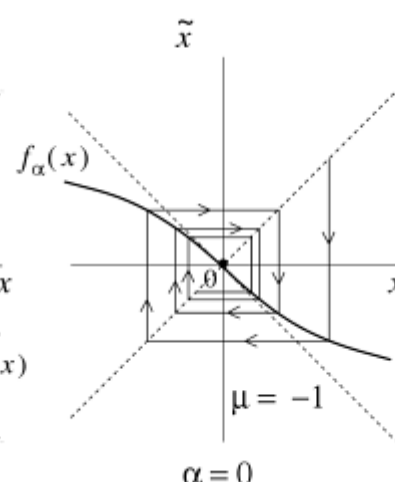
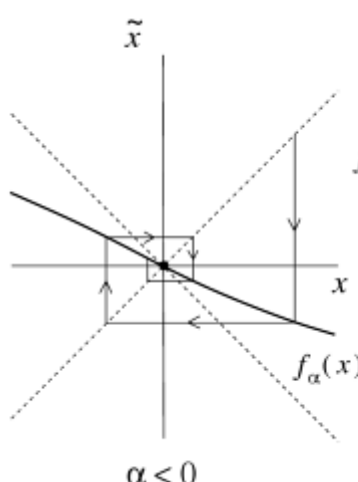
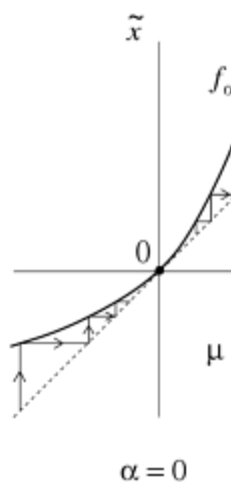
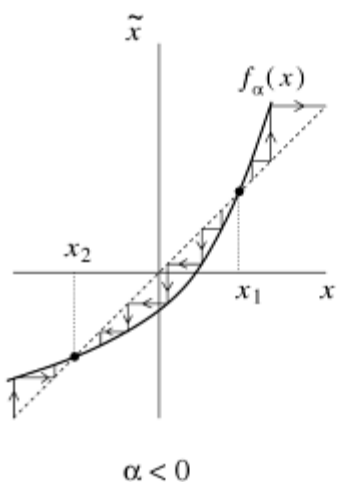
Ayrık zamanda bir parametreye bağlı yerel dallanmalar için basit koşullar



$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R$$

Katlanma Dallanması :

$$x \rightarrow \alpha + x + x^2$$



Çevirme Dallanması :

$$x \rightarrow -(1 + \alpha)x + x^3$$

Teorem

Kuznetsov'04 (123)

$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R \quad *$$

$$f \in C^\infty, \quad f(0,0) = 0, \quad \mu \hat{=} f_x(0,0) = 1$$

$$(1) \quad f_{xx}(0,0) \neq 0$$

$$(2) \quad f_\alpha(0,0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ * Sistemini $\eta \rightarrow \beta + \eta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$ dönüştüren tersinir koordinat ve parametre dönüşümleri vardır.

Teorem

Kuznetsov'04 (127)

$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x \in R, \quad \alpha \in R \quad *$$

$$f \in C^\infty, \quad f(0,0) = 0, \quad \mu \hat{=} f_x(0,0) = -1$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} (f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{3} f_{xxx}(0,0) \neq 0$$

$$(2) \quad f_{x\alpha}(0,0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ * Sistemini $\eta \rightarrow -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$ dönüştüren tersinir koordinat ve parametre dönüşümleri vardır.

Hiperbolik olmazsa ne yapabiliriz?

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

x^* hiperbolik olmayan denge noktası olsun

$f_x(x^*)$ 'in özdeğerlerinden reel kısımları sol kompleks düzlemde olanlara ilişkin özvektörlerin $v_1, v_2, \dots, v_{n_-}$ oluşturduğu genelleştirilmiş özuzay $T^s = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{n_-}\}$ "kararlı altuzay",

$f_x(x^*)$ 'in özdeğerlerinden reel kısımları sağ kompleks düzlemde olanlara ilişkin özvektörlerin $v_{n_+}, v_{n_+}, \dots, v_{n_+}$ oluşturduğu genelleştirilmiş özuzay $T^u = \text{span}\{v_{n_+}, v_{n_+}, \dots, v_{n_+}\}$ "kararsız altuzay",

$f_x(x^*)$ 'in özdeğerlerinden reel kısımları sıfır olanlara ilişkin özvektörlerin $v_{n_+}, v_{n_+}, \dots, v_{n_0}$ oluşturduğu genelleştirilmiş özuzay $T^c = \text{span}\{v_{n_+}, v_{n_+}, \dots, v_{n_0}\}$ "merkez altuzay" ise

$$\mathbb{R}^n = T^s \oplus T^u \oplus T^c$$

$$\mathbb{R}^n = T^h \oplus T^c$$

 Neyi temsil ediyor?

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \quad *$$

$$x \rightarrow f(x), \quad x \in R^n \quad \times$$

Teorem 11: (Merkez Manifold)

$$H : T^c \rightarrow T^h, \quad H(0) = 0, \quad H_x(0) = 0$$

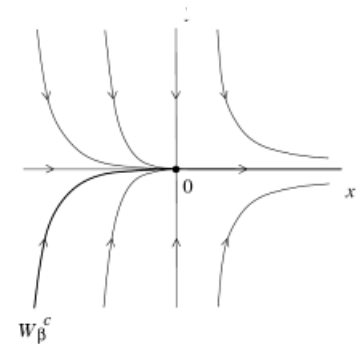
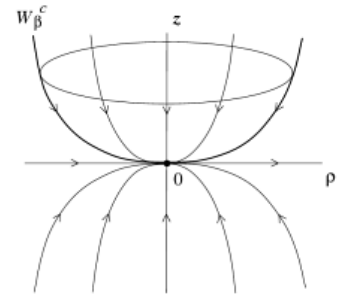
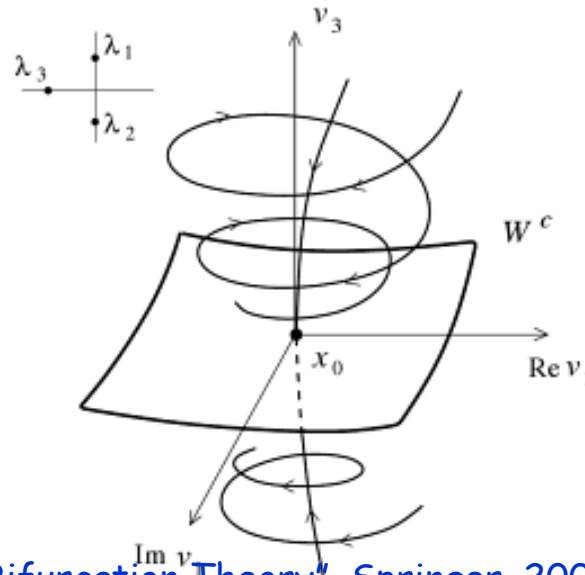
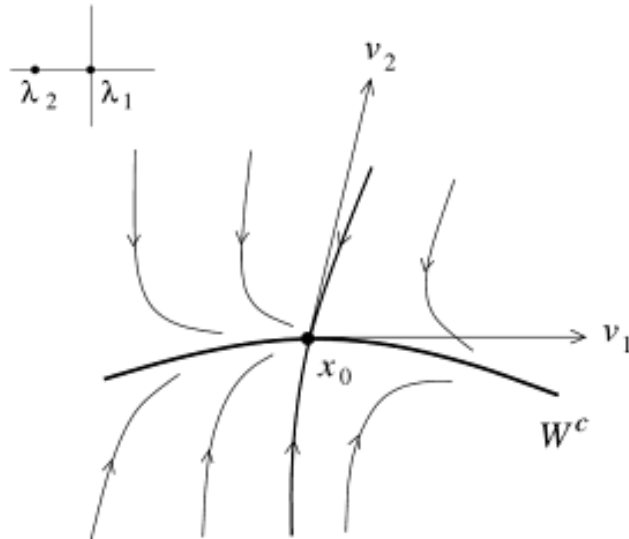
R^n 'de $x = 0$ 'in bir komşuluğu U olsun,

$M = \{x + H(x) \mid x \in T^c\}$ manifoldu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa

“merkez manifold”dur

(değişmezlik) M, U 'nun komşuluğunda $*$ veya $\times$ için yerel olarak değişmez kümedir.

(çekicilik) $T^u = \{0\}$ ise M yerel olarak çekici bir kümedir.



Kaos'a varmanın yolları

Düzen

Nasıl?

Kaos

Umulmadık yapısal değişiklikler ile

← Bu nasıl oluşabilir?

Ardışıl bir dizi dallanma ile, periyod katlanmasına yol açan dallanmalar ile durum uzayındaki davranış değişmeye başlayıp durum uzayında kalıcı çözüm tuhaf çekiciye dönüşebilir.

Bir örnek: Lorenz Sistemi

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

$$x^* = 0,$$

$$y^* = 0, \quad \forall \rho \in R$$

$$z^* = 0,$$

Denge noktaları

$$x^* = \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)},$$

$$y^* = \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \quad \rho > 1$$

$$z^* = \rho - 1,$$

Hangi dallanma?

Lineerleştirilim: $x^* = 0, y^* = 0, z^* = 0,$

Özdeğerler

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

$$\dot{y} = \rho x - y$$

$$\dot{z} = -\beta z$$

$$\lambda_1 = -\beta$$

Ne zaman kararlı, ne zaman kararsız ?

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}$$

Lineerleştirilim: $x^* = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, y^* = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, z^* = \rho - 1$

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x$$

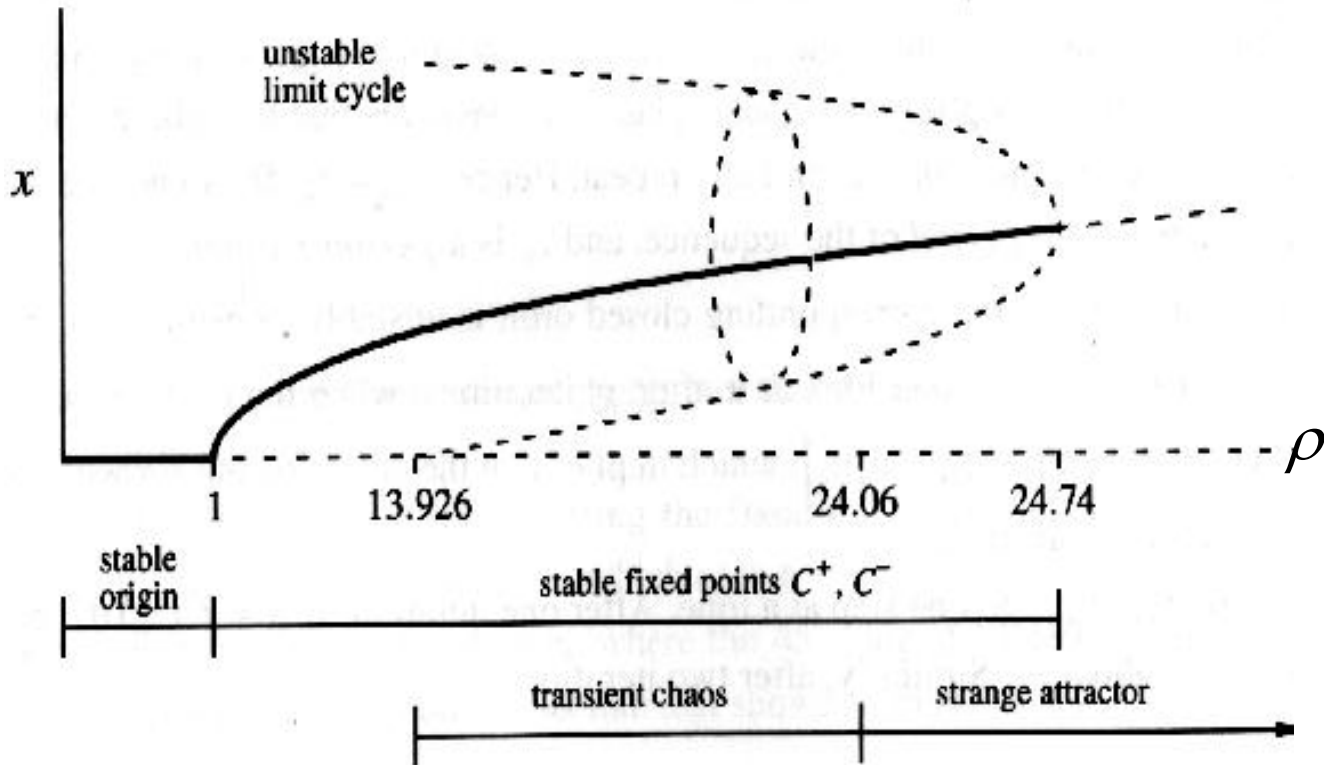
$$\dot{y} = x - y \mp \sqrt{\beta(\rho - 1)}z$$

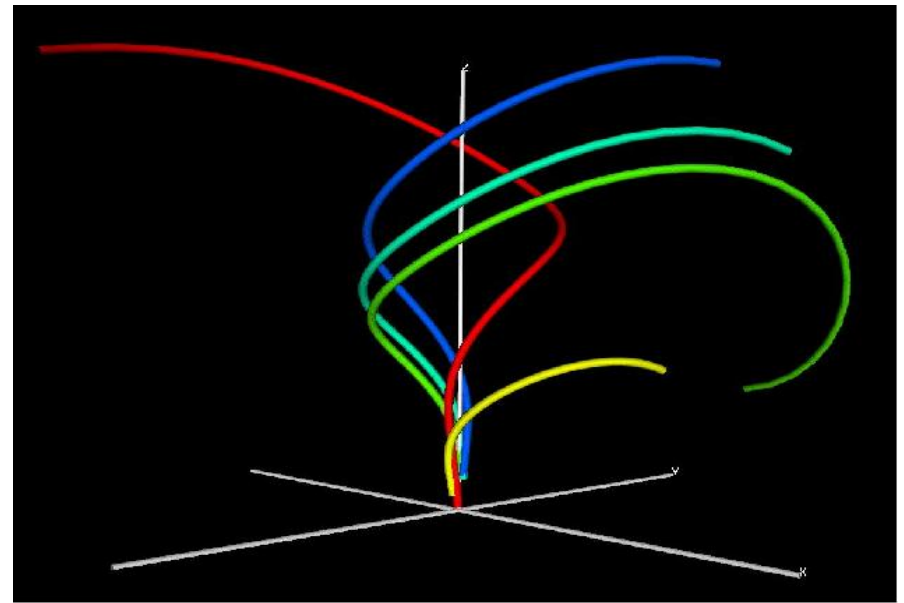
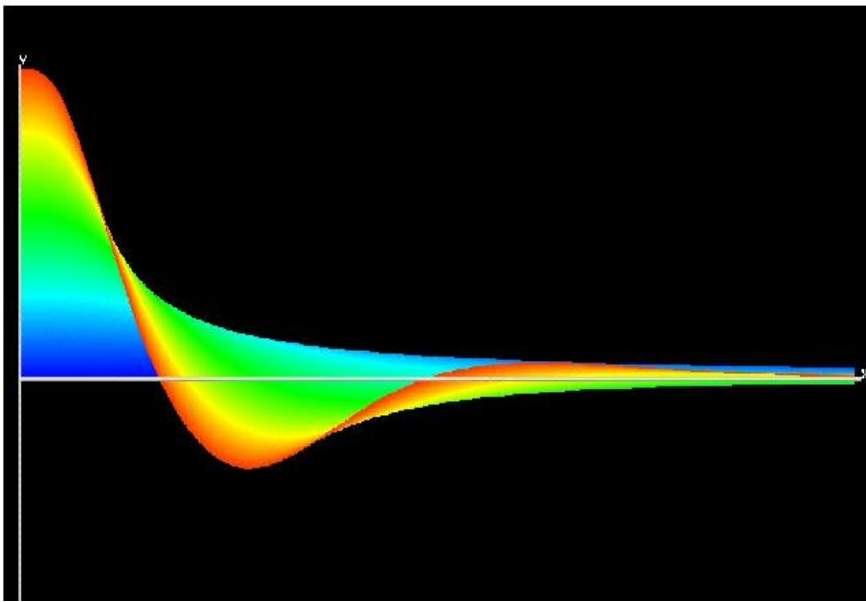
$$\dot{z} = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}(x + y) - \beta z$$

Özdeğerler $\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0$

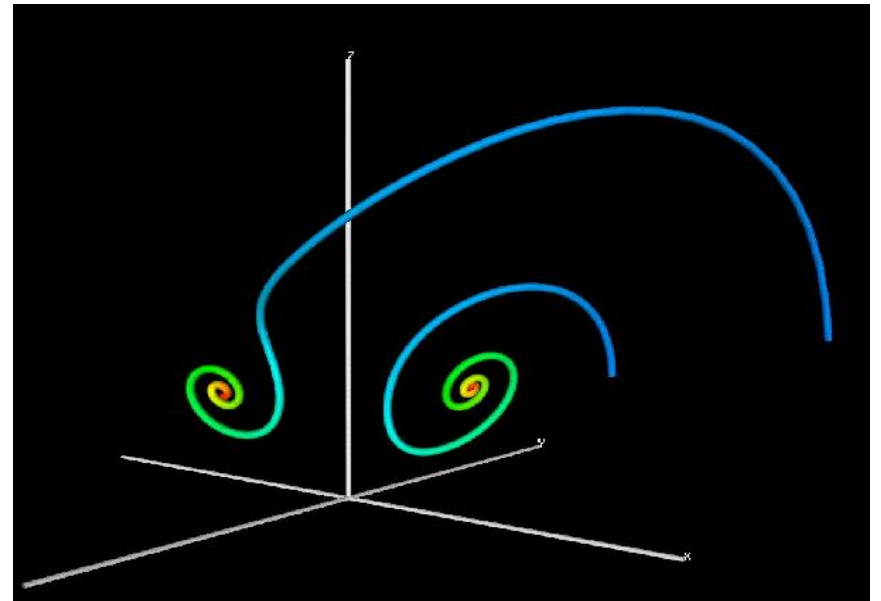
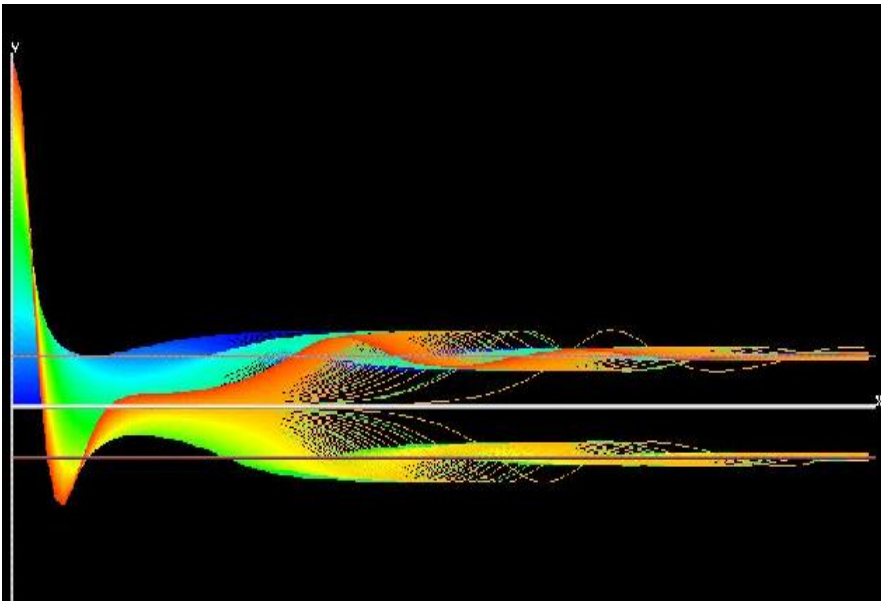
$$\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0$$

Denge noktalarının var olması için $\rho > 1$ olmalı $\longrightarrow f(\lambda) > 0, \forall \lambda \geq 0$

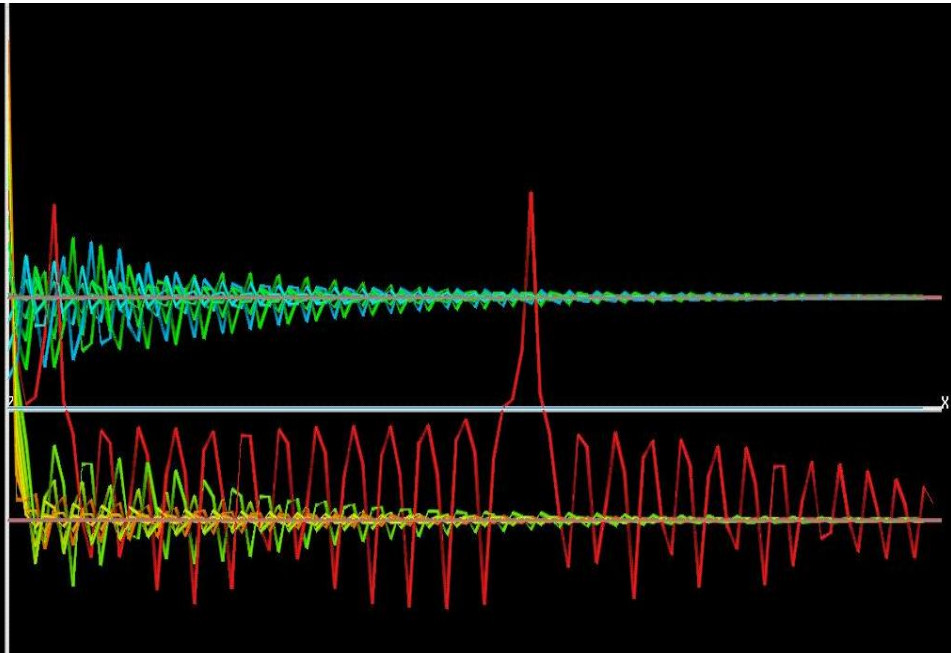




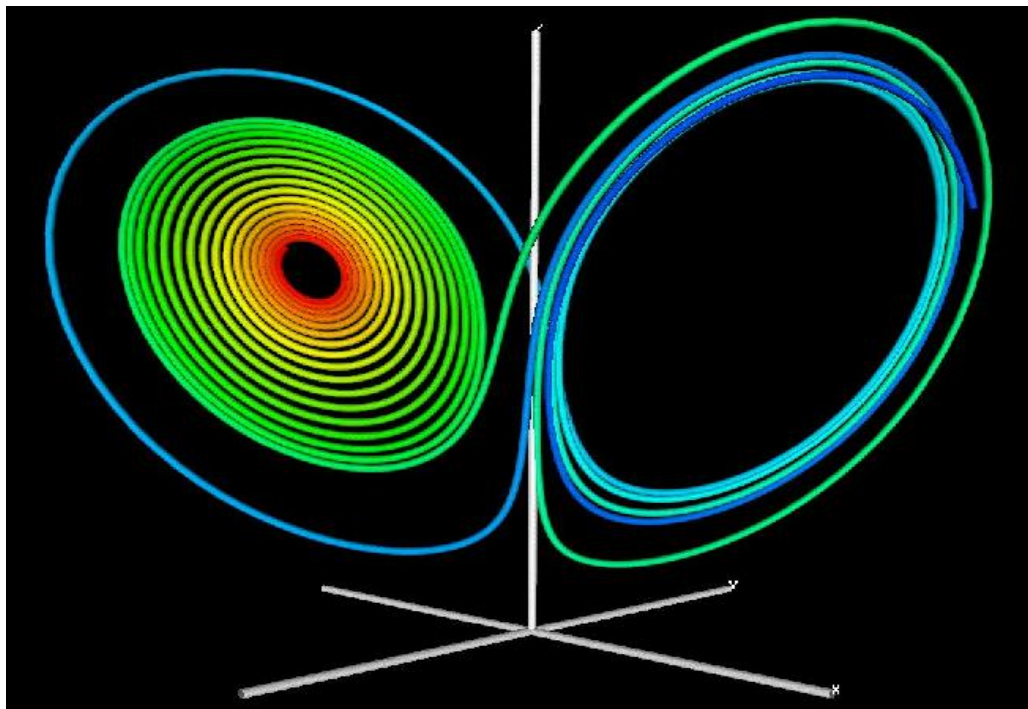
$\rho = 0.5$

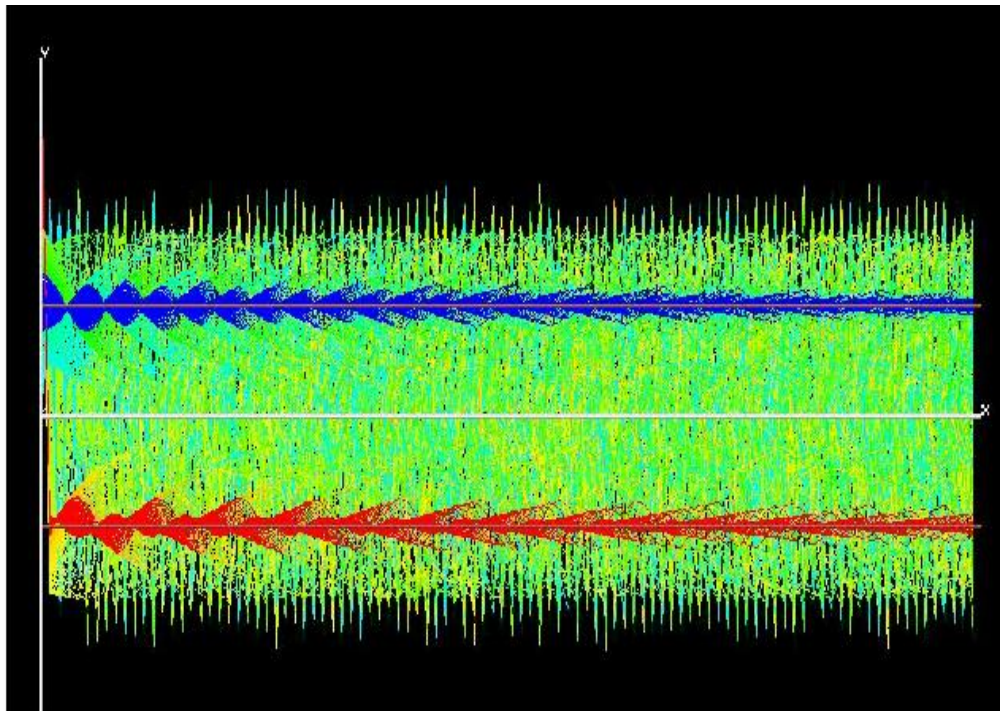


$\rho = 6$



$$\rho = 19$$





$$\rho = 24.1$$

