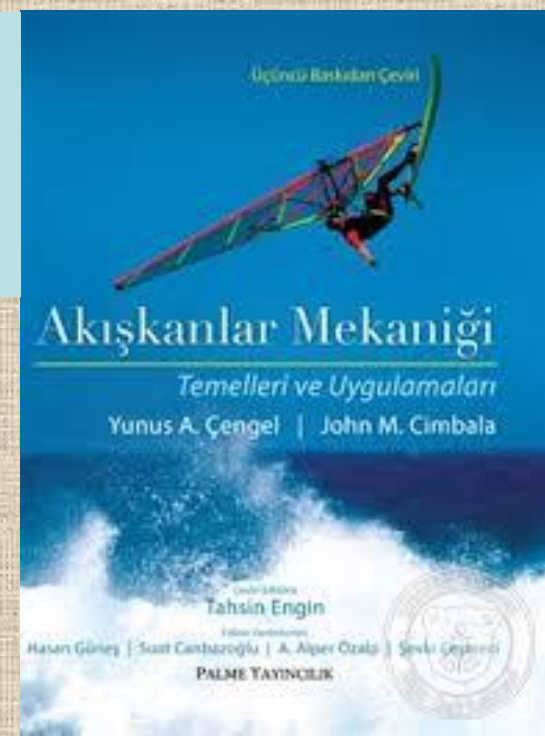


Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları

3'üncü Baskıdan Çeviri

Yunus A. Cengel, John M. Cimbala

McGraw-Hill, 2014



Bölüm 9

DİFERANSİYEL AKIŞ

ANALİZİ

İngilizce orijinal sunum esas alınarak

Tahsin Engin, Hasan Güneş, A. Alper Özalp ve Suat Canbazoğlu
tarafından hazırlanmıştır.



Bu bölümde akışkan hareketine ait temel diferansiyel denklemler türetilecek ve bazı basit akışlar için bu denklemlerin nasıl çözüleceği gösterilecektir. Şekilde gösterilen hortum tarafından oluşturulan hava akışı gibi karmaşık akışların analitik çözümleri yoktur.

Öğrenim Amaçları

- Kütlenin ve momentumun korunumuna ait diferansiyel denklemlerin nasıl türetildiğini ve kullanıldığını kavrayabilmelidir
- Akım fonksiyonunu ve basınç alanını hesaplayabilmeli ve verilen bir hız alanı için akım çizgilerini çizebilmelidir
- Basit akış alanları için hareket denklemlerinin analitik çözümlerini yapabilmelidir

9-1 ■ GİRİŞ

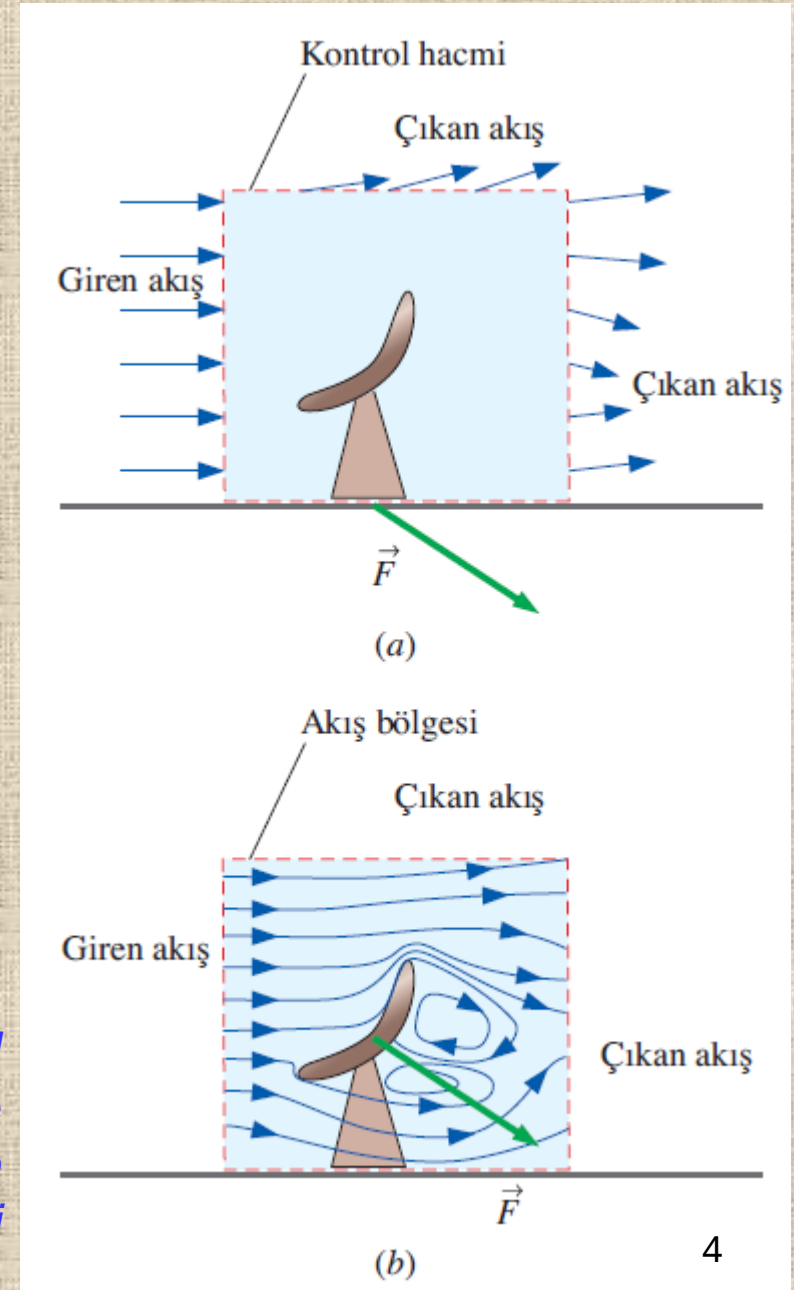
Kontrol hacmi tekniği, kontrol hacmine giren ve kontrol hacminden çıkan kütledebiler veya cisimler üzerine uygulanan kuvvetler gibi bir akışın genel özellikleriyle ilgilendiğimizde yararlıdır.

Diferansiyel analiz, akışkan hareketinin diferansiyel denklemlerinin **akış bölgesi** olarak adlandırılan bir bölge boyunca akış alanındaki *her bir noktaya uygulanmasını gerektirir*.

Değişkenlerin **sınır şartları** da, girişleri, çıkışları ve katı çeperleri de içine alacak şekilde **akış bölgesinin tüm sınırlarında belirtilmelidir**.

Eğer akış daimi değilse, akış alanı zamanla değiştiği için zaman boyunca çözümü ilerletmek gereklidir.

(a) Kontrol hacmi analizinde kontrol hacminin içi bir “kara kutu” gibi ele alınır, ancak (b) diferansiyel analizde akışın tüm detayları akış bölgesindeki her noktada çözülür.



9-2 ■ KÜTLENİN KORUNUMU – SÜREKLİLİK DENKLEMİ

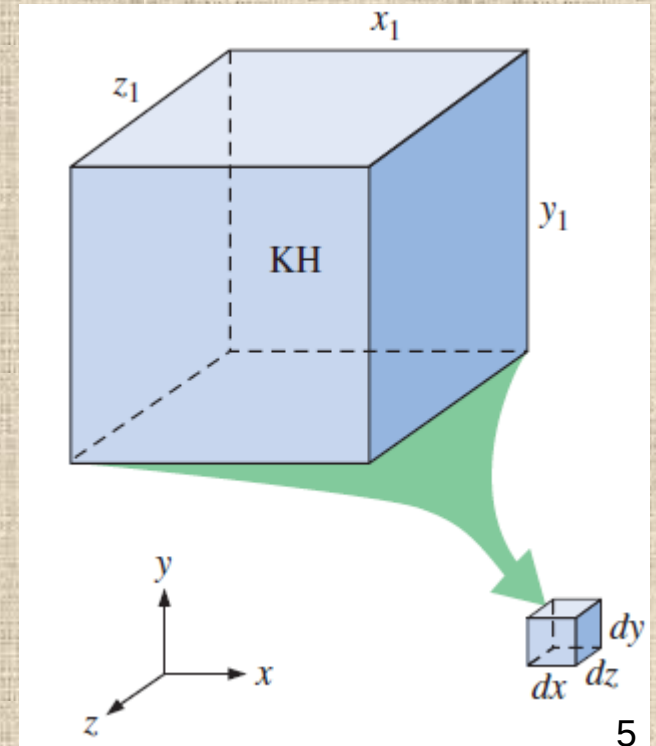
Bir KH için kütlenin korunumu:

$$0 = \int_{KH} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{KY} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$$\int_{KH} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{\text{giriş}} \dot{m} - \sum_{\text{çıkış}} \dot{m}$$

Kontrol hacmi içerisindeki kütlenin birim zamandaki net değişimi, kontrol hacmine giren ve kontrol hacminden çıkan kütleli debilerin farkına eşittir.

Bir diferansiyel korunum denklemi türetilirken kontrol hacmi, sonsuz küçük bir hacim olarak düşünülür.



Diverjans Teoremini Kullanarak Türetme

Kütlenin korunumunun diferansiyel biçimini türetmenin en hızlı ve anlaşılması en kolay yolu **diverjans teoremini** uygulamaktır. (**Gauss teoremi**).

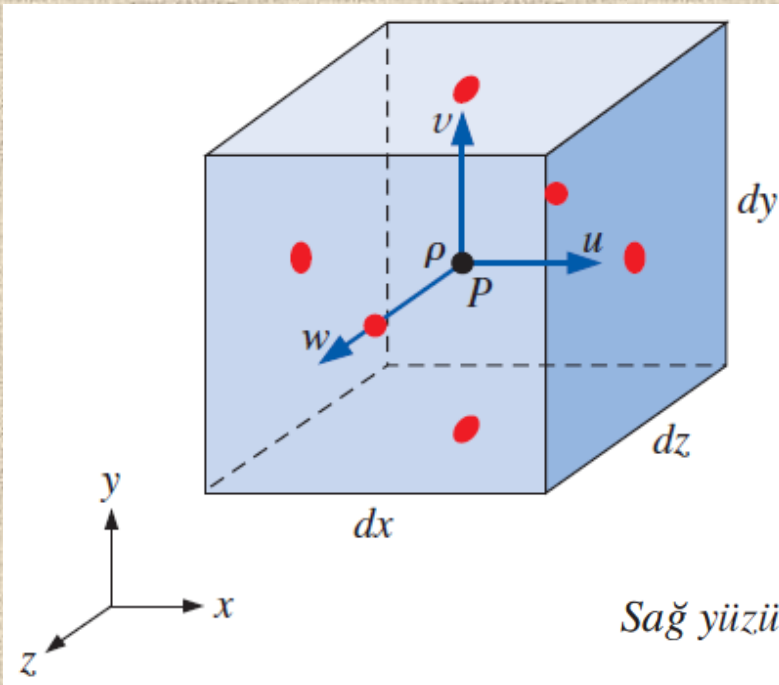
Diverjans teoremi:
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA$$

$$0 = \int_{KH} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{KH} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dV$$

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0$$

Süreklilik denklemi:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Sıkıştırılamaz akış kabulü yapmadığımız için süreklilik denkleminin sıkıştırılabilir akış için geçerli olduğu genel bir halidir ve akış alanındaki her noktada geçerlidir.



Kartezyen koordinatlarda kütlenin korunumuna ait diferansiyel denklemin türetilmesinde merkezi P noktası olan küçük bir kutu şeklindeki kontrol hacmi kullanılır. Kırmızı noktalar her bir yüzün merkezini göstermektedir.

Sonsuz Küçük Kontrol Hacmi Kullanarak Türetme

Kutu merkezinden uzak noktalar için kutu merkezi (P noktası) civarındaki **Taylor serisi açılımını** kullanalım.

$$(\rho u)_{\text{sağ yüz merkezi}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \dots$$

Sağ yüzün merkezi:

$$(\rho u)_{\text{sağ yüzün merkezi}} \cong \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Sol yüzün merkezi:

$$(\rho u)_{\text{sol yüzün merkezi}} \cong \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Ön yüzün merkezi:

$$(\rho w)_{\text{ön yüzün merkezi}} \cong \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

Arka yüzün merkezi:

$$(\rho w)_{\text{arka yüzün merkezi}} \cong \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

Üst yüzün merkezi:

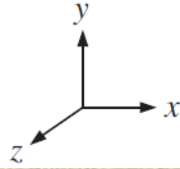
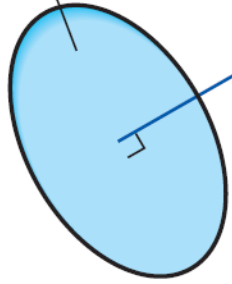
$$(\rho v)_{\text{üst yüzün merkezi}} \cong \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

Alt yüzün merkezi:

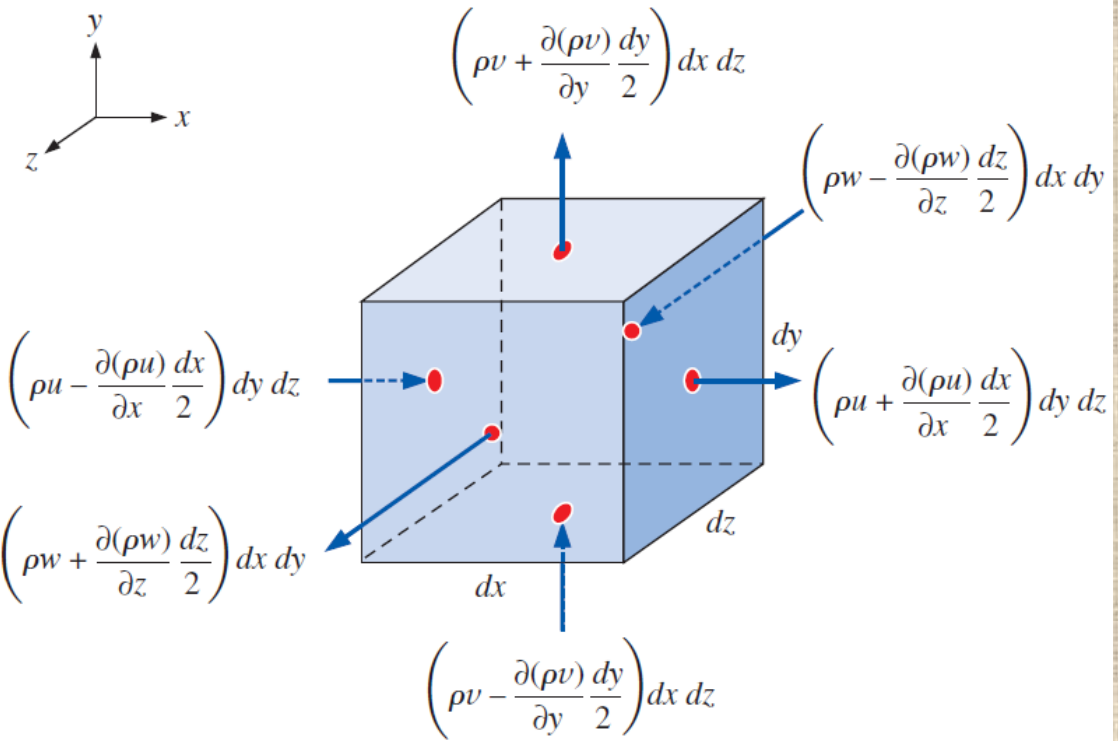
$$(\rho v)_{\text{alt yüzün merkezi}} \cong \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$A = \text{yüzey alanı}$

$V_n = \text{ortalama dik hız bileşeni}$



Bir yüzeyden geçen debi $\rho V_n A$ 'ya eşittir.



KH içindeki kütlenin değişim hızı:

$$\int_{KH} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \cong \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Diferansiyel kontrol hacminin her bir yüzünden kütle girişi ve çıkışı.

Kırmızı noktalar her bir yüzün merkezini göstermektedir.

KH'ye giren net kütleli debi:

$$\sum_{\text{giriş}} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz}_{\text{sol yüz}} + \underbrace{\left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz}_{\text{alt yüz}} + \underbrace{\left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy}_{\text{arka yüz}}$$

KH'den çıkan net kütleli debi:

$$\sum_{\text{çıkan}} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u + \frac{(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz}_{\text{sağ yüz}} + \underbrace{\left(\rho v + \frac{(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz}_{\text{üst yüz}} + \underbrace{\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy}_{\text{ön yüz}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

Kartezyen koordinatlarda süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Diverjans İşlemi

Kartezyen koordinatlar:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w)$$

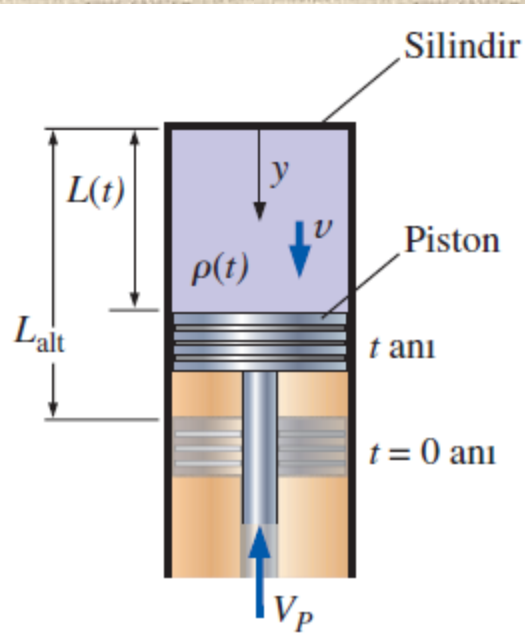
Silindirik koordinatlar:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}$$

Kartezyen ve silindirik koordinatlarda diverjans işlemi

ÖRNEK 9-1 Hava-Yakıt Karışımının Sıkıştırılması

İçten yanmalı bir motorun silindirinde hava-yakıt karışımı bir piston ile sıkıştırılmaktadır (Şekil 9-7). y -koordinatının başlangıcı şekilde gösterildiği gibi silindirin tavanında ve yönü aşağı doğrudur. Pistonun yukarıya doğru sabit bir V_P hızıyla çıktığı varsayılmaktadır. Silindirin tavanı ile piston kafası arasındaki L mesafesi $L = L_{alt} - V_P t$ ilişkisi uyarınca zamanla azalmakta olup burada L_{alt} , Şekil 9-7'de gösterildiği gibi $t = 0$ anında piston alt ölü nokta-dayken pistonun konumunu göstermektedir. $t = 0$ anında hava-yakıt karışımının yoğunluğunun silindir içerisinde her yerde aynı ve $\rho(0)$ olduğu bilindiğine göre, pistonun yukarı çıkışı sırasında hava-yakıt karışımının yoğunluğunu zamanın ve verilen parametrelerin fonksiyonu olarak elde ediniz.



İçten yanmalı bir motorun silindirinde yakıt ve havanın pistonla sıkıştırılması

Analiz Öncelikle v hız bileşeni için y ve t 'ye bağlı bir ifade kurmamız gerekir. Açıkça görülmektedir ki $y = 0$ 'da (silindir tavanında) $v = 0$ ve $y = L$ 'de $V = -V_P$ 'dir. Basitlik için v 'nin bu iki sınır şartı arasında lineer olarak değiştiğini varsayalım:

Düşey hız bileşeni:
$$v = -V_P \frac{y}{L} \quad (1)$$

Burada L , zamanın bir fonksiyonudur. Kartezyen koordinatlardaki sıkıştırılabilir süreklilik denklemi (Denklem 9-8) bu problemin çözümü için uygundur.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}}_{0, u=0 \text{ olduğundan}} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{0, w=0 \text{ olduğundan}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Kabul 1 dikkate alındığında, yoğunluk ρ 'nin fonksiyonu olmadığından türevin dışına alınabilir. v yerine Denklem 1 ve L yerine de verilen ifade yazılıp, türev alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial y} = -\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(-V_P \frac{y}{L} \right) = \rho \frac{V_P}{L} = \rho \frac{V_P}{L_{alt} - V_P t} \quad (2)$$

elde edilir. Yine Kabul 1'den $\partial \rho / \partial t$ terimi $d\rho / dt$ terimi ile yer değiştirilir. Böylece değişkenleri taraf tarafa ayırarak integrali alınabilecek bir ifade elde ederiz:

$$\int_{\rho=\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{t=0}^t \frac{V_P}{L_{alt} - V_P t} dt \quad \rightarrow \quad \ln \frac{\rho}{\rho(0)} = \ln \frac{L_{alt}}{L_{alt} - V_P t} \quad (3)$$

Buradan ρ için istenen ifade zamanın bir fonksiyonu olarak bulunur:

$$\rho = \rho(0) \frac{L_{\text{alt}}}{L_{\text{alt}} - V_P t} \quad (4)$$

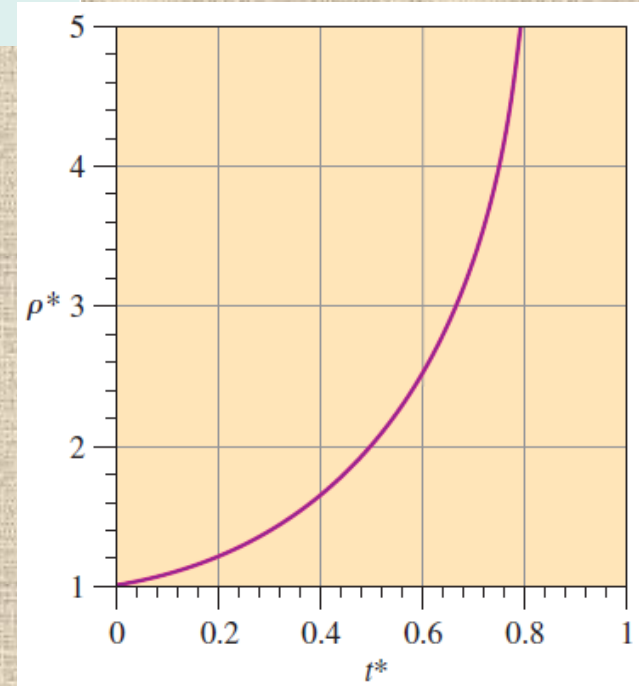
Boyutsuz gösterimi ile Denklem 4

$$\frac{\rho}{\rho(0)} = \frac{1}{1 - V_P t / L_{\text{alt}}} \rightarrow \rho^* = \frac{1}{1 - t^*} \quad (5)$$

şeklinde tekrar düzenlenebilir. Burada $\rho^* = \rho/\rho(0)$ ve $t^* = V_P t / L_{\text{alt}}$ 'dir. Denklem 5 Şekil 9–8'de çizilmiştir.

İrdeleme $t^* = 1$ 'de piston silindir tavanına çarpar ve ρ sonsuza gider. Gerçek bir içten yanmalı motorda piston, silindir tavanına ulaşmadan önce durarak *ölü hacim* olarak bilinen ve genellikle maksimum silindir hacminin %4–12'sine karşılık gelen bir hacim oluşturur. Silindir hacmi içerisinde yoğunluğun üniform kabul edilmesi, bu basitleştirilmiş analizin en zayıf halkasıdır. Gerçekte ρ hem konumun hem de zamanın fonksiyonu olarak değişebilir.

Örnek 9-1 için
boyutsuz
yoğunluğun
boyutsuz zaman
ile değişimi

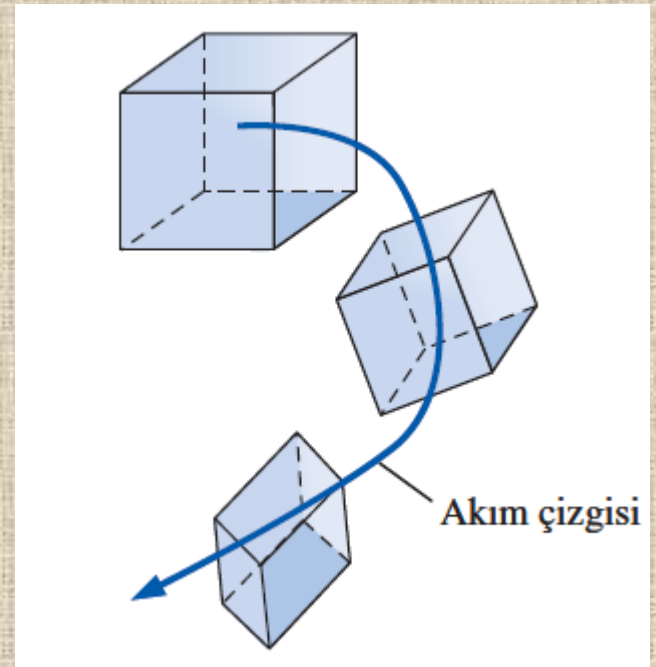


Süreklilik Denkleminin Alternatif Biçimi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho}_{\rho \text{ 'nun maddesel türevi}} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

Süreklilik denkleminin alternatif biçimi:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$



Bir maddesel eleman akış alanında hareket ederken yoğunluğu Denklem 9-10 uyarınca değişir.

Denklem 9–10, akış alanı boyunca bir akışkan elemanını izlerken (buna **maddesel eleman** denir) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ değeri değiştiğinde, bu akışkan elemanının yoğunluğunun değiştiğini göstermektedir (Şekil 9–9). Diğer yandan eleman hareket ettikçe maddesel elemanın yoğunluğundaki değişimler $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ 'deki hız gradyanları yanında ihmal edilebilecek kadar küçük kalıyorsa, bu durumda $\rho^{-1} D\rho/Dt \cong 0$ 'dır ve akış **sıkıştırılamaz** olarak düşünülür.

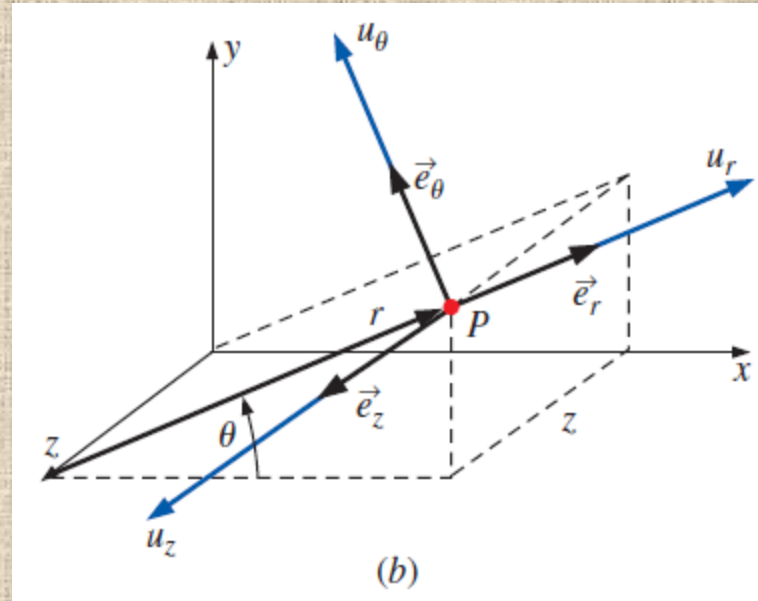
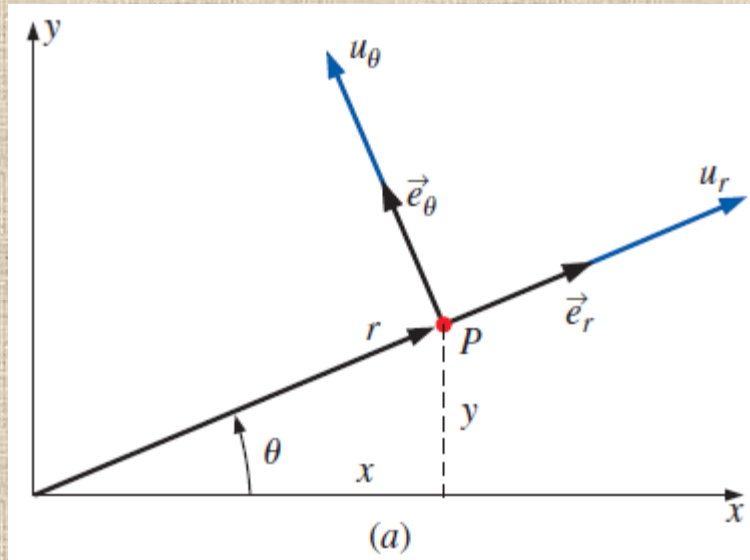
Silindirik Koordinatlarda Süreklilik Denklemi

Koordinat dönüşümleri:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Silindirik koordinatlarda süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0$$



Silindirik koordinatlarda hız bileşenleri ve birim vektörler: (a) xy - veya $r\theta$ - düzleminde iki boyutlu akış, (b) üç-boyutlu akış.

Süreklilik Denkleminin Özel Durumları

Özel durum 1: Daimi Sıkıştırılabilir Akış

Daimi süreklilik denklemi:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

(9-13)

Bu denklem kartezyen koordinatlarda,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

silindirik koordinatlarda ise,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Sıkıştırılamaz süreklilik denklemi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

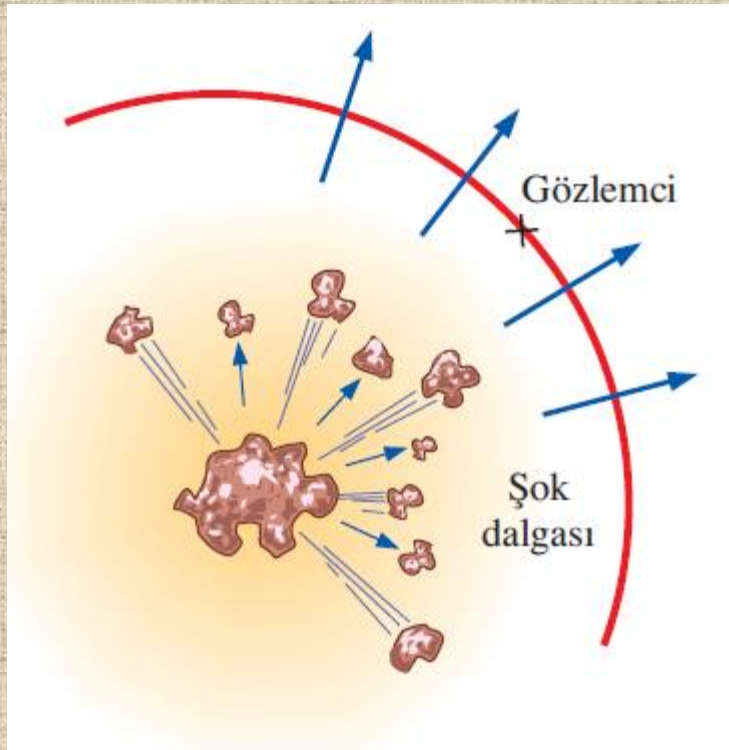
Kartezyen koordinatlarda sıkıştırılamaz süreklilik denklemi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Silindirik koordinatlarda sıkıştırılamaz süreklilik denklemi :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$$

Özel Durum 2: Sıkıştırılamaz Akış



Bir patlamadan sonra oluşan etki, şok dalgası gözlemciye ulaşınca kadar hissedilemez.

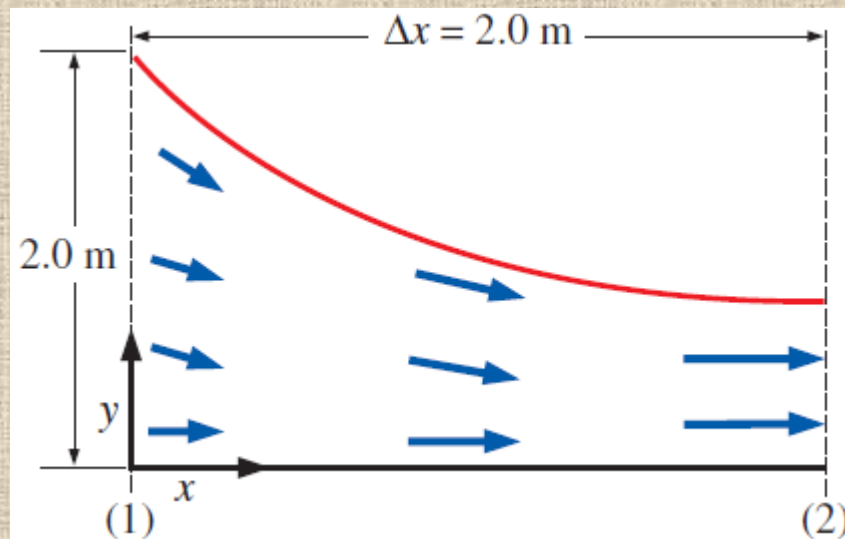
ÖRNEK 9-2

Sıkıştırılabilir Akış İçin Yakınsak Kanal Tasarımı

Yüksek hızlı bir rüzgar tüneli için iki-boyutlu yakınsak bir kanal tasarlanmak isteniyor. Kanalın taban yüzeyi düz ve yatay, üst yüzeyi ise eksenel u rüzgar hızını (1) kesitinde $u_1 = 100$ m/s'den (2) kesitinde $u_2 = 300$ m/s'ye

(Şekil 9-12) lineer olarak arttıracak şekilde eğrisel bir biçimde yapılacaktır. Bu arada (1) kesitindeki $\rho_1 = 1.2$ kg/m³ olan hava yoğunluğu (2) kesitindeki $\rho_2 = 0.85$ kg/m³ değerine kadar yaklaşık olarak lineer şekilde azalacaktır. Yakınsak kanal 2 m boyunda ve (1) kesitinde 2 m yüksekliğindedir. (a) Kanaldaki hızın y -bileşeni $v(x, y)$ 'yi bulunuz. (b) Kanalın yaklaşık şeklini çiziniz. Sürtünmeleri ihmal ediniz. (c) Kanal çıkışındaki (2) kesitinde kanal yüksekliği ne olmalıdır?

Yüksek hızlı bir rüzgar tüneli için tasarlanmış yakınsak kanal (çizim ölçekli değildir)



Özellikler Akışkan oda sıcaklığındaki (25 °C) havadır. Ses hızı yaklaşık 346 m/s olduğundan akış sesaltı ancak sıkıştırılabilir bir akıştır.

Analiz (a) u ve ρ için x 'e göre lineer değişim ifadelerini yazalım:

$$u = u_1 + C_u x \quad \text{burada} \quad C_u = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{(300 - 100) \text{ m/s}}{2.0 \text{ m}} = 100 \text{ s}^{-1} \quad (1)$$

ve

$$\begin{aligned} \rho = \rho_1 + C_\rho x \quad \text{burada} \quad C_\rho &= \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} = \frac{(0.85 - 1.2) \text{ kg/m}^3}{2.0 \text{ m}} \\ &= -0.175 \text{ kg/m}^4 \end{aligned} \quad (2)$$

Verilen iki-boyutlu sıkıştırılabilir akış için daimi akışta süreklilik denklemi (Denklem 9-14) aşağıdaki hale indirgenir:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{0 \text{ (2-B)}} = 0 \rightarrow \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (3)$$

Denklem 1 ve 2, Denklem 3'te yerine yazılır ve C_u ve C_ρ 'nin sabit olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial[(\rho_1 + C_\rho x)(u_1 + C_u x)]}{\partial x} = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho) - 2C_u C_\rho x$$

elde edilir. Bu ifade y 'ye göre integre edilirse aşağıdaki sonuca varılır:

$$\rho v = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy + f(x) \quad (4)$$

Bu bir *kısmi* integral işlemi olduğundan, elde edilen ifadeye basit bir integral sabiti yerine x 'e bağlı rastgele bir fonksiyonun eklendiğine dikkat ediniz. Şimdi sınır şartlarını uygulayalım. Kanalın taban yüzeyinin düz ve yatay olduğu bilindiğine göre v bileşeni, herhangi bir x değeri için $y = 0$ 'da sıfır değerini almalıdır. Bu ise sadece $f(x) = 0$ olduğunda mümkündür. Böylece Denklem 4'ten v 'yi çekersek

$$v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy}{\rho} \rightarrow v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_r)y - 2C_u C_r xy}{\rho_1 + C_r x} \quad (5)$$

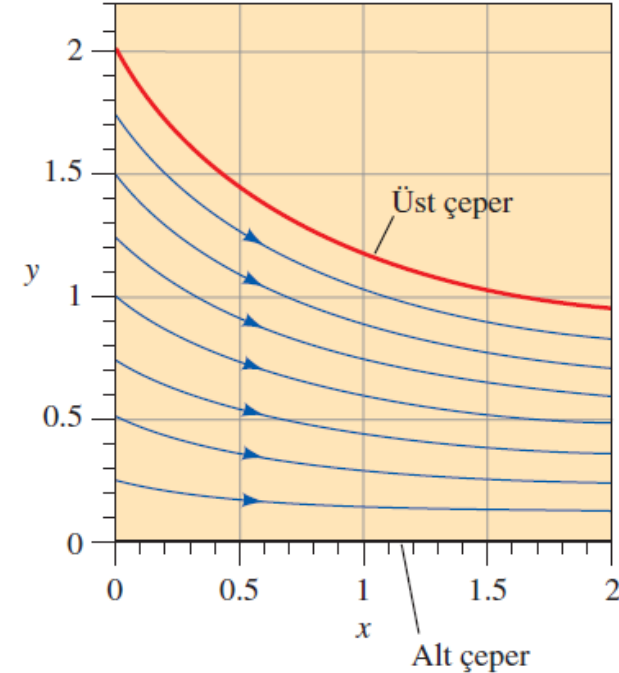
elde edilir.

(b) Denklem 1 ve 5'i kullanarak, Bölüm 4'te tarif edilen teknikle $x = 0$ ile $x = 2.0$ m arasında Şekil 9-13'de gösterilen birkaç akım çizgisi çizilmiştir.

$x = 0$ ve $y = 2.0$ m'den başlayan akım çizgisi, kanalın sahip olması gereken tavan şeklini yaklaşık olarak vermektedir.

(c) (2) kesitinde en üstteki akım çizgisi $x = 2.0$ m'de $y = 0.941$ m'den geçer. Buna göre (2) kesitindeki kanal yüksekliği **0.941 m**'dir.

Örnek 9-2'deki
yakınsak kanala ait
akım çizgileri



ÖRNEK 9-3

İki-boyutlu Daimi Olmayan Akışın Sıkıştırılamaz Oluşu

Örnek 4-5'te $\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + [1.5 + 2.5 \sin(\omega t) - 0.8y]\vec{j}$, ile verilen daimi olmayan, iki-boyutlu hız alanını göz önüne alınız. Burada $\omega = 2\pi$ rad/s (1 Hz'lik fiziksel frekans) olarak açısal frekanstır. Bu akış alanının sıkıştırılamaz olarak ele alınabileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM Verilen bir hız alanının sıkıştırılamaz olduğu gösterilecektir.

Kabuller 1 Akış iki-boyutludur, hızın z-bileşeni yoktur ve u ve v , z ile değişmemektedir.

Analiz x - ve y - yönündeki hız bileşenleri sırasıyla,

$$u = 0.5 + 0.8x \quad \text{ve} \quad v = 1.5 + 2.5 \sin(\omega t) - 0.8y$$

olarak verilmiştir. Eğer akış sıkıştırılamaz ise Denklem 9-16 sağlanmalıdır. Daha açık bir ifadeyle kartezyen koordinatlardaki Denklem 9-17 sağlanmalıdır. Kontrol edelim:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0.8} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-0.8} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0.2-B}_{\text{olduğundan}} = 0 \quad \rightarrow \quad 0.8 - 0.8 = 0$$

Buna göre sıkıştırılamaz süreklilik denklemi herhangi bir anda sağlanmaktadır ve **bu akış alanı sıkıştırılamaz olarak düşünülebilir.**

İrdeleme v ifadesinde daimi olmayan bir terim bulunmasına rağmen bu terimin y 'ye göre türevi sıfırdır ve süreklilik denkleminde bir etkisi olmaz.

ÖRNEK 9-4

Eksik Hız Bileşeninin Bulunması

Daimi, sıkıştırılamaz ve üç-boyutlu bir akış alanı için iki hız bileşeni bilinmektedir: $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ ve $w = axz + byz^2$. Burada a , b ve c sabittir. y hız bileşeni (v) ise bilinmemektedir (Şekil 9-14). v ifadesini x , y ve z 'nin fonksiyonu olarak bulunuz.

Analiz Akış daimi ve sıkıştırılamaz olduğundan ve kartezyen koordinatları kullandığımızdan akış alanına Denklem 9-17 uygulanabilir:

Sıkıştırılamazlık koşulu:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2ax} - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{ax + 2byz} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -3ax - 2byz$$

Şimdi de bu ifadeyi y 'ye göre integre edelim. Bir bir *kısmi* integral işlemi olduğundan, elde edilen ifadeye basit bir integral sabiti yerine, en genel halde x ve z 'ye bağlı keyfi bir fonksiyonun eklenmesi gerekir. Sonuç olarak ifade aşağıdaki gibi olacaktır:

Çözüm:

$$v = -3axy - by^2z + f(x,z)$$

Süreklilik denklemi bir hız alanındaki eksik hız bileşenini bulmak için kullanılabilir.

Satılık:
6 aylık bilgisayar
600 TL (pazarlıklı)
Tel: 555 24 69

Need a
to Lewis
This Fric
234-22

Kayıp:
 y hız bileşeni
aranıyor
90-800
SÜR-EKLİ

ÖRNEK 9-5 İki-boyutlu Sıkıştırılamaz Vorteks Akışı

Silindirik koordinatlarda göz önüne alınan iki-boyutlu sıkıştırılamaz bir akışta teğetsel hız bileşeni $u_\theta = K/r$ olup K bir sabittir. Bu bir çeşit vorteks akışını temsil etmektedir. Diğer hız bileşeni u_r için bir ifade elde ediniz.

Analiz Verilen iki-boyutlu durum için sıkıştırılamaz süreklilik denklemi (Denklem 9-18),

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{0 \text{ (2-B)}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (1)$$

halini alır. Verilen teğetsel hız bileşeni (u_θ), θ 'nın fonksiyonu olmadığından Denklem 1

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad ru_r = f(\theta, t) \quad (2)$$

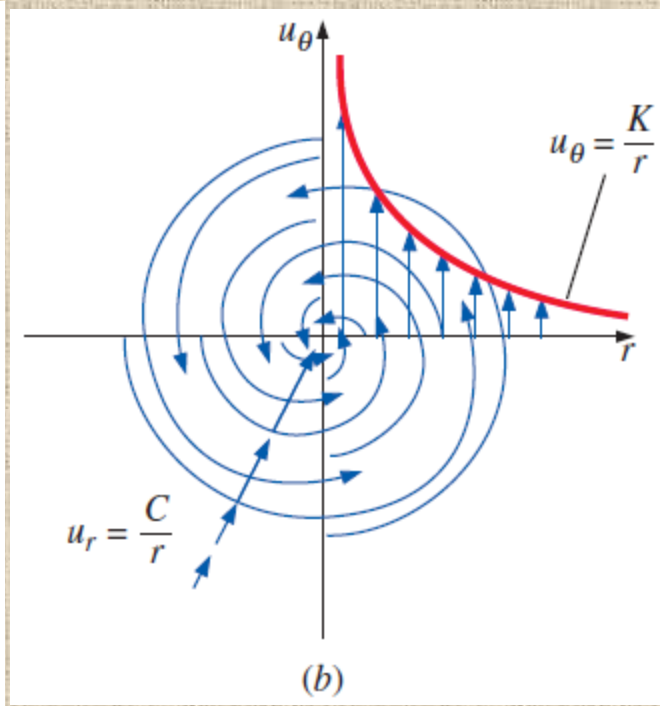
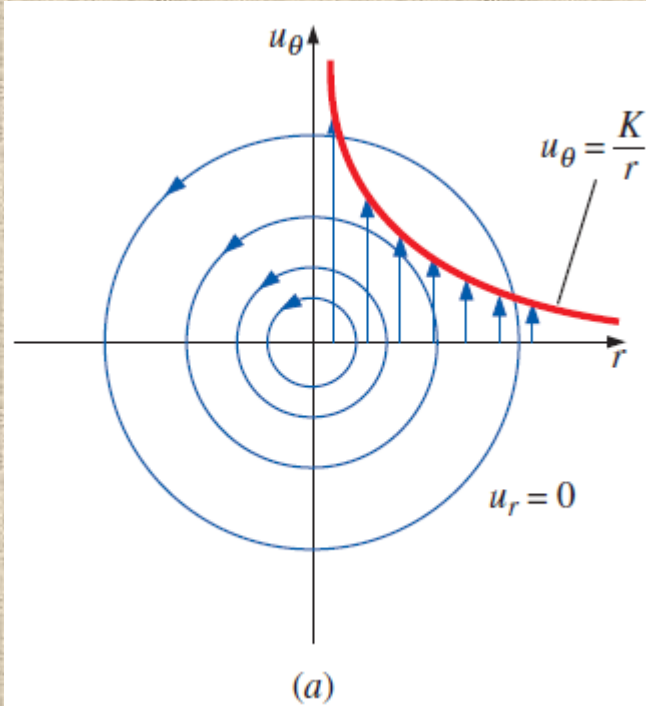
olur. Burada r 'ye göre kısmi bir integral söz konusu olduğundan, elde edilen ifadeye basit bir integrasyon sabiti yerine θ ve t 'ye bağlı keyfi bir fonksiyon eklenmiştir. Buradan u_r çekilirse aşağıdaki ifade elde edilir:

$$u_r = \frac{f(\theta, t)}{r} \quad (3)$$

Dolayısıyla *Denklem 3 biçiminde verilen herhangi bir radyal hız bileşeni, süreklilik denklemini sağlayan iki-boyutlu, sıkıştırılamaz bir hız alanını verir.*

Şimdi bazı özel durumları inceleyelim. En basit durumda $f(\theta, t) = 0$ ($u_r = 0$, $u_\theta = K/r$) olur. Bu ise Bölüm 4'te açıklanan ve Şekil 9-15a'da gösterilen **çizgisel vorteks** durumudur. Diğer bir basit durum ise, C bir sabit olmak üzere $f(\theta, t) = C$ olmasıdır. Bu ise büyüklüğü $1/r$ olarak azalan bir radyal hız sonucunu verir. Negatif C değeri için ise akışkan parçacıklarının sadece merkez etrafında dönmediği aynı zamanda merkezdeki bir kuyu (z-ekseni boyunca bir çizgisel kuyu) tarafından emildiği spiral şeklinde çizgisel bir vorteks/kuyu akışı söz konusudur. Bu durum Şekil 9-15b'de gösterilmiştir.

İrdeleme $f(\theta, t)$ yerine başka fonksiyonlar alınarak daha karmaşık akışlar elde edilebilir. Herhangi bir $f(\theta, t)$ fonksiyonu için akış, öngörülen bir anda iki-boyutlu sıkıştırılmaz süreklilik denklemini sağlar.



(a) Çizgisel vorteks akışı ve (b) spiral şekilli çizgisel vorteks/kuyu akışına ait akım çizgileri ve hız profilleri

ÖRNEK 9–6

Süreklilik Denklemiyle Hacimsel Şekil Değiştirme Hızının Karşılaştırılması

Bölüm 4'te tanımlanan *hacimsel şekil değiştirme hızını* anımsayınız. Bu ifade kartezyen koordinatlarda aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

Hacimsel şekil değiştirme hızının sıkıştırılamaz akış için sıfır olduğunu gösteriniz. Ayrıca sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir akışlar için hacimsel şekil değiştirme hızının fiziksel anlamını tartışınız.

ÇÖZÜM Hacimsel şekil değiştirme hızının sıkıştırılamaz akışta sıfır olduğunu göstereceğiz. Ayrıca sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir akışlar için fiziksel anlamını irdelleyeceğiz.

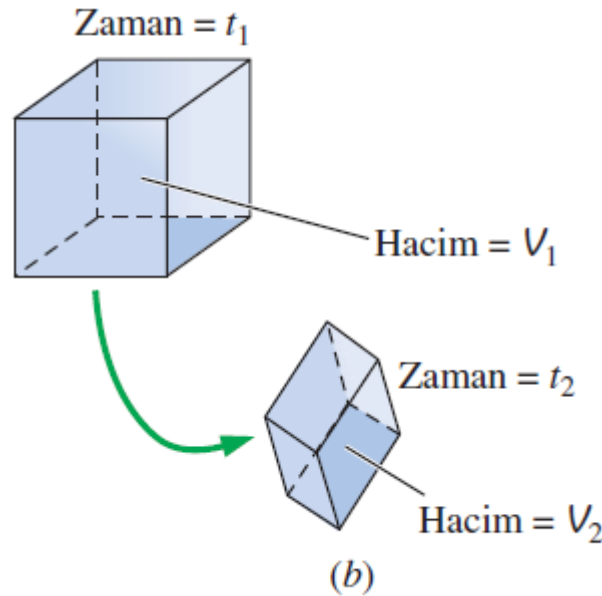
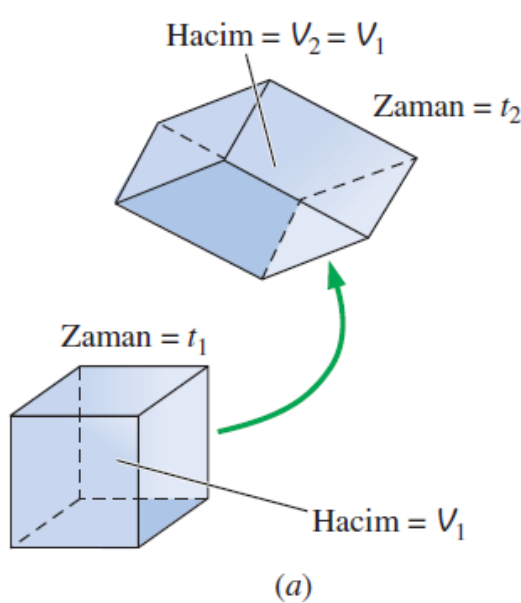
Analiz Akış sıkıştırılamaz olduğundan Denklem 9–16 geçerlidir. Burada bu denklemin kartezyen koordinatlar için verilen biçimi olan Denklem 9–17 kullanılacaktır. Denklem 9–17 ile Denklem 1 karşılaştırılırsa,

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = 0 \quad (\text{sıkıştırılamaz akış})$$

olması gerektiği görülür. Bu sonuca göre *sıkıştırılmaz bir akış alanında hacimsel şekil değiştirme hızı* sıfırdır. Gerçekten de sıkıştırılmazlık $DV/Dt = 0$ olarak tanımlanabilir. Fiziksel olarak bir akışkan elemanını izlerken bu elemanın bazı kısımları uzayabilir, bazı kısımları kısalabilir, öteleme hareketi yapabilir, şekli bozulabilir ve dönebilir; ancak akış alanındaki tüm yörüngesi boyunca hacmi sabit kalır (Şekil 9–16a). Sıkıştırılmaz olması şartıyla, akış daimi olsun ya da olmasın bu durum geçerlidir. Eğer akış sıkıştırılabilir olsaydı hacimsel şekil değiştirme hızı sıfır olmazdı. Bu durum, akışkan elemanları akış alanında hareket ederken hacimlerinin büyüyebildiğini (genişlediğini) veya küçülebildiğini gösterir (Şekil 9–16b). Bunu göstermek amacıyla sıkıştırılabilir akış için süreklilik denkleminin alternatif bir biçimi olan Denklem 9–10'u dikkate alalım. Tanım olarak $\rho = m/V$ olup m akışkan elemanının kütlesidir. Akış ile hareket eden bir akışkan elemanı olarak tanımlanan maddesel bir eleman için m sabit olmalıdır. Denklem 9–10'a bazı cebirsel işlemler uygulanırsa

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{V}{m} \frac{D(m/V)}{Dt} = -\frac{V}{m} \frac{m}{V^2} \frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \rightarrow \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

ifadesi elde edilir.



İrdeleme $f(u, t)$ yerine başka fonksiyonlar alınarak daha karmaşık akışlar elde edilebilir. Herhangi bir $f(u, t)$ fonksiyonu için akış, ongorulen bir anda iki-boyutlu sıkıştırılmaz süreklilik denklemini sağlar.

(a) Sıkıştırılmaz bir akış alanında akışkan elemanları ötelenebilir, dönebilir ve şekil değiştirebilir fakat hacimleri değişmez; (b) sıkıştırılabilir bir akış alanında ise akışkan elemanları ötelenirken, dönerken ve şekil değiştirirken hacimleri değişebilir.

ÖRNEK 9-7 Sıkıştırılamaz Akış İçin Gerekli Koşullar

$\vec{V} = (u, v, w) = a(x^2y + y^2)\vec{i} + bxy^2\vec{j} + cx\vec{k}$ denklemiyle verilen daimi bir hız alanını dikkate alalım. Burada a , b ve c sabittir. Hangi koşullar altında bu akış alanı sıkıştırılamaz olur?

ÇÖZÜM Sıkıştırılamazlık koşulunu sağlayan a , b ve c sabitleri arasındaki ilişkiyi belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimidir. 2 Belirlenecek kısıtlara göre akış sıkıştırılamazdır.

Analiz Denklem 9-17'yi verilen hız alanına uygulayalım:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2axy} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{2bxy} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_0 = 0 \quad \rightarrow \quad 2axy + 2bxy = 0$$

Sonuç olarak sıkıştırılamazlık koşulunu sağlamak için a ve b büyüklük olarak eşit ancak zıt işaretli olmalıdır.

Sıkıştırılamazlık koşulu: $a = -b$

İrdeleme Eğer $a = -b$ olmasaydı, bu yine geçerli bir akış alanı olabilirdi. Ancak bu durumda yoğunluk akış alanında konuma bağlı olarak değişecekti. Diğer bir deyişle akış sıkıştırılabilir olurdu ve Denklem 9-17 yerine Denklem 9-14'ün sağlanması gerekirdi.

9-3 ■ AKIM FONKSİYONU

Kartezyen Koordinatlarda Akım Fonksiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Sıkıştırılamaz, iki-boyutlu akım fonksiyonu Kartezyen koordinatlarda:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Akım fonksiyonu ψ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Göz önüne alınan akış tipine ve kullanılan koordinat sistemine bağlı olarak akım fonksiyonunun farklı tanımlamaları vardır.

Akım Fonksiyonu

- 2-B, sıkıştırılamaz akış, kartezyen koordinatlar:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ve} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- 2-B, sıkıştırılamaz akış, silindirik koordinatlar:

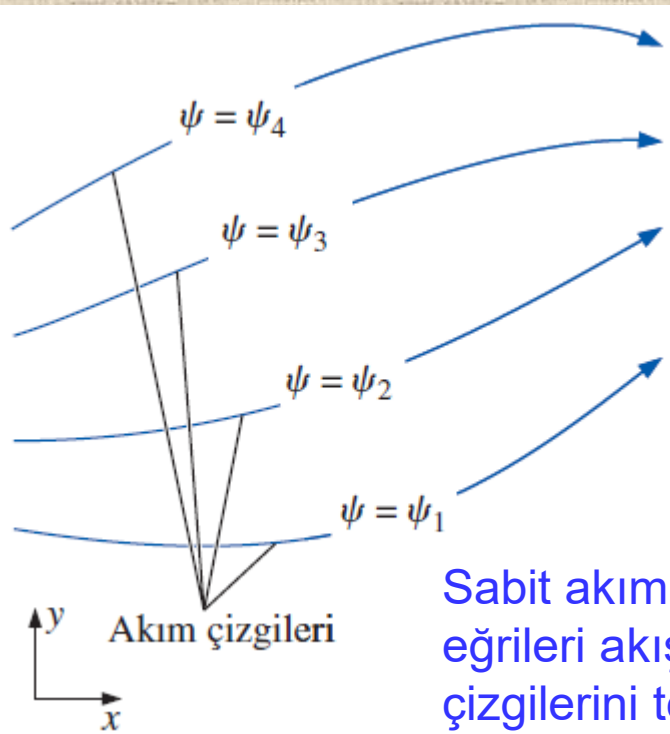
$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{ve} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

- Eksenel simetrik, sıkıştırılamaz akış silindirik koordinatlar:

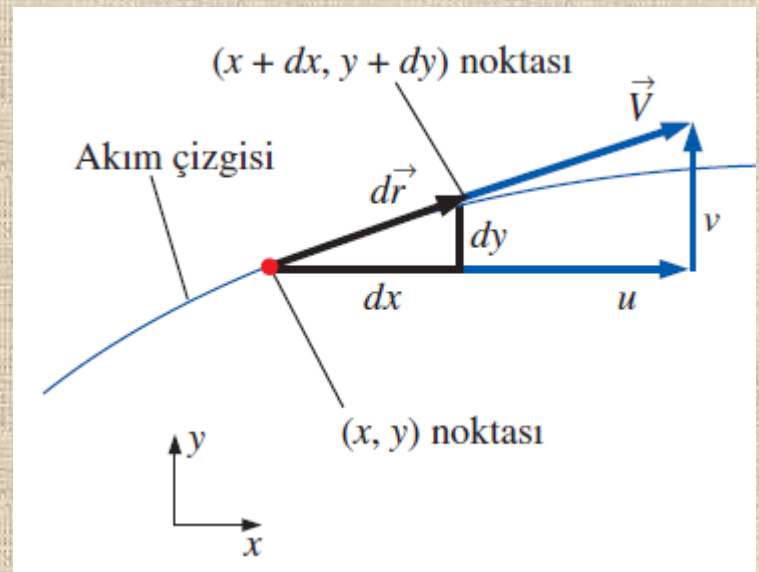
$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{ve} \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

- 2-B, sıkıştırılabilir akış, kartezyen koordinatlar:

$$\rho u = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \rho v = -\frac{\partial \psi_\rho}{\partial x}$$



Sabit akım fonksiyonu eğrileri akışın akım çizgilerini temsil eder.



xy -düzleminde iki-boyutlu bir akım çizgisi boyunca yay uzunluğu $d\vec{r} = (dx, dy)$ ve yerel hız vektörü $\vec{V} = (u, v)$.

Bir akım çizgisi boyunca: $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \rightarrow \underbrace{-v dx}_{\partial\psi/\partial x} + \underbrace{u dy}_{\partial\psi/\partial y} = 0$

Bir akım çizgisi boyunca: $\frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0$

ψ 'nin toplam değişimi: $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy$

Akışa ait sabit akım fonksiyonu ψ çizgileri

ÖRNEK 9–8

Akım Fonksiyonundan Hız Alanının Hesaplanması

xy-düzlemindeki daimi, iki-boyutlu sıkıştırılamaz bir akış alanı $\psi = ax^3 + by + cx$ ile verilen bir akım fonksiyonuna sahiptir. Burada $a = 0.50 \text{ (m}\cdot\text{s)}^{-1}$, $b = -2 \text{ m/s}$ ve $c = -1.5 \text{ m/s}$ 'dir. (a) u ve v için ifadeler türetiniz. (b) Akış alanının sıkıştırılamaz süreklilik denklemini sağladığını gösteriniz. (c) Akışın sağ üst çeyreğinde birkaç akım çizgisi çizin.

Analiz (a) Akım fonksiyonunun türevini alarak u ve v için ifadeler elde etmek üzere Denklem 9–20'yi kullanalım:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = b \quad \text{ve} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -3ax^2 - c$$

(b) u , x 'in ve v de y 'nin fonksiyonu olmadığından, iki-boyutlu sıkıştırılamaz süreklilik denkleminin (Denklem 9–19) sağlandığı görülür. Aslında ψ , x ve y 'nin düzgün bir fonksiyonu olduğundan, xy-düzleminde iki-boyutlu süreklilik denklemi ψ 'nin tanımı gereği kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla **akış sıkıştırılamazdır**. (c) Akım çizgilerini çizmek için verilen denklemden ya y 'yi, x 'in ve ψ 'nin fonksiyonu olarak, ya da x 'i, y 'nin ve ψ 'nin fonksiyonu olarak ifade etmek gerekir. Birinci yol daha kolaydır ve bu yolla,

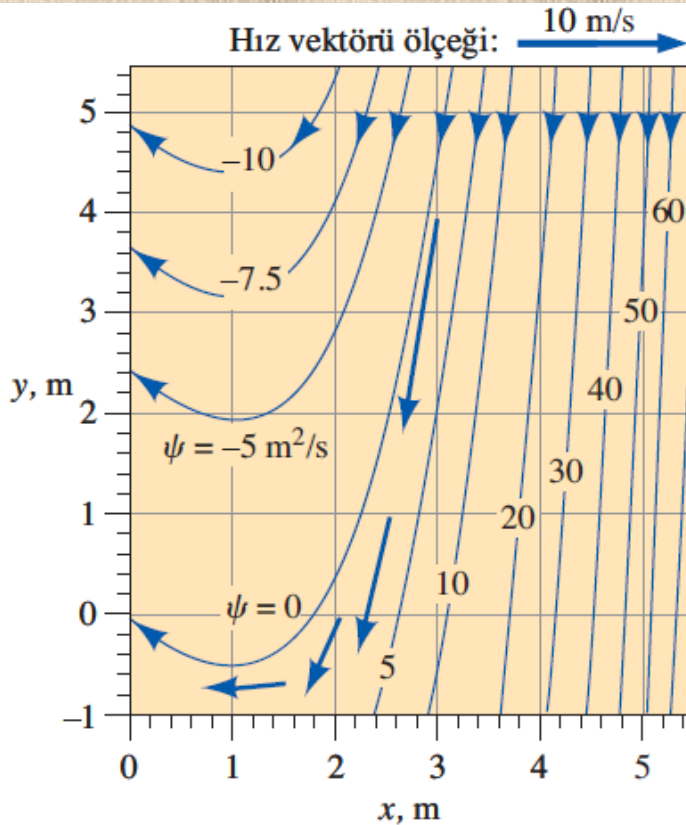
Akım çizgileri denklemi:

$$y = \frac{\psi - ax^3 - cx}{b}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem, Şekil 9–20’de çeşitli ψ değerleri ve verilen a , b ve c sabitleri için çizilmiştir. Bu akış, büyük x değerlerinde hemen hemen aşağı yönde lineerdir fakat $x < 1$ m için yukarıya dönmektedir.

İrdeleme $x = 1$ m’de $v = 0$ olduğu gösterilebilir. Aslında v , $x > 1$ m için negatif, $x < 1$ m için pozitifdir. Ayrıca akışın yönü akış alanında rastgele alınan bir noktadaki, örneğin ($x = 3$ m, $y = 4$ m) hızın hesaplanması ile de bulunabilir. Bu noktada $u = -2.0$ m/s ve $v = -12$ m/s bulunur. Bu hız bileşenleri akış alanının bu bölgesinde akışkanın sol alt yöne doğru aktığını göstermektedir. Net olarak göstermek için Şekil 9–20’de akışın bu noktadaki hız vektörü de çizilmiştir. Hız vektörünün bu nokta civarında akım çizgisine paralel olduğu açıkça görülmektedir. Diğer üç konumda da hız vektörleri çizilmiştir

$$y = \frac{\psi - ax^3 - cx}{b}$$



Örnek 9-8’deki hız alanına ait akım çizgileri; her bir akım çizgisi için sabit ψ değerleri ve dört farklı konumda hız vektörleri gösterilmiştir.

ÖRNEK 9–9

Bilinen Bir Hız Alanı İçin Akım Fonksiyonunun Hesaplanması

Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz bir hız alanı $u = ax + b$ ve $v = -ay + cx$ ile verilmektedir. Burada a , b ve c sabittir ve $a = 0.50 \text{ s}^{-1}$, $b = 1.5 \text{ m/s}$ ve $c = 0.35 \text{ s}^{-1}$ 'dir. Akım fonksiyonu için bir ifade türetiniz ve sağ üst çeyrekte akışa ait bazı akım çizgilerini çiziniz.

Analiz Akım fonksiyonunu tanımlayan Denklem 9–20'nin iki kısmından biriyle başlayalım (hangisiyle başlandığının önemi yoktur, çözüm aynı olacaktır):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = ax + b$$

Ardından bunun bir *kısmi* integral işlemi olduğuna dikkat ederek y 'ye göre integralini alalım. Bunun sonucu olarak integral sabiti yerine diğer bir değişken olan x 'e bağlı bir fonksiyon eklenecektir.

$$\psi = axy + by + g(x) \quad (1)$$

Şimdi de Denklem 9–20'nin diğer kısmını seçelim, Denklem 1'in türevini alalım ve aşağıdaki gibi düzenleyelim:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay - g'(x) \quad (2)$$

Burada $g'(x)$, dg/dx 'i göstermektedir: Zira g , sadece x 'in bir fonksiyonudur. Böylece v hız bileşeni için, problemde verilen ifade ve Denklem 2 olmak

üzere iki ifade elde etmiş oluruz. $g(x)$ 'i bulmak için bu iki denklemi birbirine eşitleyip integre edelim:

$$v = -ay + cx = -ay - g'(x) \rightarrow g'(x) = -cx \rightarrow g(x) = -c \frac{x^2}{2} + C \quad (3)$$

g' 'nin yalnızca x 'in bir fonksiyonu olmasından dolayı keyfi bir C integral sabiti eklediğimize dikkat ediniz. Son olarak, Denklem 3'ü Denklem 1'de yerine koyarak ψ için çözüm

Çözüm:
$$\psi = axy + by - c \frac{x^2}{2} + C \quad (4)$$

şeklinde elde edilir.

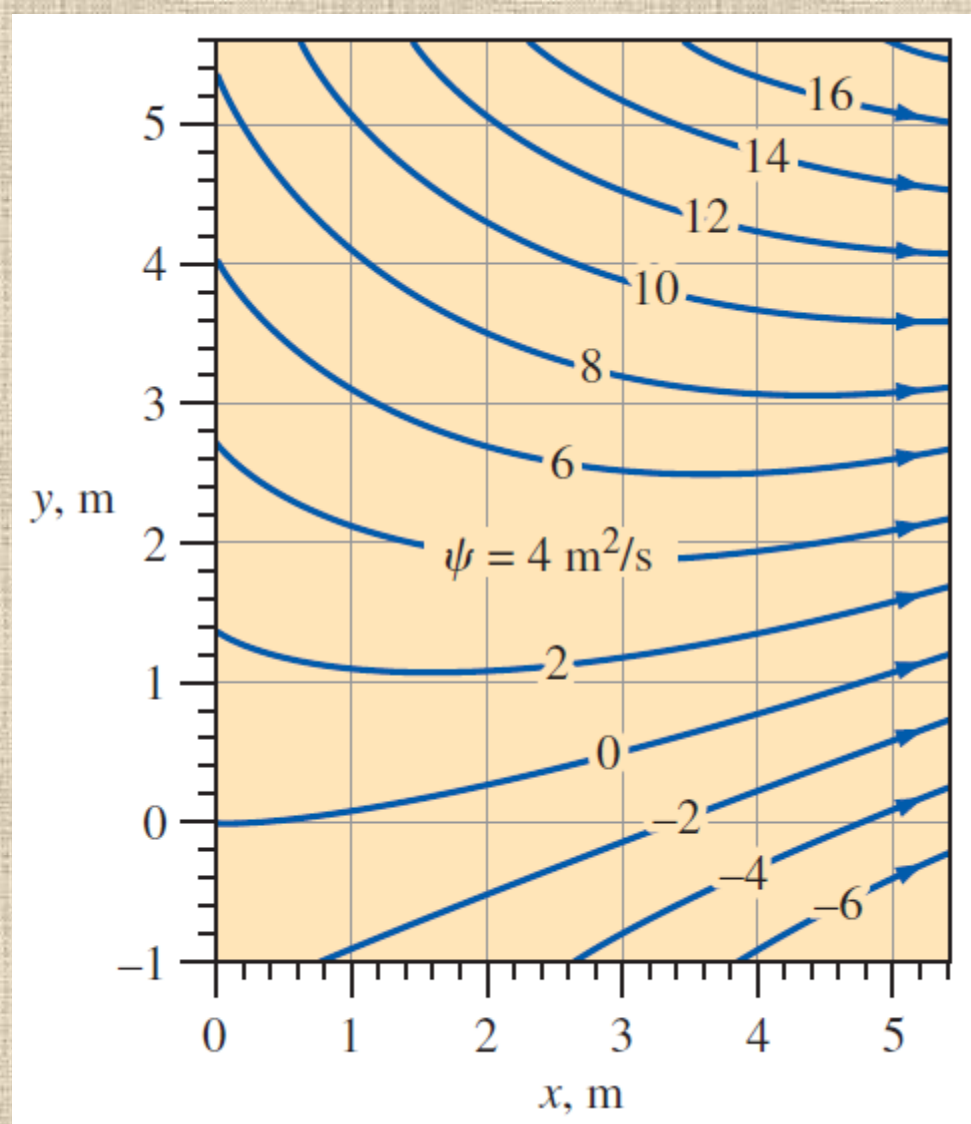
Akım çizgilerini çizmek için Denklem 4'ün bir eğri *ailesini* temsil ettiğini, yani her bir $(\psi - C)$ sabitinin değeri için tek bir eğri bulunduğunu belirteyim. C keyfi bir sabit olduğundan genellikle sıfır alınması tercih edilir, ancak başka değerler de alınabilir. Basitlik için $C = 0$ alıp Denklem 4'ten x 'in bir fonksiyonu olarak y 'yi çözersek,

Akım çizgileri denklemi:
$$y = \frac{\psi + cx^2/2}{ax + b} \quad (5)$$

elde ederiz. Verilen a , b ve c sabitlerinin değerleri ve çeşitli ψ değerleri için Denklem 5 Şekil 9–21'de çizilmiştir. Bu sabit ψ eğrileri akışın akım çizgileridir. Şekil 9–21'e göre bunun sağ üst çeyrekte düzgün şekilde daralan bir akış olduğu görülmektedir.

İrdeleme Yaptığımız cebirsel işlemlerin doğruluğunu kontrol etmek her zaman faydalıdır. Bu örnekte doğru hız bileşenlerinin elde edildiğini göstermek için Denklem 4'ü Denklem 9–20'de yerine koymalısınız.

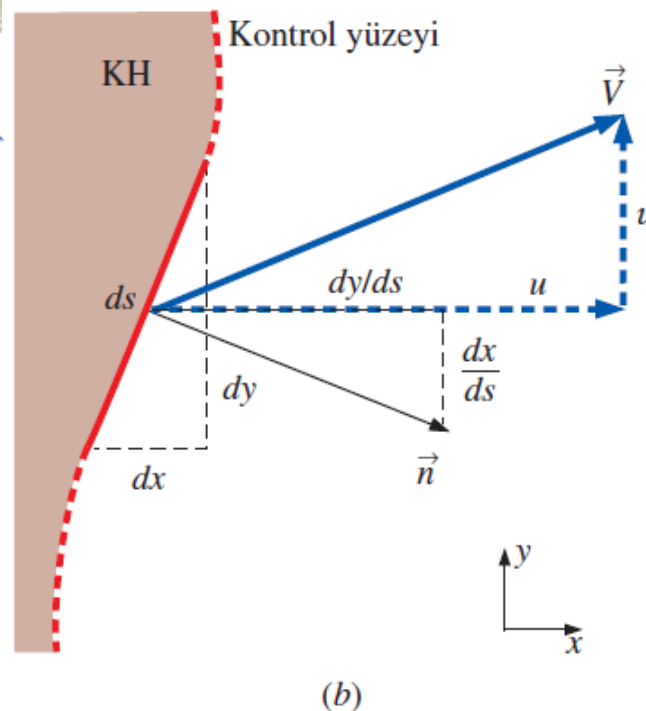
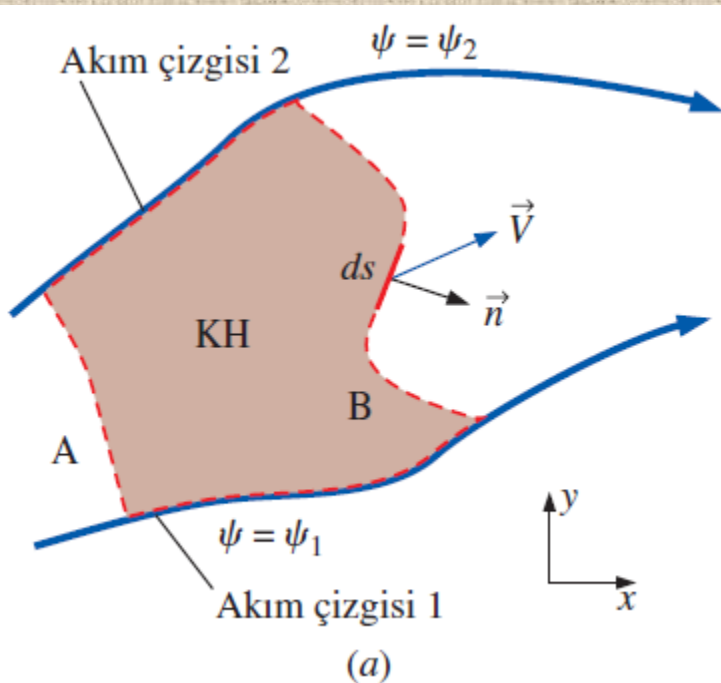
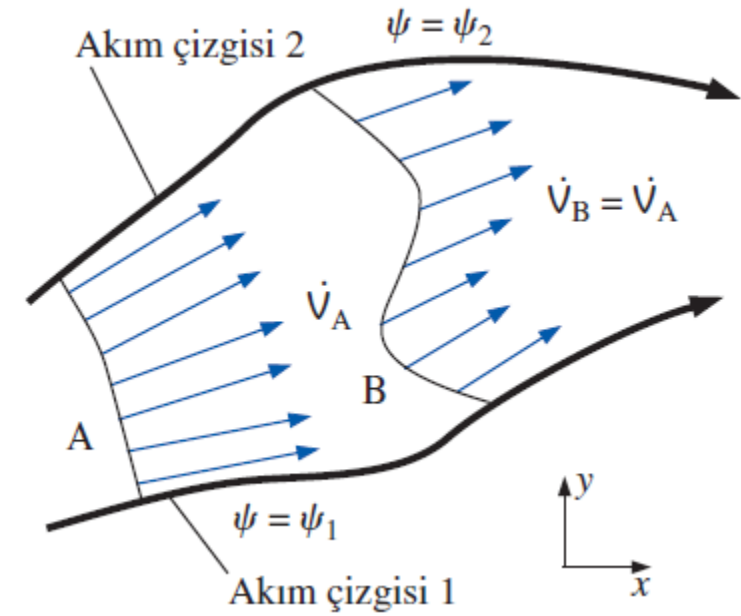
$$y = \frac{\psi + cx^2/2}{ax + b}$$



Örnek 9-9'daki hız alanına ait akım çizgileri; her bir akım çizgisi için sabit ψ değerleri gösterilmiştir.

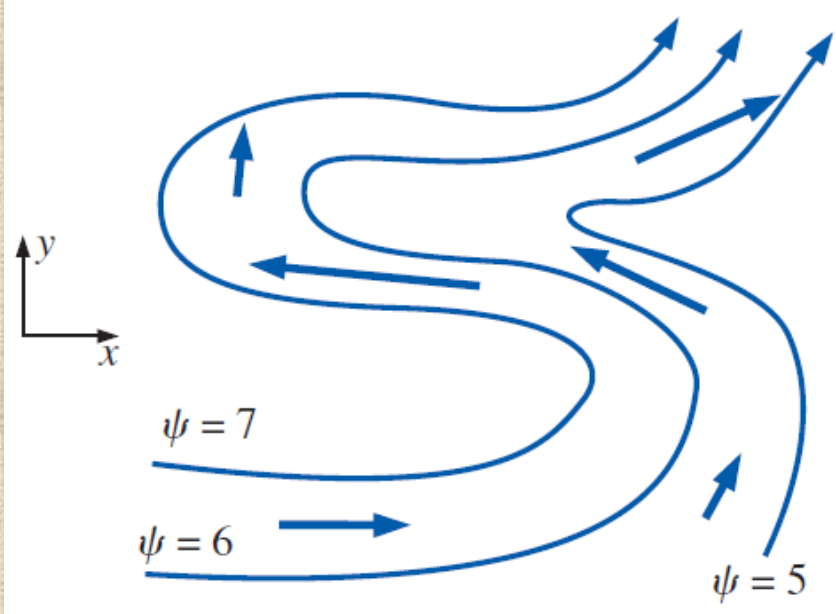
Bir akım çizgisinden diğerine ψ değerleri arasındaki fark, birim genişlik başına bu iki akım çizgisi arasından geçen hacimsel debiye eşittir.

xy -düzleminde iki-boyutlu akım çizgileri için iki akım çizgisi arasından birim genişlik başına geçen hacimsel debi $\dot{V}$ her kesitte aynıdır.



(a) xy -düzleminde ψ_1 ve ψ_2 akım çizgileri ve A ve B dilimleri ile sınırlanmış kontrol hacmi
(b) sonsuz küçük ds uzunluğunda etrafındaki bölgenin

Akım fonksiyonu ψ 'nin değeri, xy-düzleminde akış yönünün soluna doğru artar.



Sol taraf kuralı'nın çizim üzerinde gösterilişi. xy-düzleminde akım fonksiyonunun değeri akış yönünün soluna doğru artar.

Şekilde akım fonksiyonu, akışın ne kadar kıvrıldığına ve döndüğüne bakılmaksızın akış yönünün soluna doğru artmaktadır. Akım çizgilerinin birbirinden uzaklaştığı (şekildeki sağ alt kısım) kısımlardaki hızın büyüklüğü (akışkan hızı), akım çizgilerinin birbirlerine daha yakın olduğu kısımlardakine (şekildeki orta kısım) oranla daha küçük kalır.

Akım çizgileridaraldığında aralarındaki kesit alanı azalır dolayısıyla akım çizgileriarasındaki debiyi korumak için hız artmalıdır.

ÖRNEK 9-10

Akım Çizgilerinden Bağlı Hızın Belirlenmesi

Hele-Shaw akışı bir sıvıyı paralel levhalar arasındaki ince bir aralıktan geçmeye zorlamak suretiyle elde edilir. Şekil 9-25'te eğik levha üzerindeki akış için örnek bir Hele-Shaw akışı verilmiştir. Çıkış çizgileri, yukarıakım bölgesinde eşit aralıklı noktalardan salınan boya ile oluşturulmuştur. Akış daimi olduğundan akım çizgileri ile çıkış çizgileri çakışmaktadır. Akışkan su olup cam levhalar 1.0'er mm aralıkla yerleştirilmiştir. Akım çizgisi deseninden yola çıkarak akış hızının, akış alanının belirli bir bölgesinde yüksek veya düşük (göreceli olarak) olduğunu nasıl söyleyebileceğimizi irdeleyiniz.

Analiz Bir akım fonksiyonunun eşit aralıklı akım çizgilerinin birbirlerinden uzaklaşması, o bölgede akış hızının düştüğünü gösterir. Benzer şekilde, eğer akım çizgileri birbirlerine yaklaşıyorsa bu bölgede akış hızı artıyordur. Şekil 9-25'ten, akım çizgileri eşit aralıklı olduğundan levhanın uzak yukarıakım bölgesinde akışın düz ve üniform olduğu anlaşılmaktadır. Akışkan levhanın alt tarafına doğru yaklaştıkça, özellikle durma noktası civarında akım çizgileri arasındaki geniş aralıklarından anlaşıldığı gibi, akışın hızı yavaşlamaktadır. Öte yandan akış, levhanın keskin köşeleri civarında birbirine iyice yaklaşmış akım çizgilerinin gösterdiği gibi yüksek hızlara doğru ivmelenmektedir.

İrdeleme Hele-Shaw akışının çıkış çizgileri Bölüm 10'da açıklanacağı gibi potansiyel akışa benzer bir yapı sergiler.



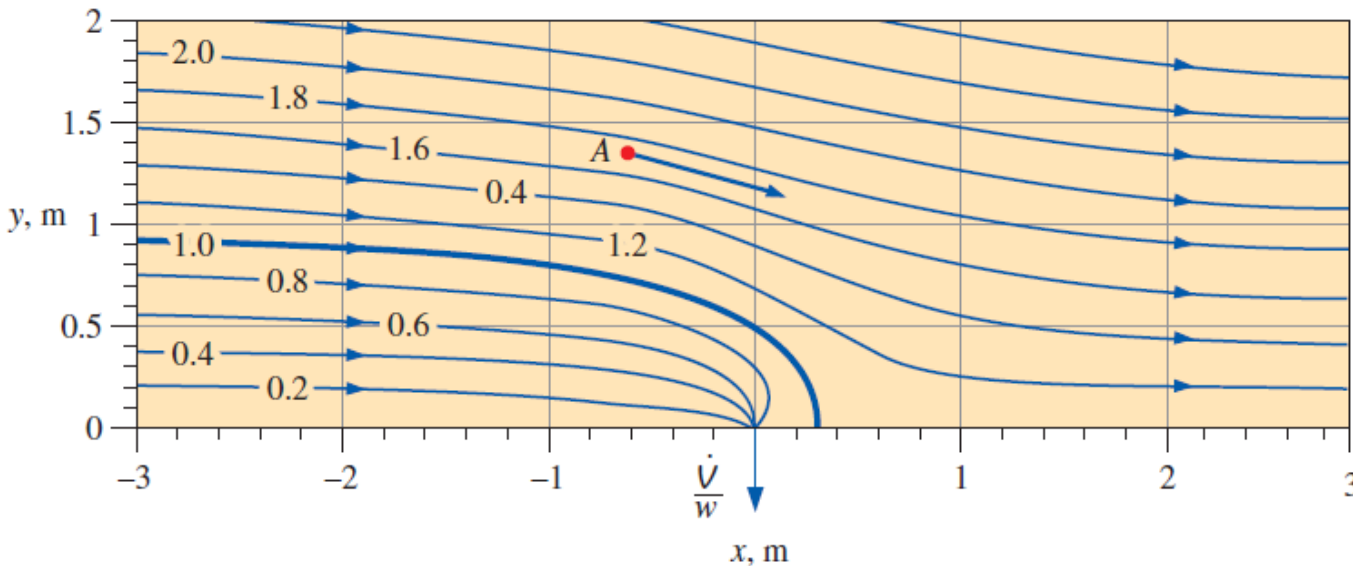
Eğik bir levha üzerinden Hele-Shaw akışı ile oluşturulan çıkış çizgileri. Çıkış çizgileri, aynı kesit alanı şekline sahip iki-boyutlu eğik bir levha üzerindeki potansiyel akışa ait (Bölüm 10) akım çizgilerini modellemektedir.

ÖRNEK 9-11

Akım Çizgilerinden Hacimsel Debinin Belirlenmesi

Bir su kanalının taban yüzeyindeki dar bir yarıktan su emişi yapılmaktadır. Kanaldaki su $V = 1.0$ m/s üniform hızıyla soldan sağa doğru akmaktadır. Yarık xy -düzlemine dik ve tüm kanal kesitinde z -ekseni boyunca uzamakta olup genişliği $w = 2.0$ m'dir. Dolayısıyla akışın xy -düzleminde iki-boyutlu olduğu düşünülmektedir. Şekil 9-26'te bazı akım çizgileri çizilmiş ve işaretlenmiştir.

Şekil 9-26'daki kalın akım çizgisi akışı ikiye ayırdığından **bölen akım çizgisi** olarak adlandırılır. Bu bölen akım çizgisinin altındaki tüm su yarık tarafından emilirken, bölen akım çizgisinin üzerinde kalan su aşağıya doğru yoluna devam etmektedir. Buna göre yarıktan emilen suyun hacimsel debisi nedir? A noktasındaki hızın büyüklüğünü belirleyiniz.



Üzerinde dar bir emiş yarığı bulunan bir çeper boyunca gerçekleşen serbest akışa ait akım çizgileri; akım çizgilerinin değerleri m/s² birimindedir; kalın olan akım çizgisi bölen akım çizgisidir. A noktasındaki hız vektörünün yönü sol-taraf kuralına göre belirlenmiştir.

Analiz Denklem 9–25'i kullanarak taban yüzeyi ($\psi_{\text{yüzey}} = 0$) ve bölün akım çizgisi ($\psi_{\text{bölün}} = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$) arasında birim genişlik başına hacimsel debi,

$$\frac{\dot{V}}{w} = \psi_{\text{bölün}} - \psi_{\text{yüzey}} = (1.0 - 0) \text{ m}^2/\text{s} = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$$

olarak hesaplanır. Bu debinin *tamamı* yarıktan akmalıdır. Kanal genişliği 2.0 m olduğundan, yarıktan çıkan debi

$$\dot{V} = \frac{\dot{V}}{w} w = (1.0 \text{ m}^2/\text{s})(2.0 \text{ m}) = \mathbf{2.0 \text{ m}^3/\text{s}}$$

olarak bulunur. A noktasındaki hızı hesaplamak için A noktasını içerisine alan iki akım çizgisi arasındaki δ mesafesini ölçeriz. Bu yolla A noktası civarındaki 1.8 değerindeki akım çizgisinin 1.6 değerindeki akım çizgisinden yaklaşık 0.21 m uzakta olduğunu buluruz. Bu iki akım çizgisi arasından birim genişlik başına (sayfa düzlemine dik yönde) geçen hacimsel debi, akım fonksiyonu değerindeki farka eşittir. Dolayısıyla A noktasının hızı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_A \cong \frac{\dot{V}}{w\delta} = \frac{1}{\delta} \frac{\dot{V}}{w} = \frac{1}{\delta} (\psi_{1.8} - \psi_{1.6}) = \frac{1}{0.21 \text{ m}} (1.8 - 1.6) \text{ m}^2/\text{s} = \mathbf{0.95 \text{ m/s}}$$

Bulduğumuz değer bilinen serbest akım hızı (1.0 m/s) değerine yakındır. Bu da A noktası civarındaki akışkanın yaklaşık olarak serbest akım hızıyla aktığını, ancak hafif aşağıya doğru yöneldiğini göstermektedir.

İrdeleme Şekil 9–26'daki akım çizgileri, bir üniform akım ve bir çizgisel kuyunun süperpozisyonu ile elde edilmiştir. Bu yapılırken dönümsüz (potansiyel) akış kabulü yapılmıştır. Bu tür süperpozisyonlar Bölüm 10'da ele alınacaktır.

Silindirik Koordinatlarda Akım Fonksiyonu

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

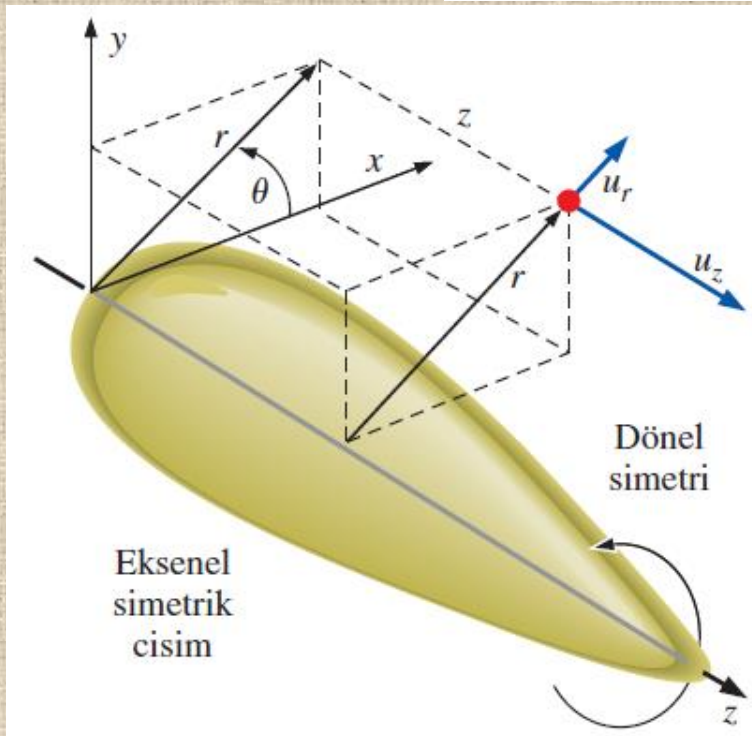
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$$

Silindirik koordinatlarda sıkıştırılamaz, düzlemsel akım fonksiyonu:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{ve} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Silindirik koordinatlarda sıkıştırılamaz, eksenel simetrik akım fonksiyonu:

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{ve} \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$



Silindirik koordinatlarda z-eksenine göre dönel bir simetriye sahip eksenel simetrik bir cisim üzerindeki akış; geometri ve hız alanı θ 'ya bağlı değildir, ayrıca $u_\theta = 0$.

ÖRNEK 9-12**Silindirik Koordinatlarda Akım Fonksiyonu**

Hız bileşenlerinin $u_r = 0$ ve $u_\theta = K/r$ ($K = \text{sabit}$) olarak verildiği, daimi, düzlemsel ve sıkıştırılamaz bir çizgisel vorteksi göz önüne alınız. Bu akış Şekil 9-15a'da gösterilmiştir. Akım fonksiyonu $\psi(r, \theta)$ için bir ifade geliştiriniz ve akım çizgilerinin dairesel olduğunu gösteriniz.

Analiz Denklem 9-27 ile verilen akım fonksiyonu tanımında kullanılan iki bileşenden herhangi birisini seçerek çözümümüze başlayabiliriz. Teğetsel bileşeni seçelim:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\theta = -\frac{K}{r} \quad \rightarrow \quad \psi = -K \ln r + f(\theta) \quad (1)$$

Şimdi de Denklem 9-27'nin diğer bileşenini kullanalım:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} f'(\theta) \quad (2)$$

Burada $f'(\theta)$ fonksiyonun θ 'ya göre türevini göstermektedir. Problemde verilen u_r değerini Denklem 2'ye eşitleyerek,

$$f'(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad f(\theta) = C$$

elde ederiz. Burada C keyfi integral sabitidir. Böylece Denklem 1 aşağıdaki hale gelir:

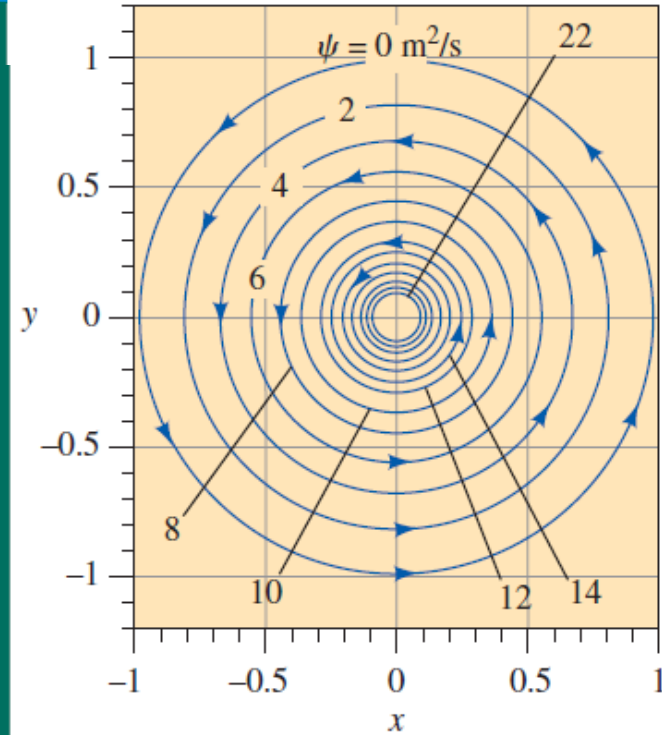
$$\text{Çözüm:} \quad \psi = -K \ln r + C \quad (3)$$

Denklem 3'te r 'ye sabit değerler atayarak sabit ψ eğrilerinin elde edilebileceği anlaşılmaktadır. Tanım olarak sabit r eğrileri daireler oluşturduğundan akım çizgileri (**sabit ψ eğrileri**) Şekil 9-15a'da gösterildiği gibi merkezleri orijin olan daireler olmalıdır.

Bilinen C ve ψ değerleri için akım çizgilerini çizmek üzere, Denklem 3'ten r değerleri bulunur:

$$\text{Akım çizgileri denklemi:} \quad r = e^{-(\psi - C)/K} \quad (4)$$

Şekil 9-28'de $K = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ve $C = 0$ için $\psi = 0$ 'dan $\psi = 0$ 'ye kadar bazı akım çizgileri çizilmiştir.



Örnek 9-12'deki hız alanına ait akım çizgileri: $K = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ve $C = 0$ alınarak çizilmiştir; bazı akım çizgileri için sabit ψ değerleri gösterilmiştir.

Sıkıştırılabilir Akım Fonksiyonu

Akım fonksiyonu kavramı, xy -düzleminde daimi, *sıkıştırılabilir*, iki-boyutlu akışları içerisine alacak şekilde genişletilebilir. Kartezyen koordinatlarda sıkıştırılabilir süreklilik denklemi (Denklem 9-14) daimi, iki-boyutlu akış için aşağıdaki biçime indirgenir:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (9-30)$$

ψ_ρ ile göstereceğimiz **sıkıştırılabilir akım fonksiyonu** aşağıdaki gibi tanımlanır:

Kartezyen koordinatlarda daimi, sıkıştırılabilir, iki-boyutlu akım fonksiyonu :

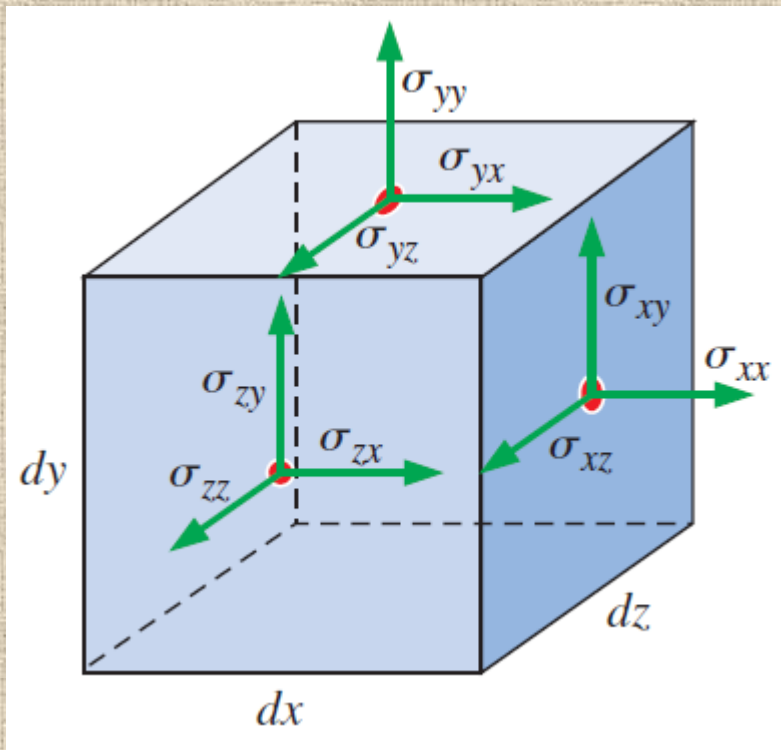
$$\rho u = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \rho v = -\frac{\partial \psi_\rho}{\partial x} \quad (9-31)$$

Denklem 9-31 ile verilen ψ_ρ , x ve y 'nin düzgün fonksiyonu olması kaydıyla Denklem 9-30'u tam olarak sağlar. Sıkıştırılabilir akım fonksiyonunun pek çok özelliği, daha önceden ele aldığımız sıkıştırılamaz akım fonksiyonu (ψ) için verilenlerle aynıdır. Örneğin sabit ψ_ρ eğrileri burada da akım çizgileridir. Ancak bir akım çizgisinden diğerine ψ_ρ 'nun değerindeki değişim, birim genişlik başına hacimsel debiye değil *kütle*sel debiye eşittir. Sıkıştırılamaz akım fonksiyonu kadar yaygın olmasa da sıkıştırılabilir akım fonksiyonu da bazı ticari HAD programlarında kullanılmaktadır.

9-4 ■ LİNEER MOMENTUM DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL BİÇİMİ –CAUCHY DENKLEMİ

$$\sum \vec{F} = \int_{KH} \rho \vec{g} dV + \int_{KY} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \int_{KY} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{kütle}} + \sum \vec{F}_{\text{yüzey}} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}$$



Kartezyen koordinatlarda düzgün altıyüzlü şeklinde sonsuz küçük bir kontrol hacminin pozitif yüzlerindeki (sağ, üst ve ön) pozitif gerilme tensörü bileşenleri. Kırmızı noktalar her bir yüzün merkezini göstermektedir. Negatif yüzlerdeki (sol, alt ve arka) pozitif bileşenler şekilde gösterilenlerin tersi yönlerdedir.

Diverjans Teoremini Kullanarak Türetme

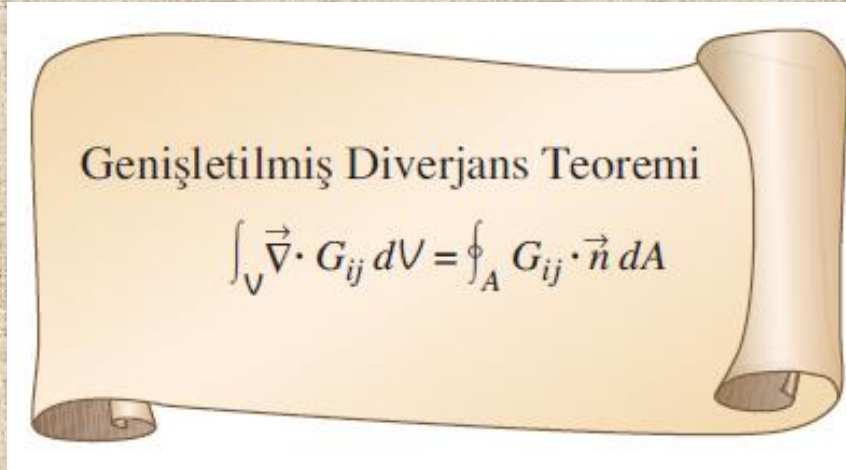
$$\int_{KY} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{KH} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) dV$$

$$\int_{KY} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{KH} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} dV$$

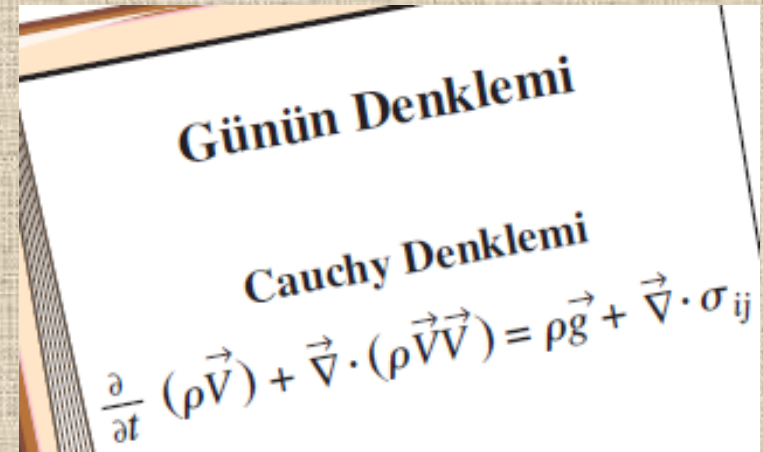
$$\int_{KH} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \right] dV = 0$$

Cauchy denklemi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$



Diverjans teoreminin genişletilmiş biçimi sadece vektörler için değil aynı zamanda tensörler için de kullanışlıdır. Denklemden G_{ij} ikinci mertebeden bir tensör, V hacim ve A ise hacmi çevreleyen ve tanımlayan yüzeyin alanıdır.



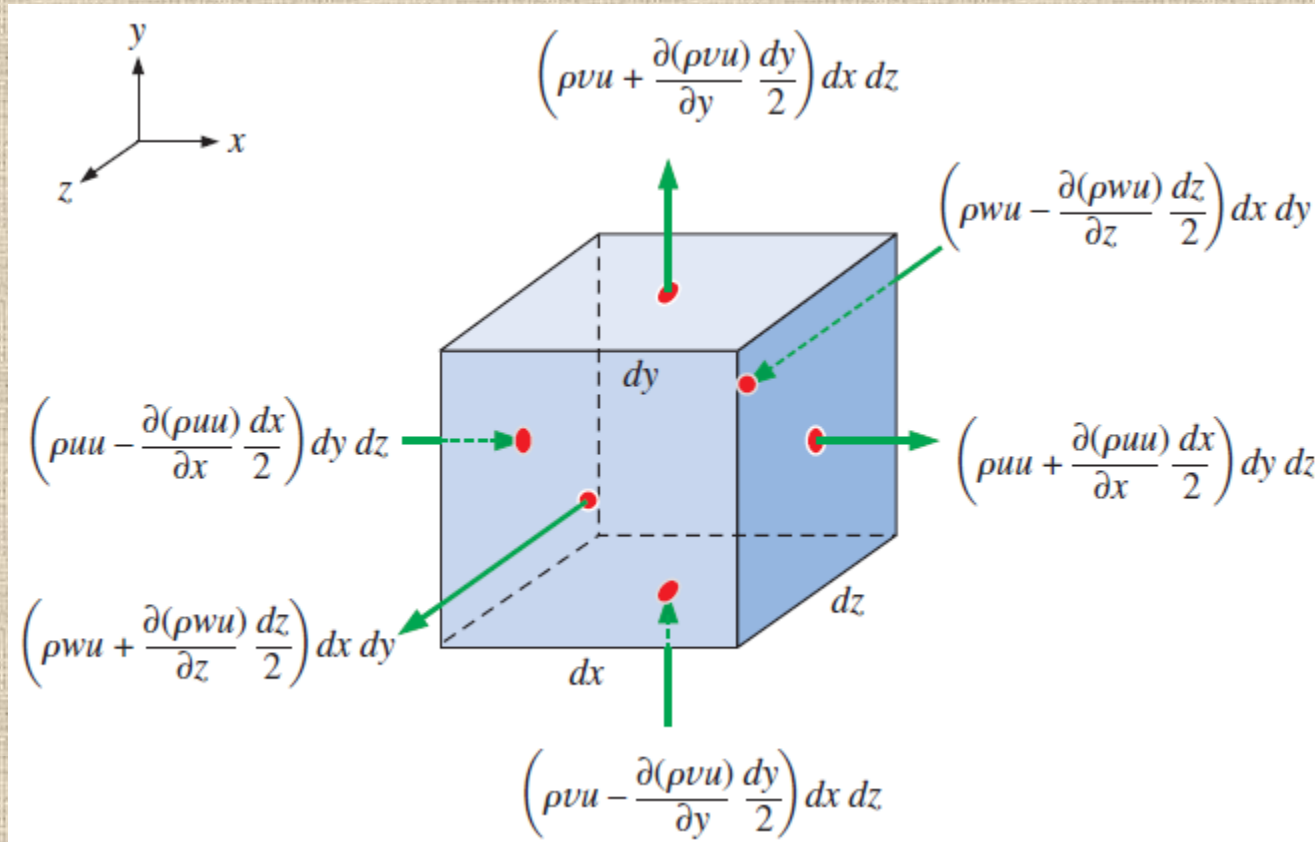
Cauchy denklemi lineer momentum denkleminin diferansiyel biçimidir ve tüm akışkanlar için geçerlidir.

Sonsuz Küçük Kontrol Hacmi Kullanarak Türetme

$$\sum F_x = \sum F_{x, \text{kütle}} + \sum F_{x, \text{yüzey}} = \int_{\text{KH}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV + \sum_{\text{çıkış}} \beta \dot{m} u - \sum_{\text{giriş}} \beta \dot{m} u$$

Kontrol hacmi içerisindeki x-momentum bileşeninin değişim hızı:

$$\int_{\text{KH}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV \cong \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dx dy dz$$



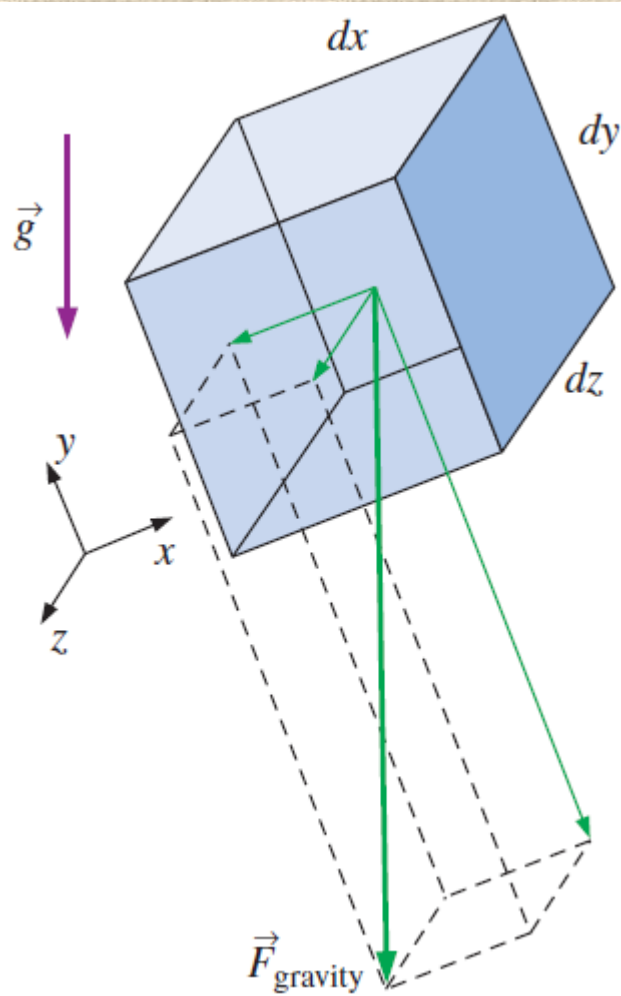
Sonsuz küçük bir kontrol hacminin her bir yüzünden geçen lineer momentumun x-bileşeninin giriş ve çıkışları; kırmızı noktalar her bir yüzün merkezini göstermektedir.

Kontrol hacmi içerisindeki x -momentum bileşeninin değişim hızı:

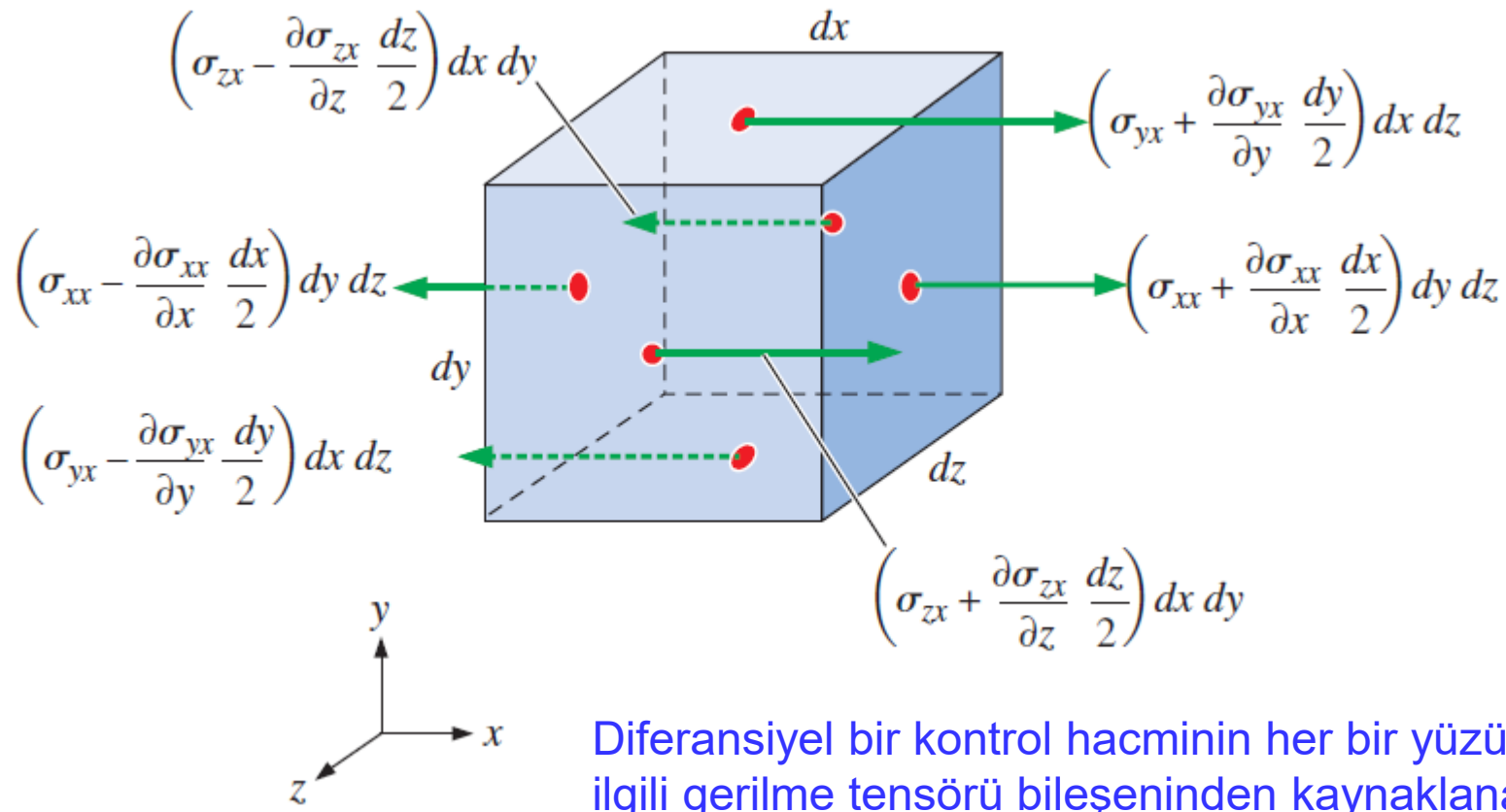
$$\sum_{\text{çıkış}} \beta \dot{m} u - \sum_{\text{giriş}} \beta \dot{m} u \cong \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w u) \right) dx dy dz$$

$$\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$$

$$\sum F_{x, \text{kütle}} = \sum F_{x, \text{yerçekimi}} \cong \rho g_x dx dy dz$$



Yerçekimi vektörünün mutlaka belirli bir eksen ile hizalanması gerekmez. Bu nedenle en genel halde sonsuz küçük bir akışkan elemanına etkiyen ağırlık kuvvetinin üç bileşeni vardır.



Diferansiyel bir kontrol hacminin her bir yüzü üzerindeki ilgili gerilme tensörü bileşeninden kaynaklanan ve x-yönünde etkiyen kuvvetleri gösteren şematik çizim; kırmızı noktalar her bir yüzün merkezini göstermektedir.

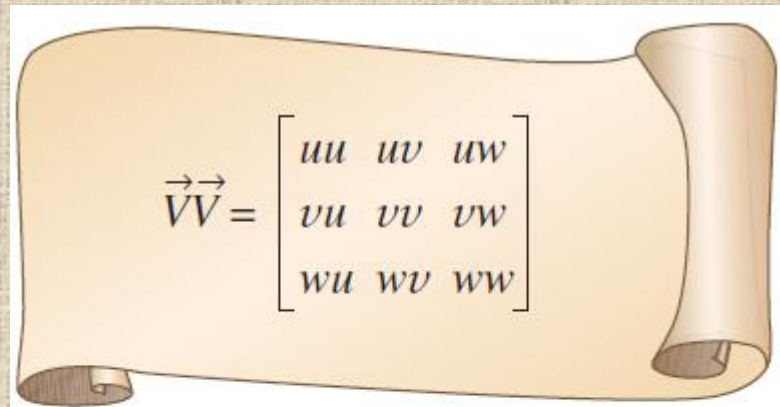
$$\sum F_{x, \text{yüzey}} \cong \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} \right) dx dy dz$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zy}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \rho g_z + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}$$

Cauchy denklemi:
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$



$$\vec{V}\vec{V} = \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix}$$

ŞEKİL 9-35

$\vec{V} = (u, v, w)$ vektörünün kendisi ile dış çarpımı ikinci mertebeden bir tensördür. Burada dokuz bileşenli bir matris olarak gösterilen dış çarpımın sonucu kartezyen koordinatlarda verilmiştir.

Cauchy Denklemimin Alternatif Biçimi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \vec{V} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

Cauchy denkleminin alternatif biçimi:

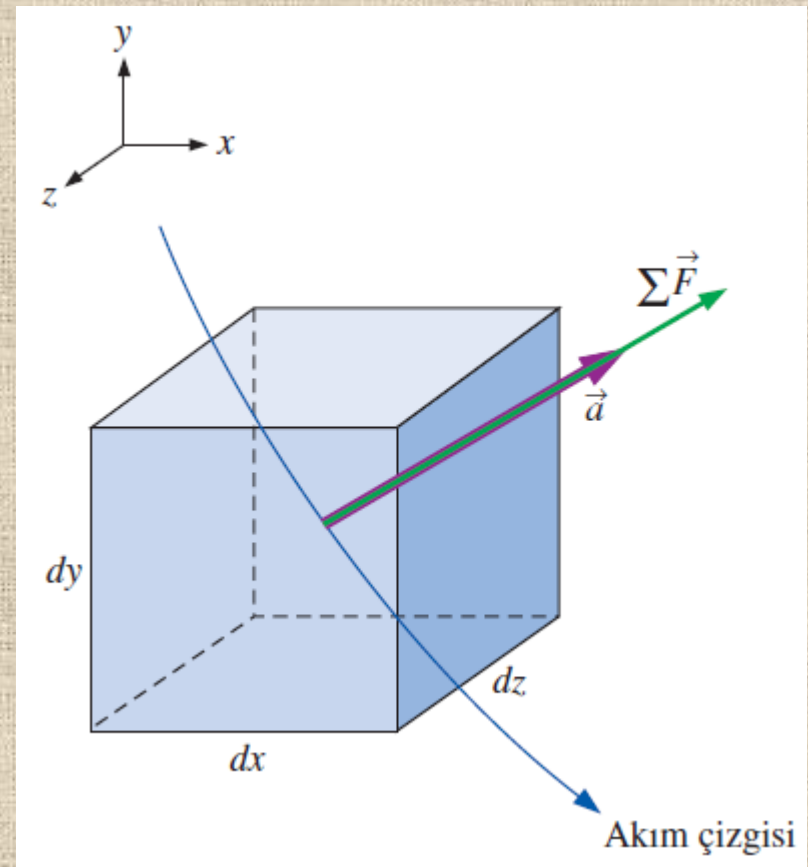
$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

Newton'un İkinci Yasasını Kullanarak Türetme

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho dx dy dz \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}$$

Diferansiyel akış elemanı maddesel bir eleman ise, akış ile birlikte hareket eder ve böylece Newton'un ikinci yasası doğrudan uygulanabilir.



x-bileşeni:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$

y-bileşeni:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}$$

z-bileşeni:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

9-5 ■ NAVIER-STOKES DENKLEMİ

Giriş

Burada τ_{ij} , viskoz gerilme tensörüdür.

$$\text{Durgun akışkan: } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Hareket eden akışkanlar:

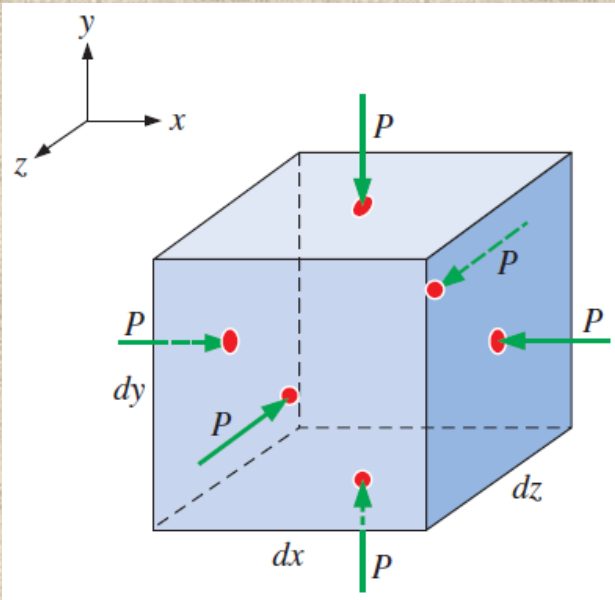
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Mekanik basınç:

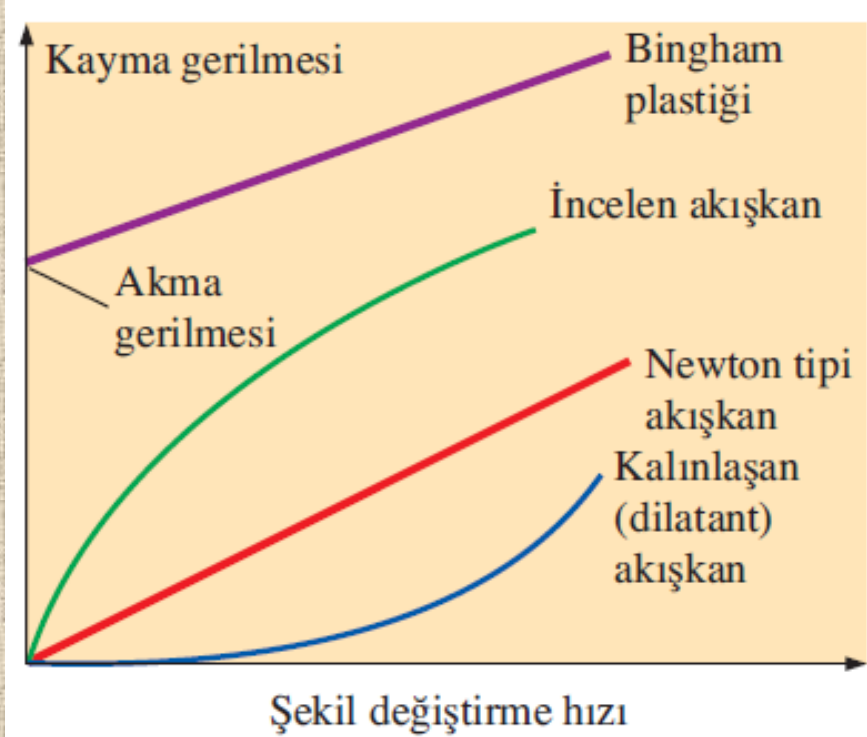
$$P_m = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Mekanik basınç, bir akışkan elemanı üzerinde içe doğru etki eden ortalama normal gerilmedir.

Durgun haldeki akışkanlarda akışkan elemanı üzerine etkiyen tek gerilme, her bir yüzeyin normal doğrultusunda ve içeri doğru etkiyen hidrostatik basınçtır.



Newton Tipi ve Newton Tipi Olmayan Akışkanlar



Akışkanların reolojik davranışları; kayma gerilmesinin şekil değiştirme hızına bağlı olarak değişimi.

Bazı akışkanları harekete geçirebilmek için akma gerilmesi denilen sonlu bir gerilmenin uygulanmasına ihtiyaç vardır. Bu tür akışkanlar **Bingham plastik akışkanlar** olarak bilinir..

Reoloji: Akmakta olan akışkanların deformasyonunun incelenmesidir.

Newton tipi akışkan: Kayma gerilmesinin şekil değiştirme hızıyla lineer olarak değiştiği akışkanlardır.

Newton tipi olmayan akışkan: Kayma gerilmesi ile şekil değiştirme hızı arasındaki ilişki lineer değildir.

Viskoelastik: Uygulanan gerilme kaldırıldığında baştaki asıl şekline (tamamen ya da kısmen) dönen akışkanlara ise viskoelastik akışkan denir. Bazı Newton tipi olmayan akışkanlar, ne kadar hızlı şekil değişimine uğrarlarsa o denli daha az viskoz duruma geldiklerinden **incelen akışkanlar** veya **sanki-plastik akışkanlar** olarak adlandırılır..

Plastik akışkanlar incelme etkisinin en fazla görüldüğü akışkanlardır.

Kalınlaşan akışkanlar veya **kabaran (dilatant)** akışkanlar denir. Bu akışkanlarda gerilme veya şekil değişimi hızı arttıkça akışkan *daha viskoz hale gelir*.



Bir mühendisin bataklık kumuna (dilatant akışkan) düştüğündeki hali. Daha çok hareket etmeye çalıştıkça akışkan daha viskoz hale gelmektedir.

Sıkıştırılamaz, İzotermal Akış için Navier-Stokes Denkleminin Türetilmesi

Hem sıkıştırılamaz hem de izotermal bir akış için:

- $\rho = \text{sabit}$
- $\mu = \text{sabit}$

Ve dolayısıyla:

- $\nu = \text{sabit}$

Sıkıştırılamaz akış yaklaşımı yoğunluğun, izotermal akış yaklaşımı ise viskozitenin sabit alındığı anlamına gelir.

Sabit özelliklere sahip sıkıştırılamaz bir Newton tipi akışkan için viskoz gerilme tensörü :

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \quad (9-55)$$

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Laplace Operatörü

Kartezyen koordinatlar:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Silindirik koordinatlar:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace operatörü sol tarafta kartezyen ve silindirik koordinatlarda gösterilmiştir. Operatör, sıkıştırılamaz N-S denklemindeki viskoz terimlerde bulunur.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w$$

Sıkıştırılmaz Navier–Stokes denklemi:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (9-60)$$



Navier–Stokes denklemi akışkanlar mekaniğinin köşe taşıdır.

Navier–Stokes denklemi, zamana bağlı, lineer olmayan, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Denklem 9–60 dört bilinmeyene (üç hız bileşeni ve basınç) sahip olmakla birlikte vektörel denklem olduğundan sadece üç bileşeni temsil eder.

Denklemi çözülebilir hale getirmek için bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Dördüncü denklem sıkıştırılmaz süreklilik denklemdir.

Kartezyen Koordianatlarda Süreklilik ve Navier-Stokes Denklemleri

Süreklilik denklemi (Denklem 9–16) ve Navier-Stokes denklemi (Denklem 9–60) kartezyen koordinatlarda (x, y, z) ve (u, v, w) cinsinden açılabilir:

Sıkıştırılamaz süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9-61a)$$

Sıkıştırılamaz Navier–Stokes denkleminin x-bileşeni:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (9-61b)$$

Sıkıştırılamaz Navier–Stokes denkleminin y-bileşeni:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (9-61c)$$

Sıkıştırılamaz Navier–Stokes denkleminin z-bileşeni:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (9-61d)$$

Silindirik Koordinatlarda Süreklilik ve Navier-Stokes Denklemleri

Sıkıştırılamaz süreklilik denklemi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \quad (9-62a)$$

Sıkıştırılamaz Navier–Stokes denkelim r- bileşeni:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (9-62b)$$

Sıkıştırılamaz Navier–Stokes denklemi θ-bileşeni:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (9-62c)$$

Sıkıştırılamaz Navier–Stokes denkleminin z-bileşeni:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (9-62d)$$

Terimlerin Alternatif Biçimi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2}$$

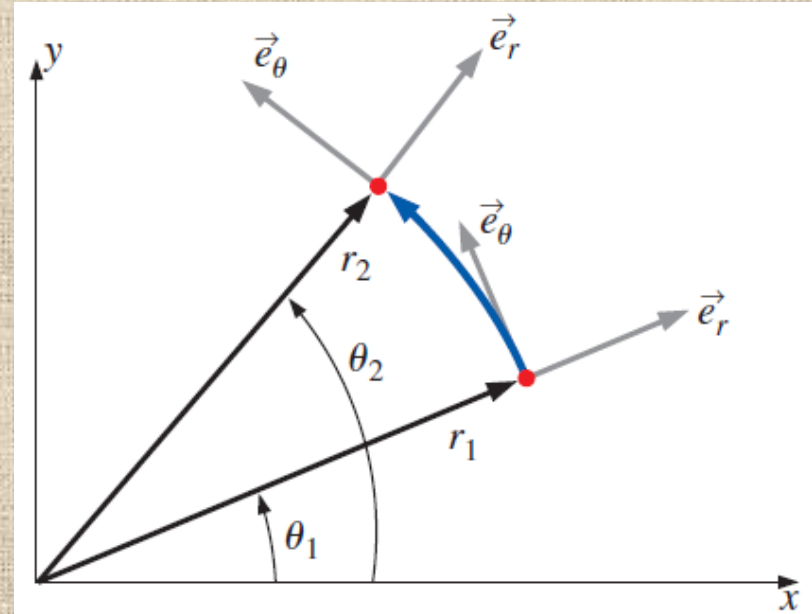
$$= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right)$$

ve

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right)$$

Navier-Stokes
denkleminin r - ve
 θ -bileşenlerindeki
ilk iki viskoz
terimin alternatif
biçimi



Silindirik koordinatlarda $\vec{e}_r$ ve $\vec{e}_\theta$ birim vektörleri birbirine bağlıdır: θ -yönünde hareket edildiğinde $\vec{e}_r$ 'nin yönünde de değişim meydana gelir ve Navier-Stokes denkleminin r - ve θ - bileşenlerinde fazladan terimler ortaya çıkar.

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

9–6 ■ AKIŞ PROBLEMLERİNİN DİFERANSİYEL ANALİZİ

Diferansiyel hareket denklemlerinin (süreklilik ve Navier-Stokes) kullanışlı olduğu iki tür problem vardır:

- Bilinen bir hız alanı için basınç alanının hesaplanması
- Bilinen geometri ve sınır şartları için hem hız hem de basınç alanlarının hesaplanması

Üç Boyutlu Sıkıştırılamaz Akış

Dört değişken veya bilinmeyen:

- Basınç P
- $\vec{V}$ hızının üç bileşeni

Dört hareket denklemi:

- Süreklilik,
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$
- Navier–Stokes denkleminin üç bileşeni

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Üç-boyutlu sıkıştırılamaz ve akışkan özelliklerinin sabit olduğu akış alanında dört bilinmeyen ve çözüm için dört denkleme ihtiyaç vardır.

Bilinen Bir Hız Alanı İçin Basınç Alanının Hesaplanması

Birinci örnek grubu, bilinen bir hız alanı için basınç alanının hesaplanmasını içermektedir.

Süreklilik denkleminde basınç bulunmadığından, hız alanını teorik olarak sadece kütlenin korunumuna dayanarak oluşturabiliriz.

Bununla birlikte hız, hem süreklilik hem de Navier-Stokes denkleminde bulunduğundan bu iki denklem birbirine *bağlıdır*. Buna ilave olarak *basınç*, Navier-Stokes denkleminin her üç bileşeninde de yer alır ve böylece hız ve basınç alanları da bağlı haldedir.

Hız ve basınç arasındaki bu yakın bağımlılık, bilinen bir hız alanı için basınç alanını hesaplamamıza olanak verir.

ÖRNEK 9-13

Kartezyen Koordinatlarda Basınç Alanının Hesaplanması

Örnek 9-9'da verilen $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$ şeklindeki daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz hız alanını dikkate alınız. Bu akış alanındaki basıncı x ve y 'nin fonksiyonu olarak bulunuz.

ÇÖZÜM Verilen bir hız alanı için basınç alanını hesaplayacağız.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. 2 Akışkan özellikleri sabittir. 3 Akış xy -düzleminde iki-boyutludur. 4 Yerçekimi ivmesi x - ve y -yönünde etkili değildir.

Analiz İlk olarak verilen hız alanının iki-boyutlu sıkıştırılamaz süreklilik denklemini sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_a + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-a} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0 \text{ (2-B)}} = a - a = 0 \quad (1)$$

Buna göre verilen hız alanı için süreklilik denklemi sağlanmaktadır. Eğer süreklilik denklemini *sağlanmasaydı* analizi burada sonlandırmamız gerekirdi. Böyle bir durumda verilen hız alanı fiziksel olarak mümkün olamazdı ve bu nedenle basınç alanını hesaplayamazdık.

Şimdi de Navier-Stokes denkleminin y -bileşenini ele alalım:

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{0 \text{ (daimi)}} + \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x}}_{(ax+b)c} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial y}}_{(-ay+cx)(-a)} + \underbrace{w \frac{\partial v}{\partial z}}_{0 \text{ (2-B)}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\rho g_y}_0 + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{0 \text{ (2-B)}} \right)$$

Böylece y -momentum denklemi,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho(-acx - bc - a^2y + acx) = \rho(-bc - a^2y) \quad (2)$$

haline indirgenir. Eğer Denklem 2'yi sağlayacak bir basınç alanı oluşturabilirsek, y -momentum denklemi sağlanır. Benzer yolla x -momentum denklemi,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(-a^2x - ab) \quad (3)$$

olarak elde edilir. Eğer Denklem 3'ü sağlayan bir basınç alanı oluşturabilirsek x -momentum denklemi de sağlanır. Daimi bir akış çözümünün var olabilmesi için P 'nin zamanın fonksiyonu olmaması gerekir. Ayrıca fiziksel olarak gerçekçi, sıkıştırılamaz bir akış alanı x ve y 'nin düzgün bir fonksiyonu olan bir $P(x,y)$ basınç alanının bulunmasını gerektirir. Matematiksel olarak bu, türev alma sırasının (önce x 'e sonra y 'ye göre veya önce y 'ye sonra x 'e göre) önemli olmaması anlamına gelir (Şekil 9-46). Bunun böyle olup olmadığını kontrol etmek için Denklem 2 ve 3'ün çapraz türevleri alınır,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

olduğu görülür. Denklem 4, P 'nin x ve y 'nin düzgün bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Böylece *verilen hız alanı, daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemini sağlar.*

Eğer analizin bu aşamasında basıncın çapraz türevleri birbiriyle uyuşmayan iki ifade vermiş olsaydı, diğer bir anlatımla Şekil 9–46’daki denklem sağlanmasaydı; bu durumda verilen hız alanının daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz Navier-Stokes denklemini sağlamadığı sonucuna ulaşacak ve böylece daimi bir basınç alanı hesaplamaya çalışmaktan vazgeçecektik. $P(x,y)$ ’yi hesaplamak için Denklem 2’nin y ’ye göre integralini alalım:

y-momentumdan elde edilen basınç alanı:

$$P(x, y) = \rho \left(-bcy - \frac{a^2 y^2}{2} \right) + g(x) \quad (5)$$

Bu bir kısmi integral olduğundan (yani P , x ’e de bağlı olduğundan), keyfi bir integral sabiti yerine diğer değişkene bağlı bir fonksiyonu eklediğimize dikkat ediniz. Şimdi de Denklem 5’in x ’e göre kısmi türevini alalım ve çıkan sonucu Denklem 3’e eşitleyelim:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g'(x) = \rho(-a^2 x - ab) \quad (6)$$

Çapraz Türev Alma, xy -Düzlemi

Türev alma sırası sonucu değiştirmiyorsa, $P(x, y)$, x ve y ’nin düzgün bir fonksiyonudur:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}$$

xy-düzleminde iki-boyutlu bir akış alanında P basıncının düzgün bir fonksiyon olup olmadığını anlamak için çapraz türeve başvurulur.

Bu kez de Denklem 6'yı $g(x)$ fonksiyonunu elde etmek üzere integre edersek,

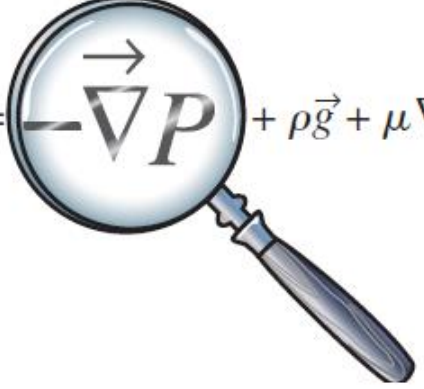
$$g(x) = \rho \left(-\frac{a^2 x^2}{2} - abx \right) + C_1 \quad (7)$$

elde ederiz. Burada C_1 keyfi integral sabitidir. Son olarak $P(x,y)$ ifademizi elde etmek üzere Denklem 7'yi Denklem 5'te yerine koyuyoruz:

$$P(x,y) = \rho \left(-\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a^2 y^2}{2} - abx - bcy \right) + C_1 \quad (8)$$

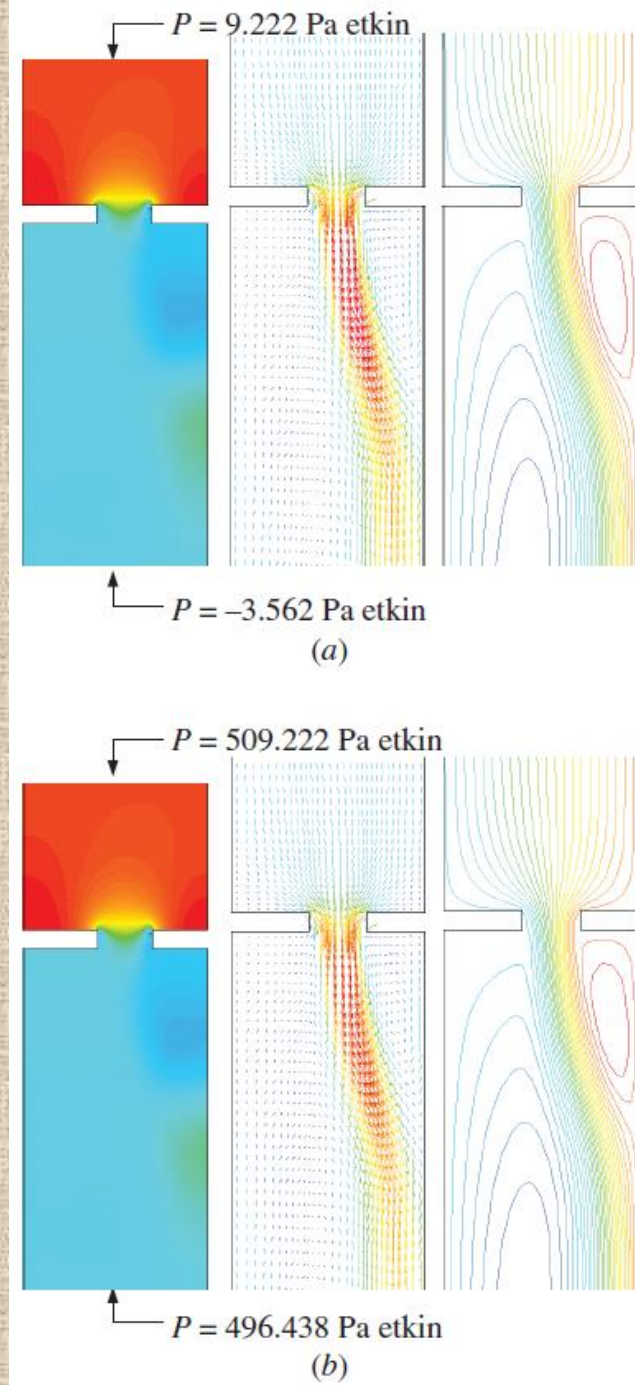
İrdeleme Pratik yapmak ve işlemlerimizi kontrol etmek için Denklem 8'in x ve y 'ye göre türevlerini alarak Denklem 2 ve 3 ile karşılaştırınız. Ayrıca Denklem 8'i, Denklem 2 yerine, Denklem 3'ten başlayarak elde etmeye çalışınız. Aynı sonucu bulmalısınız.

Sıkıştırılamaz bir akışta hız alanı, basıncın mutlak büyüklüğünden değil sadece basınç farklarından etkilenir.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$


Sıkıştırılamaz Navier-Stokes denkleminde basınç sadece bir gradyen olarak ortaya çıktığından basıncın mutlak büyüklüğü önemsizdir-sadece basınç *farkları* önemlidir.

Boğazlı bir kanaldan aşağıya doğru olan hava akışına ait basınç konturu, hız vektörü ve akım çizgileri: (a) 1 durumu (b) basıncın her yerde 500 Pa artması dışında, 1 durumu ile özdeş 2 durumu. Kontur çizimlerinde mavi düşük basıncı/hızı, kırmızı ise yüksek basıncı/hızı ifade etmektedir.



Sonuç olarak HAD programlarının çoğunda, Örnek 9–13’te yaptığımız gibi basıncın Navier-Stokes denklemini integre ederek *hesaplanmadığı* not edilmelidir. Bunun yerine bir tür **basıncı düzeltme algoritması** kullanılır. Kullanılan bu algoritmaların çoğu, basınç terimi bir şekilde süreklilik denkleminde yer alacak şekilde süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerinin birleştirilmesi esasına göre çalışır. En yaygın kullanılan basınç düzeltme algoritmaları, basınçta bir iterasyondan (n) diğerine ($n + 1$) meydana gelen değişimi (ΔP), bir **Poisson denklemi** biçiminde verir.

$$\Delta P \text{ için Poisson denklemi:} \quad \nabla^2(\Delta P) = \text{RHS}_{(n)} \quad (9-64)$$

Ardından bilgisayar bir çözüme doğru iterasyon yaptıkça, değiştirilmiş süreklilik denklemi, basıncın (n) iterasyonundaki değerlerinden hareketle ($n + 1$) iterasyonundaki basınç alanını “düzeltmek” için kullanılır:

$$P \text{ için düzeltme:} \quad P_{(n+1)} = P_{(n)} + \Delta P$$

Basıncı düzeltme algoritmalarının gelişimiyle ilgili ayrıntılar bu kitabın konusu dışındadır. İki-boyutlu akışlar için bir örnek Gerhart, Gross ve Hochstein (1992) tarafından geliştirilmiştir.

ÖRNEK 9-14

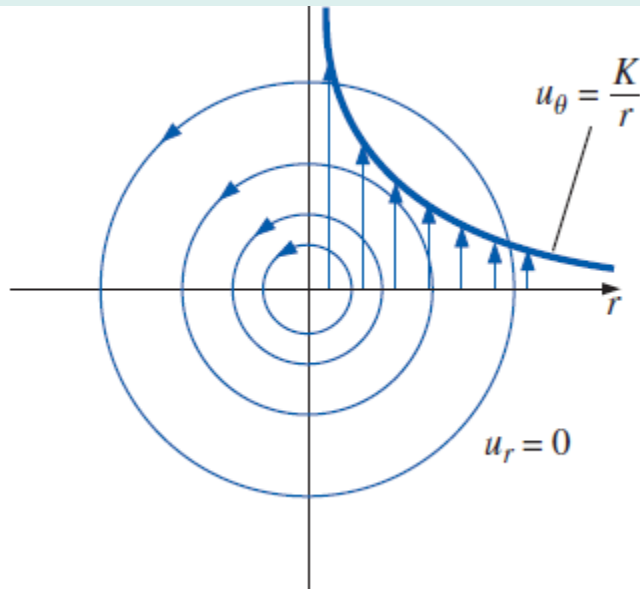
Silindirik Koordinatlarda Basınç Alanının Hesaplanması

Örnek 9-5'te verilen daimi, iki-boyutlu sıkıştırılamaz akış alanını $f(\theta, t)$ için göz önüne alınız. Bu, eksenini z-koordinatı boyunca uzanan bir çizgisel vorteksi temsil eder (Şekil 9-49). Hız bileşenleri $u_r = 0$ ve $u_\theta = K/r$ olup K bir sabittir. Basıncı r ve θ 'nın fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Analiz Akış alanı hem süreklilik hem de momentum denklemini sağlamalıdır (Denklem 9-62). Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz akış için süreklilik denklemi şöyledir:

Sıkıştırılamaz süreklilik denklemi:

$$\frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}}_0 + \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}_0 + \underbrace{\frac{\partial(u_z)}{\partial z}}_0 = 0$$



Bir çizgisel vortekse ait akım çizgileri ve hız vektörleri

Böylece sıkıştırılamaz süreklilik denklemi sağlanmış olur. Şimdi de Navier - Stokes denkleminin θ bileşenine (Denklem 9-62c) göz atalım:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\underbrace{\frac{\partial u_\theta}{\partial t}}_{0 \text{ (daimi)}} + \underbrace{u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r}}_{(0) \left(-\frac{K}{r^2}\right)} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}_{\left(\frac{K}{r^2}\right)(0)} + \underbrace{\frac{u_r u_\theta}{r}}_0 + \underbrace{u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z}}_{0 \text{ (2-B)}} \right) \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \underbrace{\rho g_\theta}_0 + \mu \left(\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)}_{\frac{K}{r^3}} - \underbrace{\frac{u_\theta}{r^2}}_{\frac{K}{r^3}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}}_0 + \underbrace{\frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}}_{0 \text{ (2-B)}} \right)
 \end{aligned}$$

Buna göre θ -momentum denklemi,

$$\theta\text{-momentum:} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

haline indirgenir. Eğer Denklem 1'i sağlayacak uygun bir basınç alanı bulunursa momentum denklemi de sağlanır. Benzer şekilde, r -momentum bileşeni (Denklem 9-62b),

$$r\text{-momentum:} \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{K^2}{r^3} \quad (2)$$

olarak elde edilir. Böylece Denklem 2'yi sağlayan bir basınç alanı oluşturulursa r -momentum denklemi de sağlanmış olur.

Daimi bir akışın çözümünün olması için P 'nin zamana bağlı olmaması gerekir. Ayrıca fiziksel olarak gerçekçi bir daimi sıkıştırılamaz akış alanı, r ve θ 'nın düzgün bir fonksiyonu olan bir basınç alanını gerektirir. Bu da matematiksel olarak türev alma sırasının (önce r 'ye sonra θ 'ya veya önce θ 'ya sonra r 'ye göre) bir öneminin olmaması anlamını taşır (Şekil 9–50). Bu durumu basıncın çapraz türevini alarak kontrol edelim:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (3)$$

Denklem 3, P 'nin r ve θ 'ya bağlı düzgün bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. Böylece verilen hız alanı, daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemini sağlar.

$P(r, \theta)$ için bir ifade elde etmek üzere Denklem 1'i θ 'ya göre integre edelim:

$$\theta\text{-momentum denkleminde elde edilen basınç alanı: } P(r, \theta) = 0 + g(r) \quad (4)$$

Bu bir kısmi integral işlemi olduğundan ifadenin sonuna integral sabiti yerine diğer değişken olan r 'ye bağlı keyfi bir fonksiyon eklediğimize dikkat ediniz. Denklem 4'ün r 'ye göre türevini alıp Denklem 2'ye eşitleyerek,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = g'(r) = \rho \frac{K^2}{r^3} \quad (5)$$

Çapraz Türev Alma, $r\theta$ -Düzlemi

Türev alma sırası sonucu değiştirmiyorsa $P(r, \theta)$ r ve θ 'nın düzgün bir fonksiyonudur

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial r}$$

$r\theta$ -düzleminde iki-boyutlu akış alanı için çapraz türev olarak P basıncının düzgün bir fonksiyon olup olmadığı görülebilir.

sonucuna varılır. $g(r)$ fonksiyonunu bulmak için Denklem 5'i integre edelim:

$$g(r) = -\frac{1}{2} \rho \frac{K^2}{r^2} + C \quad (6)$$

Burada C keyfi bir integral sabitidir. Son olarak $P(r, \theta)$ ifadesine ulaşmak için Denklem 6'yı Denklem 4'te yerine yazalım:

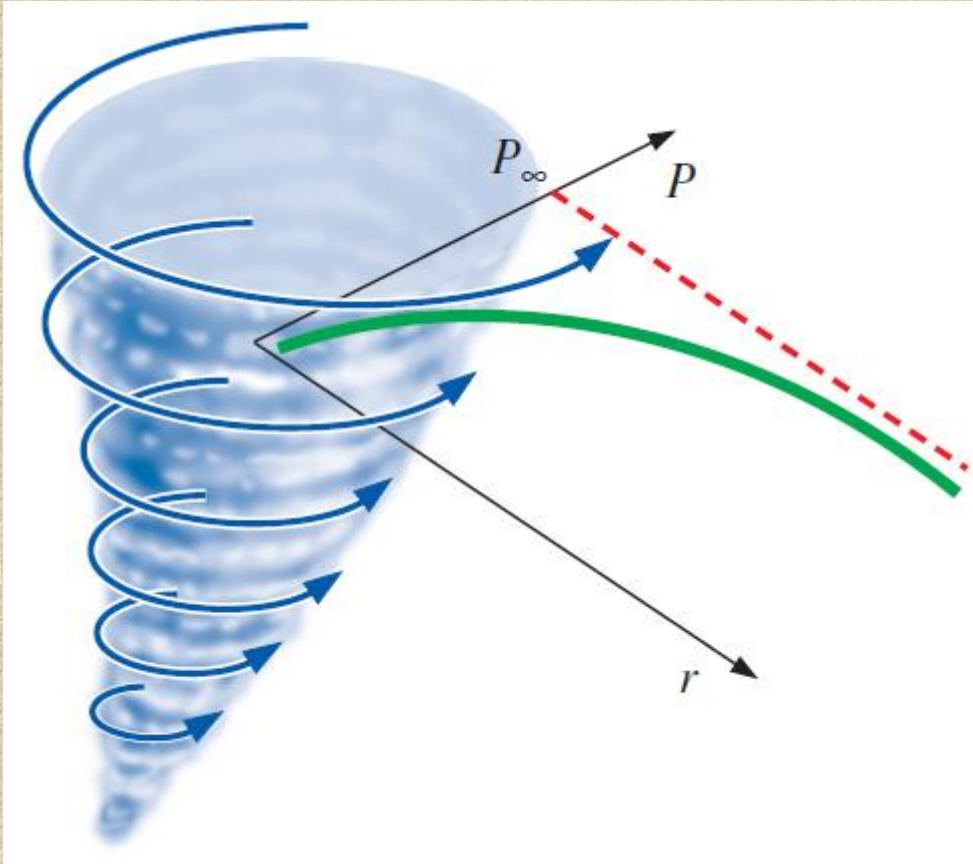
$$P(r, \theta) = -\frac{1}{2} \rho \frac{K^2}{r^2} + C \quad (7)$$

Bu sonuca göre çizgisel bir vortekste basınç alanı orijine yaklaştıkça $1/r^2$ uyarınca azalmaktadır. (Orijinin kendisi tekil noktadır). Bu akış alanı bir hortum veya kasırganın basit bir modelidir ve merkezindeki düşük basınç “kasırga gözü”dür (Şekil 9–51). Bunun bir dönümsüz akış olduğunun, dolayısıyla Bernoulli denkleminin de basıncı bulmak için kullanılabileceğinin altını çizelim. Eğer hızın sıfıra yaklaştığı orijinden çok uzakta bulunan bir noktadaki ($r \rightarrow \infty$) basınca P_∞ dersek, Bernoulli denklemi orijinden r mesafede,

$$\text{Bernoulli denklemi:} \quad P + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_\infty \quad \rightarrow \quad P = P_\infty - \frac{1}{2} \rho \frac{K^2}{r^2} \quad (8)$$

olduğunu gösterir. Eğer C yerine P_∞ alırsak Denklem 8, Navier-Stokes denkleminde bulduğumuz sonuç olan Denklem 7 ile aynıdır. Orijin civarında dönümlü bir akış bölgesi olsaydı, buradaki tekillik ortadan kalkacak ve fiziksel olarak daha gerçekçi bir hortum modeli elde edecektik.

İrdeleme Uygulama olarak Denklem 7'yi Denklem 1 yerine Denklem 2'den başlayarak elde etmeye çalışın; aynı sonucu bulmalısınız.



İki-boyutu çizgisel vorteks, hortumun basit bir yaklaşımıdır; en düşük basınç vorteksin merkezindedir.

Süreklilik ve Navier-Stokes Denklemlerinin Tam Çözümleri

Sınır koşulları:

Kaymazlık sınır şartı:

$$\vec{V}_{\text{akışkan}} = \vec{V}_{\text{çeper}}$$

Adım 1: İlgili tüm boyutları ve parametreleri tespit ederek problem ve geometriyi (çizimler yardımcı olur) tanımlayın

Adım 2: Uygun olan tüm kabulleri, basitleştirmeleri ve sınır şartlarını sıralayın

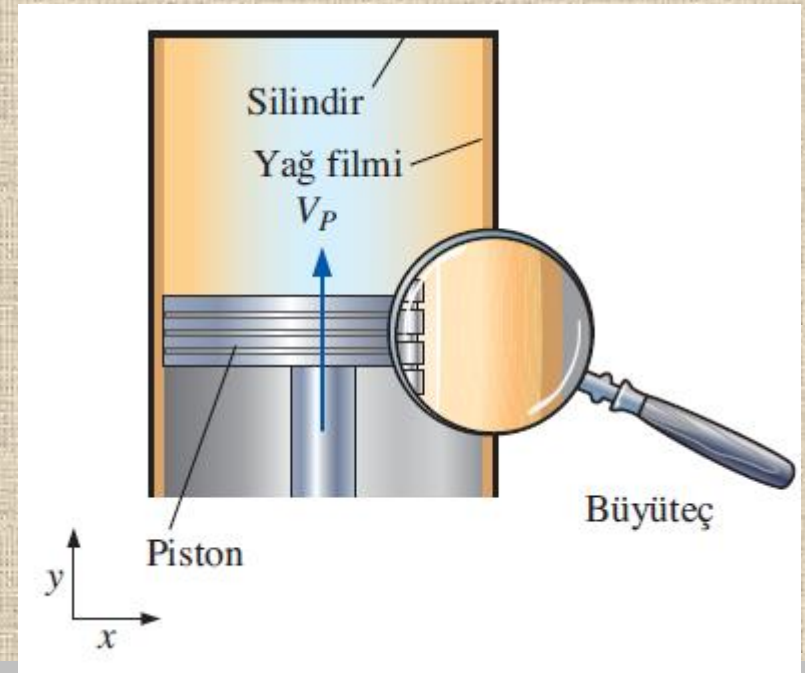
Adım 3: Diferansiyel hareket denklemlerini (süreklilik ve Navier-Stokes) mümkün olduğunca basitleştirin

Adım 4: Denklemleri integre ederek bir veya daha fazla integral sabitine bağlı ifadeler elde edin

Adım 5: İntegral sabitlerini bulmak için sınır şartlarını uygulayın

Adım 6: Sonuçlarınızı doğrulayın

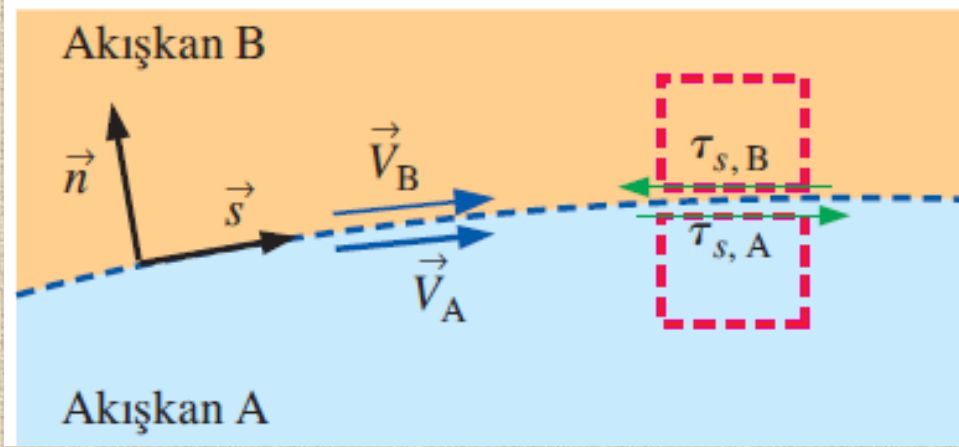
Sıkıştırılamaz süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde izlenecek yol.



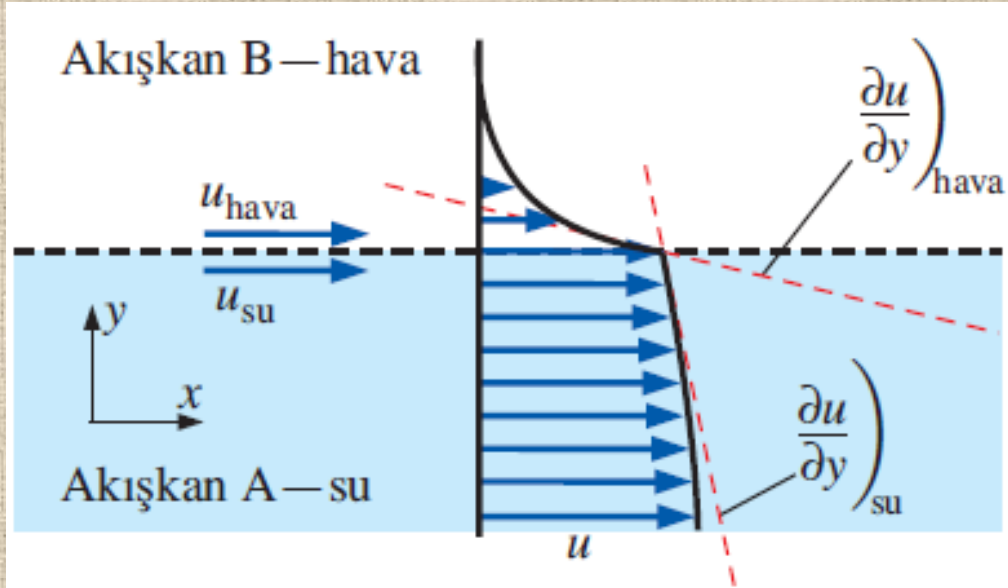
Bir silindir içerisinde V_P hızıyla hareket eden bir piston. Piston ile silindir arasında ince bir yağ filmi bulunmaktadır; şekilde film büyütülmüş olarak gösterilmektedir. *Kaymazlık sınır şartı* çepere bitişik akışkanın hızının çeperin hızına eşit olmasını gerektirir.

Ara yüz sınır şartları:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B \quad \text{ve} \quad \tau_{s,A} = \tau_{s,B}$$



İki farklı akışkanın arayüzünde akışkanların hızları birbirine eşit olmalıdır. Ayrıca arayüzdeki paralel kayma gerilmeleri de her iki akışkanda eşit olmalıdır.



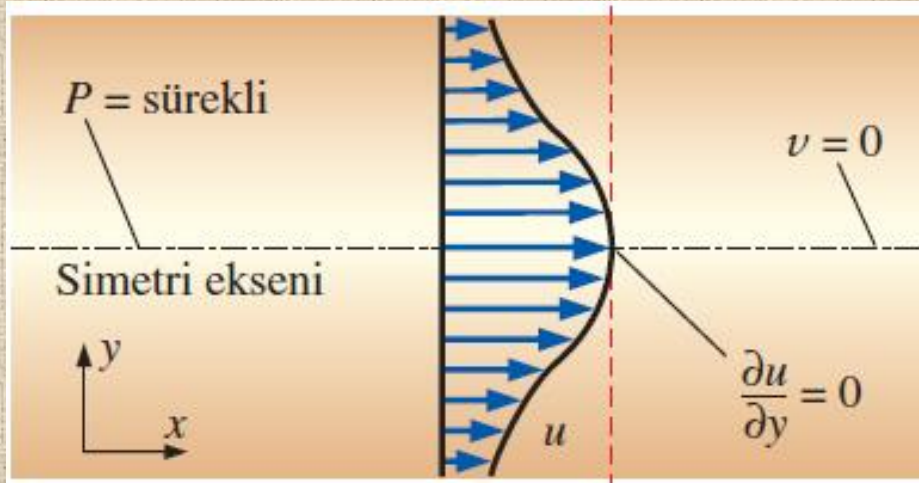
Su/hava yatay serbest yüzeyi boyunca hava ve suyun hızları ve kayma gerilmeleri birbirine eşit olmalıdır. Bununla birlikte $\mu_{\text{hava}} \ll \mu_{\text{su}}$ olduğundan, su yüzeyindeki kayma gerilmelerini ihmal edilebilir derecede küçük kabul etmek doğru bir yaklaşımdır.

Su-hava arayüzünde sınır şartları:

$$u_{\text{su}} = u_{\text{hava}} \quad \text{ve} \quad \tau_{s, \text{su}} = \mu_{\text{su}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{su}} = \tau_{s, \text{hava}} = \mu_{\text{hava}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{hava}}$$

Serbest yüzey sınır şartları:

$$P_{\text{siv}} = P_{\text{gaz}} \quad \text{ve} \quad \tau_{s, \text{siv}} \cong 0$$



Bir simetri düzlemi boyunca sınır şartları, simetri düzleminin bir tarafındaki akış alanının diğer tarafındaki akış alanının *aynadaki* görüntüsü olacak şekilde tanımlanır. Şekilde yatay simetri düzlemi gösterilmiştir.

Diğer sınır şartları problemin kurulumuna bağlı olarak ortaya çıkar. Örneğin sıklıkla **giriş sınır şartlarını**, akışkanın giriş yaptığı bir akış bölgesinin sınırında tanımlama gereği duyarız.

Benzer şekilde **çıkış sınır şartlarını** da bölgeyi terk eden akış üzerinde tanımlarız.

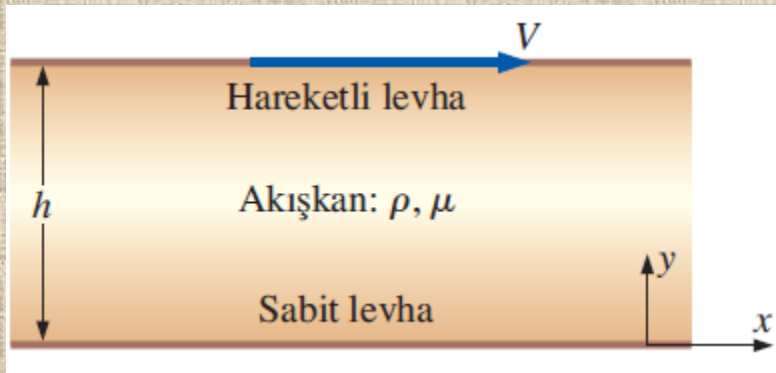
Simetri sınır şartları, bir eksen veya simetri düzlemi boyunca yararlıdır.

Daimi olmayan akış problemleri için ayrıca **başlangıç şartlarına** (başlangıç anındaki durum, genellikle $t = 0$) ihtiyacımız olur.

ÖRNEK 9-15 Tam Gelişmiş Couette Akışı

Sonsuz genişlikte iki paralel levha arasındaki dar boşlukta Newton tipi bir akışkana ait daimi, sıkıştırılamaz, laminar akışı dikkate alalım (Şekil 9-57). Üsteki levha V hızıyla hareket ederken alttaki levha sabittir. Bu iki levha arasındaki mesafe h olup yerçekimi negatif z -yönünde (Şekil 9-57’te sayfa düzlemi içine doğru) etki etmektedir. Yerçekiminden doğan hidrostatik basınç

dışında uygulanan bir basınç yoktur. Bu akış **Couette akışı** olarak bilinir. Hız ve basınç alanlarını hesaplayınız ve alt levhaya birim alan başına uygulanan kayma kuvvetini belirleyiniz.



Örnek 9-15’in geometrisi: İki adet sonsuz büyüklükteki levha arasındaki viskoz akış; üst levha hareket ederken alt levha sabit durmaktadır.

Analiz Hız ve basınç alanlarını elde etmek için Şekil 9-52’de özetlenen yolu izleyeceğiz.

Adım 1 *Problemi ve geometriyi tanımlayın.* Şekil 9-57’ye bakınız.

Adım 2 *Kabulleri ve sınır şartlarını sıralayın.* Yedi tane kabul numaralandırdık ve sıraladık. Sınır şartları, kaymazlık şartının uygulanmasıyla elde edilir: (1) Alt levhada ($y = 0$), $u = v = w = 0$. (2) Üst levhada ($y = h$), $u = V$, $v = 0$ ve $w = 0$.

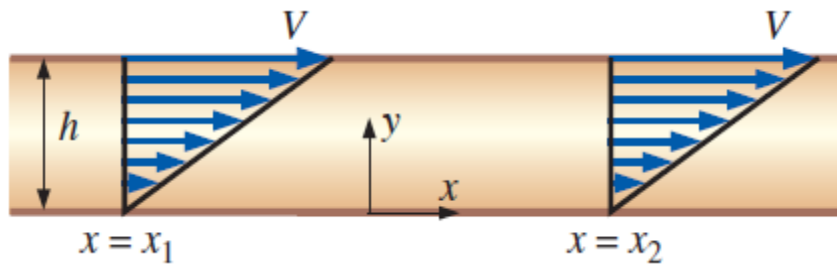
Adım 3 Diferansiyel denklemleri sadeleştirin. Buna kartezyen koordinatlardaki sıkıştırılmaz süreklilik denklemiyle başlayalım (Denklemler 9–61a):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{kabul 6}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Denklemler 1, u 'nın x 'e bağlı olmadığını ifade etmektedir. Diğer bir ifadeyle, orijini nereye yerleştireceğimizin bir önemi yoktur, akış x 'in her konumunda aynı kalmaktadır. **Tam gelişmiş** ifadesi genellikle bu durumu tanımlamak için kullanılır (Şekil 9–56). Bu sonuç ayrıca levhalar sonsuz uzunlukta olduğundan herhangi bir x konumunda özel bir durumun bulunmadığını ifade eden Kabul 1'den de elde edilebilir. Buna ek olarak u zamanın (Kabul 2) veya z 'nin (Kabul 6) fonksiyonu olmadığından, sadece y 'nin fonksiyonudur.

Süreklilik denkleminin sonucu:

$$u = u(y) \quad (2)$$



Hız profilinin aşağıdaki mesafesi ile değişmediği tam gelişmiş akış alanı bölgesi. Tam gelişmiş akışlara uzun ve düz kanallar ile borularda rastlanır. Şekilde tam gelişmiş Couette akışı gösterilmiştir. Burada x_2 'deki hız profili x_1 'deki hız profili ile aynıdır.

Şimdi de x -momentum denklemini mümkün olduğunca sadeleştirelim. Bir terimin üzerini çizerken aşağıda yaptığımız gibi bunun nedenini altına yazmak faydalıdır:

$$\begin{aligned} \rho \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)}_{\text{kabul 2}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{süreklilik}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{kabul 6}} = \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{kabul 5}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{kabul 7}} \\ + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}_{\text{süreklilik}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{kabul 6}} \rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Maddesel türevin (Denklem 3'ün sol tarafı) sıfır olduğuna ve bunun akışkan parçacıklarının akış alanında hem zamana bağlı yerel ivmeye hem de taşınım ivmesine sahip olmadıkları anlamına geldiğine dikkat ediniz. Taşınım ivmesi terimleri Navier-Stokes denklemini lineer olmaktan çıkardığı için bu terimlerin ortadan kalkması problemi önemli ölçüde basitleştirmektedir. Gerçekten de tek bir viskoz terim hariç Denklem 3'deki diğer tüm terimler yok olmuş, bunun sonucunda da kalan tek viskoz terim sıfır olmak durumunda kalmıştır. Ayrıca, Denklem 2'nin doğrudan bir sonucu olarak Denklem 3'teki kısmi türev ($\partial/\partial y$), toplam türeve (d/dy) dönüşmüştür. Burada ayrıntıya girmeyeceğiz ancak benzer bir yolla y -momentum denklemindeki (Denklem 9–61c) terimlerin de tümünün sıfıra gittiğini gösterebilirsiniz. Bunun sonucunda da,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

elde edilir. Diğer bir ifadeyle basınç P , y 'nin fonksiyonu değildir. P ayrıca zamanın (Kabul 2) veya x 'in (Kabul 5) fonksiyonu da olmadığından sadece z 'nin fonksiyonudur.

y-momentum denkleminin sonucu:

$$P = P(z) \quad (5)$$

Son olarak Kabul 6'yı dikkate alarak z-momentum denkleminde (Denklem 9-61d)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (6)$$

elde edilir. Burada kısmi türevden toplam türeve geçmek için Denklem 5'i kullandık.

Adım 4 *Diferansiyel denklemleri çözün.* Süreklilik ve y-momentum denklemleri zaten “çözülmüş” ve bunun sonucunda sırasıyla Denklem 2 ve 5 elde edilmiştir. Denklem 3'ün (x-momentum) iki kez integrali alınarak,

$$u = C_1 y + C_2 \quad (7)$$

bulunur. Burada C_1 ve C_2 integral sabitleridir. Denklem 6 bir kez integre edilerek, aşağıdaki gibi bulunur.

$$P = -\rho g z + C_3 \quad (8)$$

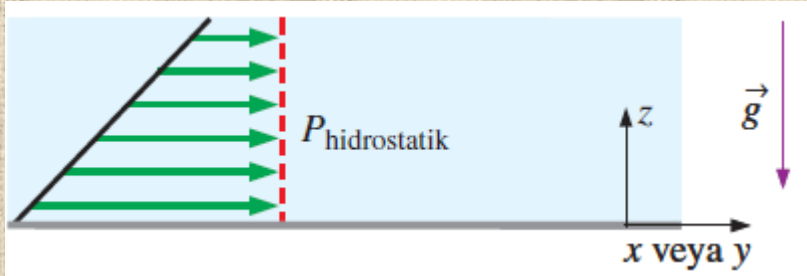
Adım 5 *Sınır şartlarını uygulayın.* Denklem 8 ile başlayalım. Basınç için bir sınır şartı belirtmediğimizden, C_3 bir sabit olarak kalabilir. (Sıkıştırılmaz akış için mutlak basıncın, sadece akış içerisinde bir noktadaki P basıncı biliniyorsa belirlenebileceğini hatırlayınız). Örneğin $z = 0$ 'da $P = P_0$ alırsak bu durumda $C_3 = P_0$ olur ve Denklem 8,

Basınç alanı için nihai çözüm: $P = P_0 - \rho g z \quad (9)$

halini alır. Dikkatli okurlar Denklem 9'un basit bir **hidrostatik basınç dağılımını** temsil ettiğini (z arttıkça lineer olarak azalan basınç) fark edeceklerdir. En azından bu problem için *hidrostatik basıncın akıştan bağımsız olarak etki ettiği* sonucuna ulaşıyoruz. Daha genel olarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz (Ayrıca, bkz. Şekil 9-59):

Serbest yüzey içermeyen sıkıştırılamaz akış alanındaki hidrostatik basıncın akış alanının dinamiğine etkisi yoktur.

Bu nedenle Bölüm 10'da, toplam basınç terimini kullanarak hareket denklemlerindeki hidrostatik basınç terimini nasıl *yok edilebileceğini* göstereceğiz.



Serbest yüzey içermeyen sıkıştırılamaz akış alanındaki hidrostatik basıncın akış alanının dinamiğine etkisi yoktur.

Şimdi de C_1 ve C_2 sabitlerini bulmak için adım 2'den (1) ve (2) sınır şartlarını uygulayalım.

Sınır şartı (1): $u = C_1 \times 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$

ve

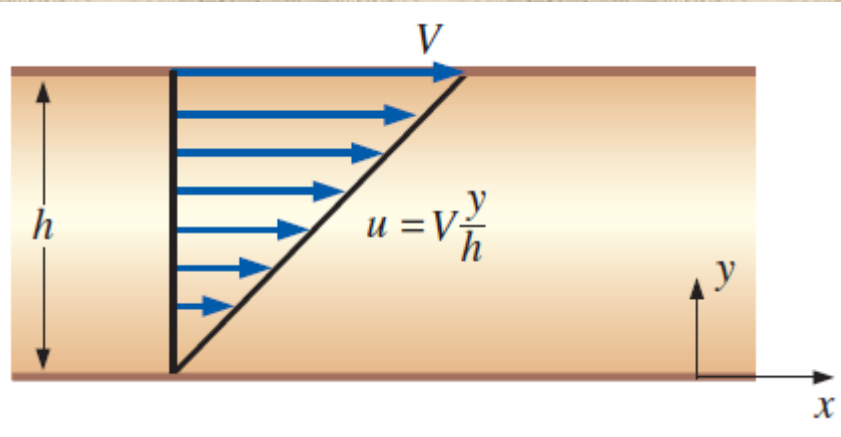
Sınır şartı (2): $u = C_1 \times h + 0 = V \rightarrow C_1 = V/h$

Son olarak Denklem 7,

Hız alanı için nihai sonuç : $u = V \frac{y}{h} \quad (10)$

halini alır. Bulunan hız alanı Şekil 9–60'den görüldü gibi, alt levhada $u = 0$ 'dan üst levhada $u = V$ 'ye kadar değişen lineer bir hız profili ortaya koymaktadır.

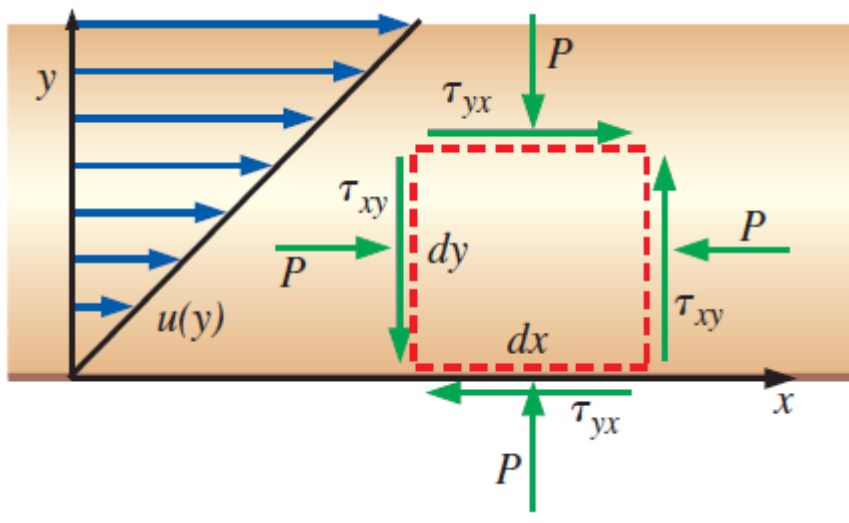
Adım 6 Sonuçları doğrulayın. Denklem 9 ve 10'u kullanarak tüm diferansiyel denklemlerin ve sınır şartlarının sağlandığını gösterebilirsiniz.



Örnek 9–15'deki lineer hız profili: Paralel iki levha arasındaki Couette akışı.

Alt levhaya birim alan başına etkiyen kayma kuvvetini hesaplamak için alt yüzü alt levhayla temas halinde bulunan dikdörtgen şeklinde bir akışkan elemanı göz önüne alalım (Şekil 9–61). Matematiksel olarak pozitif olan viskoz gerilmeler şekil üzerinde gösterilmiştir. Verilen durumda diferansiyel elemanın üzerindeki akışkan elemanı sağa doğru çekerken; elemanın altındaki çeper elemanı sola doğru çekmektedir. Şekil 9–61'de gösterilen gerilme yönleri buna uygun olarak seçilmiştir. Denklem 9–56'dan viskoz gerilme tensörünün bileşenlerini yazalım:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \frac{V}{h} & 0 \\ \mu \frac{V}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$



Alt yüzü Örnek 9-15'deki alt lavha ile temas halinde bulunan dikdörtgen şeklindeki iki-boyutlu diferansiyel akışkan elemanına etkiyen gerilmeler

Gerilmenin tanımı birim alana etkiyen kuvvet olduğundan, taban yüzeyinde birim alan başına etki eden kuvvet $\tau_{yx} = \mu V/h$ değerine eşittir ve şekilde gösterildiği gibi negatif x-yönünde etkir. Çeperde birim alan başına kayma kuvveti ise buna eşit ve zıt yöndedir (Newton'un üçüncü yasası). Buradan,

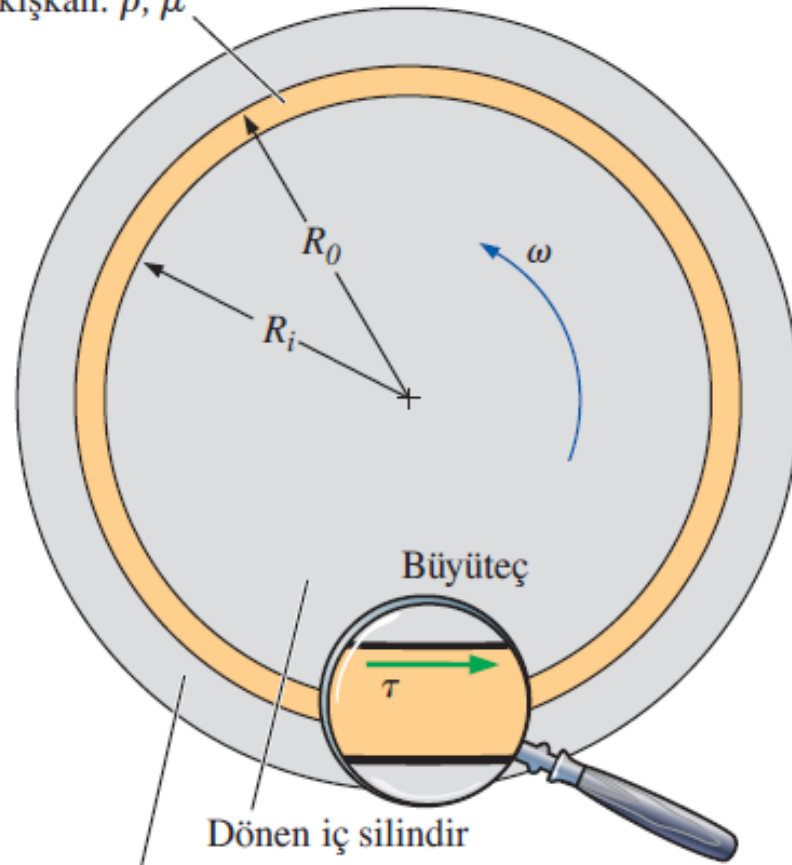
Çeperde birim alan başına etkiyen kayma kuvveti:

$$\frac{\vec{F}}{A} = \mu \frac{V}{h} \vec{i} \quad (12)$$

elde edilir. Bu kuvvetin yönü sezgilerimizle uyuşmaktadır; yani akışkan viskoz etkilerden (sürtünme) dolayı alt çeperi sağa doğru çekmeye çalışmaktadır.

İrdeleme Lineer momentum denkleminin z-bileşeni, geri kalan denklere bağlı değildir. Bu durum akışkanın statik halde olmamasına ve hareket halinde bulunmasına rağmen, neden bir hidrostatik basınç dağılımı elde ettiğimizi açıklamaktadır. Denklem 11 viskoz gerilme tensörünün sadece alt çeperde değil akış alanının her yerinde sabit olduğunu göstermektedir (τ_{ij} 'nin bileşenlerinden hiç birinin konuma bağlı olmadığına dikkat ediniz).

Akışkan: ρ, μ



Sabit dış silindir

Dönen iç silindir

Dönel bir viskozimetre: İçteki silindire $T_{\text{uygulanan}}$ momenti uygulanarak ω açısal hızıyla döndürülmekte ve buradan akışkanın viskozitesi hesaplanmaktadır.

$$\tau = \tau_{yx} \cong \mu \frac{V}{R_o - R_i} = \mu \frac{\omega R_i}{R_o - R_i}$$

$$T_{\text{viskoz}} = \tau A R_i \cong \mu \frac{\omega R_i}{R_o - R_i} (2\pi R_i L) R_i$$

Akışkan viskozitesi:

$$\mu = T_{\text{uygulanan}} \frac{(R_o - R_i)}{2\pi\omega R_i^3 L}$$

ÖRNEK 9-16

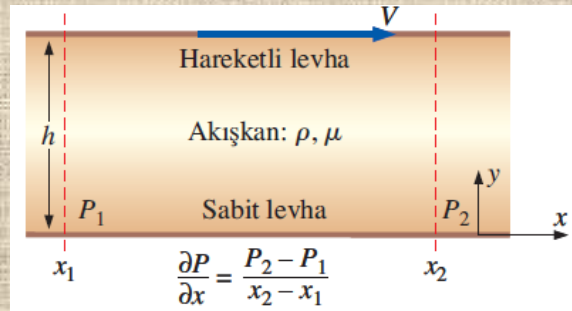
Basınç Gradyeni Uygulanmış Couette Akışı

Örnek 9-15'teki geometriyi tekrar göz önüne alınız, ancak bu sefer x 'e göre sabit olan basınç yerine, x -yönünde bir basınç gradyeni bulunsun. (Şekil 9-63) x -yönündeki bu basınç gradyeninin ($\partial P/\partial x$) sabit kaldığını ve

Uygulanan basınç gradyeni:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{sabit} \quad (1)$$

ile verildiğini varsayalım. Burada x_1 ve x_2 , x -ekseni boyunca keyfi iki konum; P_1 ve P_2 ise bu noktalardaki basınçlardır. Geri kalan her şey Örnek 9-15'tekilerle aynıdır. (a) Hız ve basınç alanını hesaplayınız. (b) Boyutsuz biçimde hız profili ailesi çizin.



ŞEKİL 9-63

Örnek 9-16'nın geometrisi: $\partial P/\partial x$ büyüklüğünde sabit bir basınç gradyeninin uygulanması ile iki sonsuz büyüklükteki levha arasında oluşan viskoz akış. Üst levha hareketli alt levha ise sabittir.

Analiz (a) Örnek 9-15'te izlenen yolun aynısını izleyeceğiz. Çoğu cebirsel işlemler aynı olduğundan sadece farklılıklara değinelim.

Adım 1 Şekil 9-63'e bakınız.

Adım 2 Kabul 5 hariç Örnek 9-15'tekilerle aynıdır.

Adım 3 Süreklilik denklemi Örnek 9-15'te olduğu gibi aynı şekilde sadeleştirilir.

Süreklilik denklemi sonucu:

$$u = u(y) \quad (2)$$



ŞEKİL 9–64

Kısmi integral hakkında bir uyarı.

x -momentum denklemi Örnek 9–15'te olduğu gibi sadeleştirilir, ancak bu sefer basınç gradyeni terimi tutulur. Bu durumda sonuç,

$$x\text{-momentum sonucu:} \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3)$$

olur. Benzer şekilde y -momentum ve z -momentum denklemleri de,

$$y\text{-momentum sonucu:} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

ve

$$z\text{-momentum sonucu:} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (5)$$

şeklinde sadeleştirilir. Denklem 5'teki basınç gradyeni terimini, P 'nin hem x 'e hem de z 'ye bağlı olmasından ötürü kısmi türevden toplam türeve dönüştüremeyiz. Bu durum P 'nin sadece z 'ye bağlı olduğu Örnek 9–15'ten farklıdır.

Adım 4 Denklem 3'ü (x -momentum) $(\partial P / \partial x)$ 'in bir sabit olduğunu göz önüne alarak iki kez integre edelim:

$$x\text{-momentumun integrali:} \quad u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (6)$$

Burada C_1 ve C_2 integral sabitleridir. Denklem 5 (z -momentum) bir kez integre edilerek

$$z\text{-momentumun integrali:} \quad P = -\rho g z + f(x) \quad (7)$$

elde edilir. P 'nin hem x 'in hem de z 'nin fonksiyonu olmasından dolayı, Denklem 7'de bir integral sabiti yerine x 'e bağlı bir fonksiyon eklediğimize dikkat ediniz. Bu z 'ye göre bir *kısmi* integral işlemidir ve kısmi integral işlemleri yaparken dikkatli olunmalıdır (Şekil 9–64).

Adım 5 Denklem 7'den basıncın z -yönünde hidrostatik olarak değiştiği görülmektedir ve basınç için x -yönünde lineer bir değişim verilmiştir. Buna göre $f(x)$, bir sabit ile $\partial P / \partial x$ 'in x ile çarpımının toplamına eşit olmalıdır. Eğer $(x = 0, z = 0)$ çizgisi (y -ekseni) boyunca $P = P_0$ alırsak Denklem 7,

$$\text{Basınç alanı için nihai sonuç:} \quad P = P_0 + \frac{\partial P}{\partial x} x - \rho g z \quad (8)$$

halini alır. Şimdi de C_1 ve C_2 sabitlerini bulmak için Örnek 9–15’in 2’inci adımından (1) ve (2) hız sınır şartlarını uygulayalım:

Sınır şartı (1):

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \times 0 + C_1 \times 0 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

ve

Sınır şartı (2):

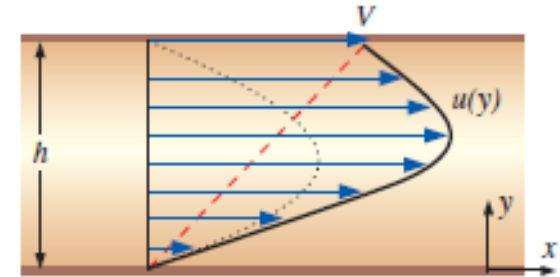
$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h^2 + C_1 \times h + 0 = V \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{V}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h$$

Sonuç olarak Denklem 6,

$$u = \frac{Vy}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - hy) \quad (9)$$

olarak elde edilir. Denklem 9, hız alanının iki farklı profilin toplamından (süperpozisyonundan) oluştuğunu göstermektedir. Bunlar; alt levhada $u = 0$ ’dan üst levhada $u = V$ ’ye lineer şekilde değişen bir hız profili ile uygulanan basınç gradyeninin büyüklüğüne bağlı parabolik bir hız profilidir. Eğer basınç gradyeni sıfır olursa Denklem 9’un parabolik kısmı gider ve hız profili Örnek 9–15’te olduğu gibi sadece lineer olur. (Şekil 9–65’te kesikli kırmızı çizgi ile gösterilmiştir). Eğer basınç gradyeni negatif (x -yönünde azalan ve akışın soldan sağa doğru itilmesine neden olan basınç) yani $\partial P/\partial x < 0$ ise, bu durumda hız profili Şekil 9–65’te gösterildiği gibi olur. $V = 0$ (üst levha sabit) olması halinde, Denklem 9’daki lineer hız profilinin kaybolduğu özel bir durum oluşur. Bu durumda hız profili parabolik ve kanal merkezine ($y = h/2$) göre simetrik bir hal alır. Bu hal Şekil 9–65’te noktalı çizgi ile gösterilmiştir.

Adım 6 Denklem 8 ve 9’u kullanarak ilgili diferansiyel denklemlerin ve sınır şartlarının sağlandığını doğrulayabilirsiniz.



ŞEKİL 9–65

Örnek 9–16’nın hız profili:

Paralel iki levha arasında negatif

basınç gradyeni uygulanarak

oluşturulan Couette akışı; kesikli

kırmızı çizgi basınç gradyeninin

sıfır olduğu durumdaki hız profilini,

noktalı çizgi ise üst levhanın sabit

olduğu ($V = 0$) ve negatif bir basınç

gradyeninin uygulandığı durumdaki

hız profilini göstermektedir.

(b) Boyutsuz Π gruplarını oluşturmak üzere boyut analizini kullanacağız. u hız bileşenini y , h , V , μ ve $\partial P/\partial x$ 'in fonksiyonu olarak düşünelim. Altı değişken (bağımlı değişken u dâhil) ve problemde temsil edilen üç ana boyut (kütle, uzunluk ve zaman) bulunduğundan, $6 - 3 = 3$ tane boyutsuz grup beklenmektedir. h , V ve μ 'yü tekrarlayan değişkenler olarak aldığımızda, tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz. (Ara işlemler size bırakılmış olup bu problem, Bölüm 7'de öğrenilenlerin tekrar edilmesi açısından iyi bir örnektir):

Boyut analizinin sonucu:
$$\frac{u}{V} = f\left(\frac{y}{h}, \frac{h^2}{\mu V} \frac{\partial P}{\partial x}\right) \quad (10)$$

Bu üç boyutsuz grubu kullanarak Denklem 9'u:

Hız analizinin boyutsuz biçimi:
$$u^* = y^* + \frac{1}{2} P^* y^* (y^* - 1) \quad (11)$$

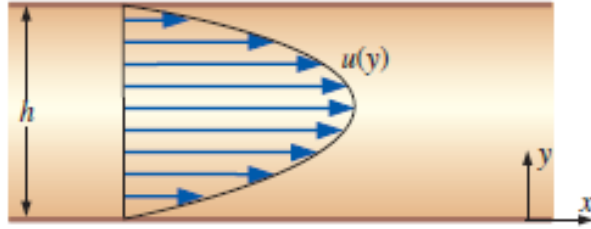
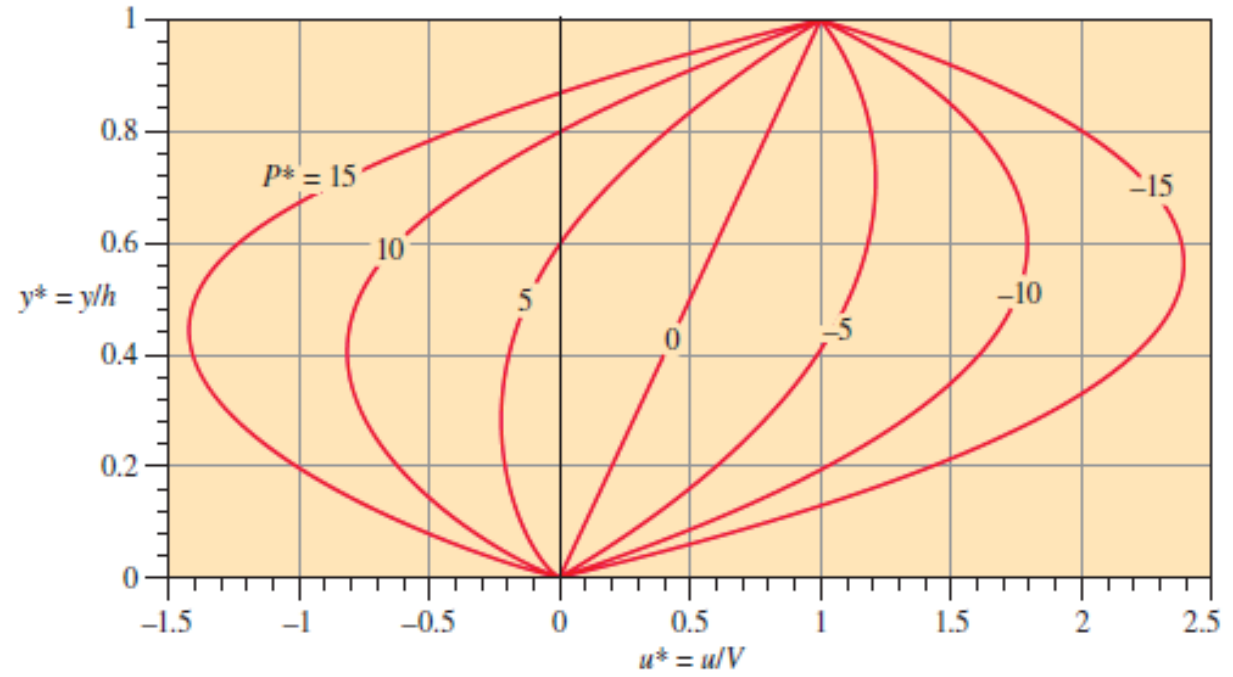
olarak ifade edebiliriz. Burada boyutsuz parametreler;

$$u^* = \frac{u}{V} \quad y^* = \frac{y}{h} \quad P^* = \frac{h^2}{\mu V} \frac{\partial P}{\partial x}$$

olarak belirlenmiştir. Şekil 9–65'te u^* , birkaç farklı P^* değeri için Denklem 11 kullanılarak y^* 'ın fonksiyonu olarak çizilmiştir.

ŞEKİL 9-66

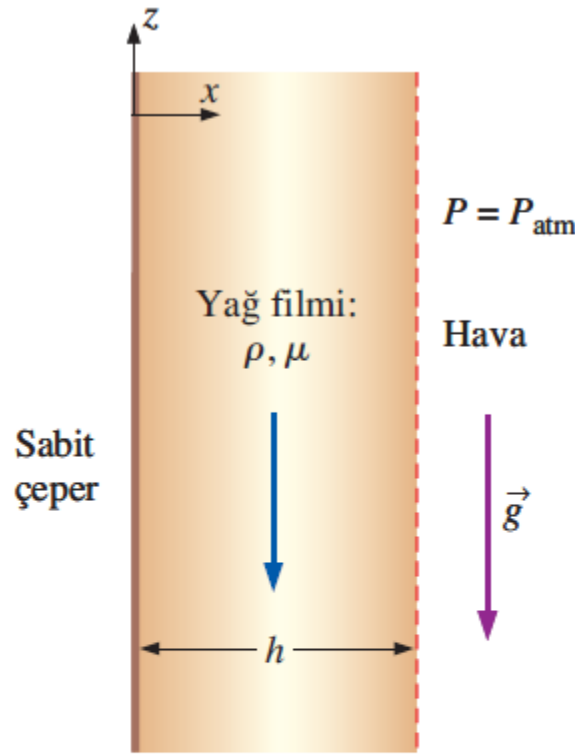
Basınç gradyeni etkisi altındaki Couette akışına ait boyutsuz hız profilleri; profiller boyutsuz basınç gradyeninin farklı değerleri için çizilmiştir.



ŞEKİL 9-67

İki-boyutlu tam gelişmiş kanal akışına (düzlemsel Poiseuille akışı) ait hız profili.

İrdeleme Sonuç boyutsuzlaştırıldığında, Denklem 11'in bir hız profili ailesini temsil ettiği görülmektedir. Ayrıca basınç gradyeni *pozitif* (sağdan sola itilen akış) ve yeterince büyük olduğunda kanalın taban kısmında *ters akış* oluşacağı anlaşılmaktadır. Tüm durumlarda sınır şartları $y^* = 0$ 'da $u^* = 0$ ve $y^* = 1$ 'de $u^* = 1$ halini alır. Eğer bir basınç gradyeni var ve her iki levha da sabitse, akış iki-boyutlu kanal akışı veya **düzlemsel Poiseuille akışı**dır (Şekil 9-67). Bununla birlikte çoğu yazarın *Poiseuille akışı* adını tam gelişmiş *boru* akışı, yani iki-boyutlu kanal akışının eksenel simetrik benzeri (bkz. Örnek 9-18), için kullandığını belirtelim.



ŞEKİL 9-68

Örnek 9-17'nin geometrisi: Düşey bir çeper boyunca yerçekimi etkisi ile akan viskoz yağ filmi.

ÖRNEK 9-17

Düşey Bir Çeperden Yerçekimi Etkisiyle Aşağı Doğru Akan Yağ Filmi

Sonsuz bir düşey çeper boyunca aşağı doğru yavaşça süzülen daimi, sıkıştırılamaz, çepere paralel, laminar bir yağ filmi göz önüne alınır. (Şekil 9-68). Yağ filminin kalınlığı h olup yerçekimi negatif z -yönünde etkimektedir. (Şekil 9-68'de aşağı doğru). Akışı zorlayan hiçbir basınç gradyeni bulunmamakta ve yağ sadece yerçekimi etkisiyle süzülmeaktadır. Yağ filmi içerisindeki hız ve basınç alanlarını hesaplayınız ve boyutsuz hız profilini çizin. Çevredeki havanın hidrostatik basıncındaki değişim ihmal edilmektedir.

ÇÖZÜM Verilen bir geometri ve sınır şartları için hız ve basınç alanlarını hesaplayıp hız profilini çizeceğiz.

Kabuller 1 Çeper yz -düzleminde sonsuzdur (y sayfa düzleminin içine doğrudur). 2 Akış daimidir (zamana göre tüm kısmi türevler sıfırdır). 3 Akış paraleldir (hızın x -bileşeni u her yerde sıfırdır). 4 Akışkan sıkıştırılamaz ve sabit özelliklere sahip Newton tipi bir akışkan, akış ise laminardır. 5 Basınç serbest yüzeyde $P = P_{atm} = \text{sabittir}$. Diğer bir deyişle, akışı zorlayan bir basınç gradyeni yoktur. Akış, ağırlık kuvvetleri ile viskoz kuvvetler arasındaki bir dengeye göre oluşmaktadır. Ayrıca yatay yönde ağırlık kuvveti bulunmadığından her yerde $P = P_{atm}$ 'dir. 6 Hız alanı tamamen iki-boyutlu, yani hız bileşeni $v = 0$ ve y 'ye göre tüm kısmi türevler sıfırdır. 7 Yerçekimi ivmesi

negatif z -yönünde etki etmektedir. Bunu matematiksel olarak $\vec{g} = -g\vec{k}$ veya $g_x = g_y = 0$ ve $g_z = -g$ şeklinde ifade edebiliriz.

Analiz Diferansiyel akış çözümlemeleri için adım adım çözüm yöntemini izleyerek hız ve basınç alanlarını elde edelim. (Şekil 9-52):

Adım 1 Problemi ve geometriyi tanımlayın. Şekil 9-68'e bakınız.

Adım 2 *Kabulleri ve sınır şartlarını sıralayın.* Yedi tane kabul sıraladık. Sınır şartları ise: (1) Çeperde kayma yok; $x = 0$ 'da $u = v = w = 0$ 'dır. (2) Serbest yüzeydeki ($x = h$) kayma gerilmesi önemsizdir (Denklem 9–68). Göz önüne alınan düşey koordinat sistemi için bu durum $x = h$ 'de $\partial w / \partial x = 0$ olur.

Adım 3 *Diferansiyel denklemleri yazın ve sadeleştirin.* Buna kartezyen koordinatlardaki sıkıştırılmaz süreklilik denklemi ile başlayalım:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{kabul 6}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Denklem 1 bize w 'nin z 'ye bağlı bir fonksiyon olmadığını ifade etmektedir, yani orijin noktasını nereye yerleştireceğimizin bir önemi yoktur. Akış z 'nin her konumunda aynı kalmaktadır. Diğer bir ifadeyle akış tam gelişmiştir. w , zamanın (Kabul 2), z 'nin (Denklem 1) veya y 'nin (Kabul 6) fonksiyonu olmadığından, w 'nin sadece x 'in fonksiyonu olduğu görülür:

$$\text{Süreklilik denkleminin sonucu:} \quad w = w(x) \quad (2)$$

Şimdi de Navier-Stokes denkleminin her bir bileşenini mümkün olduğunca sadeleştirelim. Her yerde $u = v = 0$ olduğundan ve yerçekimi x - ve y -yönünde etkemediğinden, x - ve y -momentum denklemleri tam olarak sağlanır. (Aslında her iki denklemdeki tüm terimler 0'dır). z -momentum denklemi ise,

$$\begin{aligned} \rho \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\text{kabul 2}} + \underbrace{u \frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{v \frac{\partial w}{\partial y}}_{\text{kabul 6}} + \underbrace{w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{süreklilik}} \right) &= - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{\text{kabul 5}} + \underbrace{\rho g_z}_{-\rho g} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{\text{kabul 6}} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{\text{süreklilik}} \right) \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} \end{aligned} \quad (3)$$

UYARI

Eğer $u = u(x)$ ise,
kısmi diferansiyel
yerine adi
diferansiyel
kullanın:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dx}$$

ŞEKİL 9–69

Örnek 9–15'ten Örnek 9–18'e kadar olan örneklerdeki hareket denklemleri, *kısmi diferansiyel denklemlerden adi diferansiyel denklemlere* indirgenerek çok daha kolay bir şekilde çözülebilir.

sonucunu verir. Maddesel ivme (Denklem 3'ün sol tarafı) sıfırdır ve bu durum akışkan parçacıklarının akış alanında hem yerel ivmeye hem de taşınım ivmesine sahip olmadığı anlamına gelir. Navier-Stokes denklemini lineer olmaktan çıkaran taşınım ivme terimleri ortadan kalktığı için problem önemli ölçüde basitleşmiş olur. Bu arada Denklem 2'nin doğrudan bir sonucu olarak Denklem 3'teki kısmi türevi ($\partial/\partial x$) toplam türeve (d/dx) dönüştürerek kısmi diferansiyel denklemi (KDD) adi diferansiyel denkleme (ADD) indirgemiş olduk. Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemlerin çözümü kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünden çok daha kolaydır (Şekil 9–69).

Adım 4 *Diferansiyel denklemleri çözün.* Süreklilik ile x - ve y -momentum denklemleri zaten “çözülmüş” durumdadır. Denklem 3 (z -momentum) iki kez integre edilerek,

$$w = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (4)$$

Adım 5 *Sınır şartlarını uygulayın.* C_1 ve C_2 sabitlerini bulmak için adım 2'den (1) ve (2) sınır şartlarını uygulayalım:

$$\text{Sınır şartı (1):} \quad w = 0 + 0 + C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$

ve

$$\text{Sınır şartı (2):} \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=h} = \frac{\rho g}{\mu} h + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{\rho g h}{\mu}$$

Sonuç olarak Denklem 4;

$$\text{Hız alanı:} \quad w = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g}{\mu} h x = \frac{\rho g x}{2\mu} (x - 2h) \quad (5)$$

halini alır. Film içerisinde $x < h$ olduğundan beklendiği gibi w her yerde negatiftir (akış aşağı doğrudur). Basınç alanı ise önemsizdir, yani **her yerde** $P = P_{\text{atm}}$ 'dir.

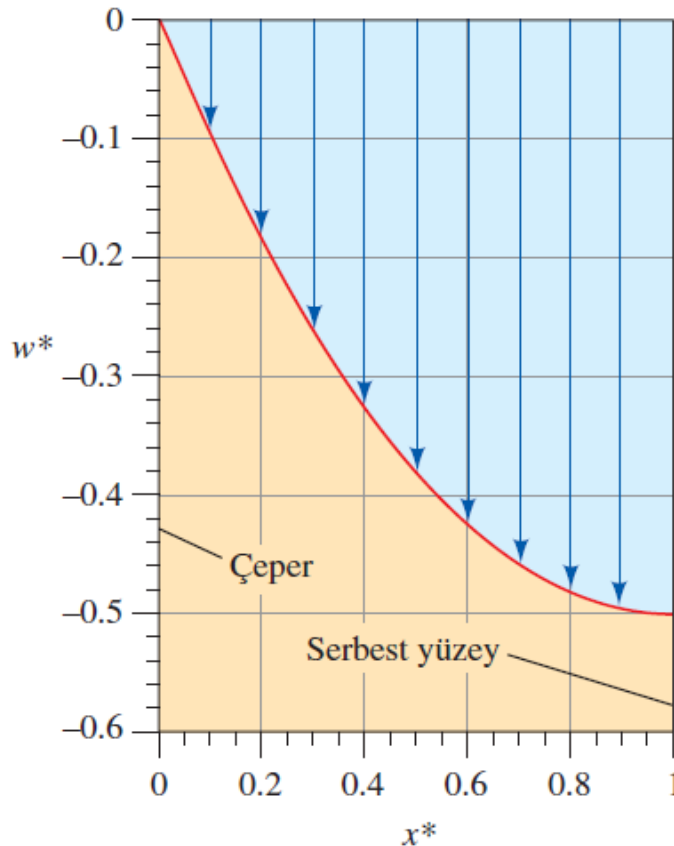
Adım 6 *Sonuçları doğrulayın.* Tüm diferansiyel denklemlerin ve sınır şartlarının sağlandığını doğrulayabilirsiniz. Denetleme yoluyla

$x^* = x/h$ ve $w^* = w\mu/(\rho gh^2)$ olarak Denklem 5,

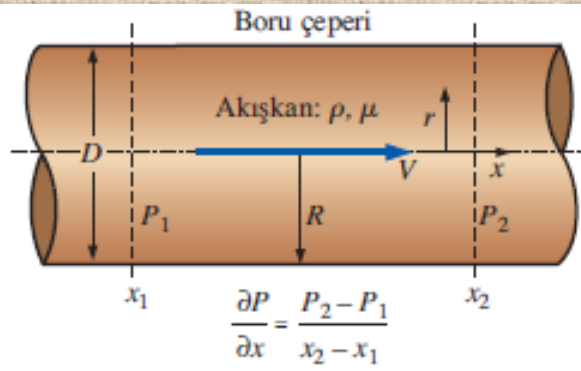
Boyutsuz hız profili:
$$w^* = \frac{x^*}{2}(x^* - 2) \quad (6)$$

olarak ifade edilebilir. Boyutsuz hız alanı Şekil 9–70’de çizilmiştir.

İrdeleme Hız profili, çeper üzerindeki ($x = 0$ ’da $w = 0$) kaymazlık şartından dolayı bu civarda büyük bir eğime sahiptir. Buna karşın sınır şartının sıfır kayma gerilmesi olduğu ($x = h$ ’de $\partial w/\partial x = 0$) serbest yüzeyde hız profilinin eğimi sıfırdır. Serbest yüzeyde w^* değerinin $-\frac{1}{2}$ yerine 1’e eşit olabilmesi için w^* ’nin tanımında -2 çarpanını kullandığımıza dikkat ediniz.



Örnek 9–17’ye ait boyutsuz hız profili: Düşey bir çeper boyunca akan bir yağ filmi.



ŞEKİL 9-71

Örnek 9-18'in geometrisi: Uzun, dairesel bir borudaki daimi, laminar akış; akışkanı boru içerisinde hareket ettirmek için $\partial P/\partial x$ basınç gradyeni uygulanmalıdır. Basınç gradyeni genellikle bir pompa ve/veya yerçekimi ile sağlanır.

ÖRNEK 9-18

Dairesel bir Borudaki Tam Gelişmiş Akış – Poiseuille Akışı

Newton tipi bir akışkanın D çapında (yarıçap $R = D/2$) sonsuz uzunluktaki bir boru içinde daimi, sıkıştırılamaz ve laminar akışını göz önüne alınız (Şekil 9-71). Yerçekimi etkileri ihmal edilmekte ve x -yönünde sabit bir basınç gradyeni ($\partial P/\partial x$) uygulanmaktadır:

$$\text{Uygulanan basınç gradyeni:} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{sabit} \quad (1)$$

Bu ifadede x_1 ve x_2 ; x -ekseni boyunca iki keyfi konum, P_1 ve P_2 ise bu konumlardaki basınçlardır. Eksenel bileşen z yerine burada x 'i kullandığımız bir silindirik koordinat sistemini, yani (r, θ, x) ve (u_r, u_θ, u) 'yi benimsediğimizi belirtelim. Boru içerisindeki basınç alanı için bir ifade türetiniz ve boru çeperine birim yüzey alanı başına etkiyen viskoz kayma kuvvetini hesaplayınız.

ÇÖZÜM Dairesel bir boru içerisindeki akışa ait hız alanını hesaplayacağız ve boru çeperine etki eden viskoz kayma gerilmesini belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Boru x -yönünde sonsuz uzunluktadır. 2 Akış daimidir (zamana göre tüm kısmi türevler sıfırdır). 3 Paralel akış söz konusudur (hızın r -bileşeni u_r sıfırdır). 4 Newton tipi akışkan sabit özelliklere sahiptir, akış sıkıştırılamaz ve laminardır (Şekil 9-71). 5 x -yönünde, basınç gradyeninin sabit olduğunu ifade eden Denklem 1 uyarınca x ile lineer olarak değişen sabit bir basınç uygulanmıştır. 6 Hız alanı dönümsüz ve eksenel simetriktir, yani $u_\theta = 0$ ve θ 'ya göre tüm kısmi türevler sıfırdır. 7 Yerçekimi etkileri göz ardı edilmektedir.

Analiz Hız alanını elde etmek için Şekil 9-52'de özetlediğimiz adım-adım çözüm yöntemini izleyeceğiz.

Adım 1 Problem ve geometriyi tanımlayın. Şekil 9-71'a bakınız.

Adım 2 *Kabulleri ve sınır şartlarını sıralayın.* Yedi tane kabul sıraladık. Birinci sınır şartı boru çeperindeki kaymazlık şartından elde edilir: (1) $r = R$ 'de $\vec{V} = 0$. İkincisi ise boru ekseninin bir simetri eksenini olmasındandır: (2) $r = 0$ 'da $\partial u / \partial r = 0$

Step 3 *Diferansiyel denklemleri yazın ve sadeleştirin.* Bunu yapmaya silindirik koordinatlardaki sıkıştırılmaz süreklilik denkleminin (Denklem 9-62a) değiştirilmiş bir şekliyle başlayalım:

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}_{\text{kabul 6}} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Denklem 2 bize u 'nun x 'e bağlı bir fonksiyon olmadığını ifade etmektedir. Diğer bir deyişle orijini nereye yerleştireceğimizin bir önemi yoktur, yani akış x 'in her konumunda aynıdır. Bu sonuç boru sonsuz uzunlukta olduğundan herhangi bir x konumuna özel bir durumun olmadığını ifade eden Kabul 1'den de çıkarılabilir. Yani akış tam gelişmiştir. Ayrıca u , zamanın (Kabul 2) veya θ 'nın (Kabul 6) bir fonksiyonu olmadığından sadece r 'nin fonksiyonudur:

Süreklilik denklemini sonucu: $u = u(r)$ (3)

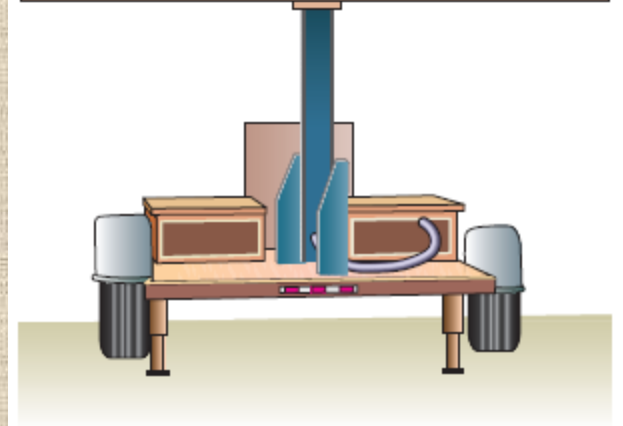
Şimdi de aksenal momentum denklemini (Denklem 9-62d'nin değiştirilmiş şekli) mümkün olduğunca sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} \rho \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{kabul 2}} + \underbrace{u_r \frac{\partial u}{\partial r}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}}_{\text{kabul 6}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{süreklilik}} \right) \\ = - \frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{kabul 7}} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_{\text{kabul 6}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{süreklilik}} \right) \end{aligned}$$

veya

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4)$$

**DİKKAT: TAM ÇÖZÜM
YALNIZCA LAMİNER
AKIŞ İÇİN
MÜMKÜNDÜR**



ŞEKİL 9-72

Navier-Stokes denkleminin tam analitik çözümleri türbülanslı akış için geçerli olmayıp, burada sunulan örneklerde olduğu gibi sadece laminer akış için geçerlidir.

Örnek 9–15’den Örnek 9–17’ye kadar olduğu gibi maddesel ivme (x -momentum denkleminin sol tarafı) sıfırdır ve dolayısıyla akışkan parçacıkları bu akış alanında hiçbir ivmeye sahip değildir. Bu sayede Navier-Stokes

denklemleri (Şekil 9–73) lineer bir biçime indirgenir. Burada Denklem 3’e dayanarak u ’nun kısmi türevli ifadelerini toplam türev operatörü ile değiştirdik. Benzer şekilde, basınç gradyeni terimi hariç r -momentum denklemindeki (Denklem 9–62b) her bir terim sıfırdır ve bu nedenle yalnız kalan tek terim olan basınç gradyeni de sıfır olmak zorundadır:

$$r\text{-momentum:} \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

Diğer bir ifadeyle P , r ’nin fonksiyonu değildir. P , zamanın (Kabul 2) veya θ ’nin da (Kabul 6) fonksiyonu olmadığından sadece x ’in fonksiyonudur:

$$r\text{-momentumun sonucu:} \quad P = P(x) \quad (6)$$

Dolayısıyla sadece x ile değiştiğinden; Denklem 4’teki basınç gradyeni terimi için, kısmi türev operatörünü toplam türev operatörüyle değiştirebiliriz. Sonuç olarak Navier-Stokes denkleminin θ -bileşiminin (Denklem 9–62c) tüm terimleri sıfıra gider.

Adım 4 *Diferansiyel denklemleri çözün.* Süreklilik ve r -momentum denklemleri sırasıyla Denklem 3 ve 6 ile sonuçlanarak zaten “çözülmüştü”. θ -momentum denklemleri de ortadan kalktığından geriye sadece Denklem 4 (x -momentum) kalır. Denklemin her iki tarafını r ile çarpıp bir kez integre ederek,

$$r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{dP}{dx} + C_1 \quad (7)$$

elde ederiz. Burada C_1 bir integral sabitidir. Basınç gradyeni $\partial P / \partial x$ ’in sabit olduğuna dikkat ediniz. Denklem 7’nin her iki yanını bu kez r ile bölüp tekrar bir integral işlemi yaparsak,

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dx} + C_1 \ln r + C_2 \quad (8)$$

buluruz. C_2 ikinci integral sabitidir.

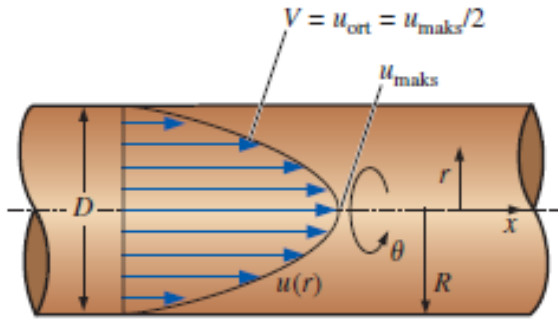
Navier-Stokes Denklemi

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Lineer olmayan terim

ŞEKİL 9–73

Navier-Stokes (NS) denklemindeki taşınım terimi denklemindeki lineer olmayan tek terim olduğundan, bu teriminin sıfır olduğu sıkıştırılamaz akış çözümlerinde NS denklemleri lineer hale gelir.



ŞEKİL 9-74

Örnek 9-18'e ait aksenal hız profili: Uzun bir dairesel borudaki daimi, laminar akış; akışkanı boru içerisinde hareket ettirmek için dP/dx büyüklüğünde sabit bir basınç gradyeni uygulanmalıdır.

Adım 5 Sınır şartlarını uygulayın. İlk olarak (2) sınır şartını Denklem 7'ye uygulayalım:

$$\text{Sınır şartı (2):} \quad 0 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

Bu sınır şartını, u 'nun borunun merkez ekseninde sonlu bir değer alması gerektiği şeklinde de yorumlayabiliriz. Bu ise ancak, Denklem 8'de $\ln(0)$ tanımsız olduğundan, C_1 'in sıfıra eşit olmasıyla mümkün olabilir. Şimdi de (1) sınır şartını uygulayalım:

$$\text{Sınır şartı (1):} \quad u = \frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dx} + 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dx}$$

Sonuç olarak Denklem 7,

$$\text{Eksenel hız:} \quad u = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (r^2 - R^2) \quad (9)$$

halini alır buna göre aksenal hız profili, Şekil 9-74'de çizildiği gibi paraboloid şeklindedir.

Adım 6 Sonuçları doğrulayın. Tüm diferansiyel denklemlerin ve sınır şartlarının sağlandığını gösterebilirsiniz.

Burada tam gelişmiş laminar boru akışının diğer bazı özellikleri de hesaplanabilir. Örneğin maksimum aksenal hızın borunun merkezinde oluşacağı açıktır (Şekil 9-74). Denklem 9'da $r = 0$ alarak maksimum hız,

$$\text{Maksimum aksenal hız:} \quad u_{\text{maks}} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dx} \quad (10)$$

olarak bulunur. Borudan geçen hacimsel debi ise Denklem 9'un borunun tüm kesit alanı boyunca integre edilmesiyle bulunabilir:

$$\dot{V} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R u r dr d\theta = \frac{2\pi}{4\mu} \frac{dP}{dx} \int_{r=0}^R (r^2 - R^2) r dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dP}{dx} \quad (11)$$

Öte yandan hacimsel debi borudaki ortalama eksenel hız ile boru kesit alanının çarpımına eşit olduğundan, ortalama eksenel hız V kolayca bulunabilir:

$$\text{Ortalama eksenel hız: } V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{(-\pi R^4/8\mu)(dP/dx)}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dP}{dx} \quad (12)$$

Denklem 10 ve Denklem 12'yi karşılaştırdığımızda, tam gelişmiş laminer boru akışı için ortalama eksenel hızın, maksimum eksenel hızın tam yarısı olduğunu görürüz.

Boru çeperine birim yüzey alanı başına etki eden viskoz kayma kuvvetini hesaplamak için boru tabanına bitişik diferansiyel bir akışkan elemanını göz önüne alalım (Şekil 9-75). Şekilde basınç gerilmeleri ve matematiksel olarak pozitif olan viskoz gerilmeler gösterilmiştir. Denklem 9-63'ten (koordinat sistemimize göre değiştirilmiş olan) viskoz gerilme tensörü,

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta x} \\ \tau_{xr} & \tau_{x\theta} & \tau_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

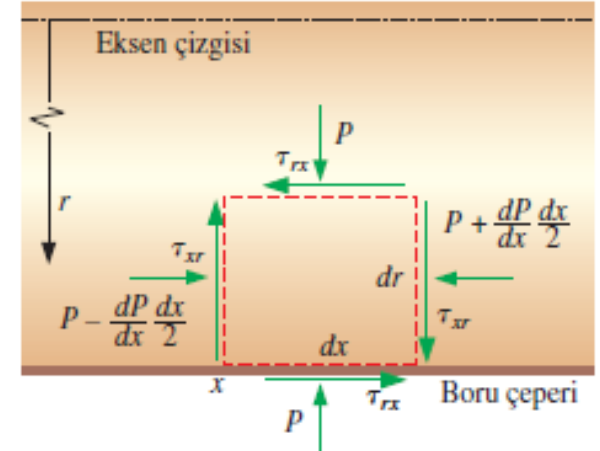
şeklinde ifade edilebilir. u için Denklem 9'u kullanıp boru çeperinde $r = R$ alalım. Bu durumda Denklem 13'teki τ_{rx} bileşeni,

$$\text{Boru çeperindeki viskoz kayma gerilmesi: } \tau_{rx} = \mu \frac{du}{dr} = \frac{R}{2} \frac{dP}{dx} \quad (14)$$

haline indirgenir. Soldan sağa doğru akış için dP/dx negatiftir ve böylece çeperdeki akışkan elemanının tabanındaki viskoz kayma gerilmesi Şekil 9-75'te gösterilenin tersi yöndedir. (Boru çeperi akışkan üzerine engelleyici bir kuvvet uyguladığından bu durum sezgilerimizle uyusmaktadır). Buna göre çeper üzerinde birim alan başına kayma kuvveti buna eşit ve ters yöndedir.

Çeper üzerine birim alana etki eden viskoz kayma kuvveti :

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{R}{2} \frac{dP}{dx} \vec{i} \quad (15)$$

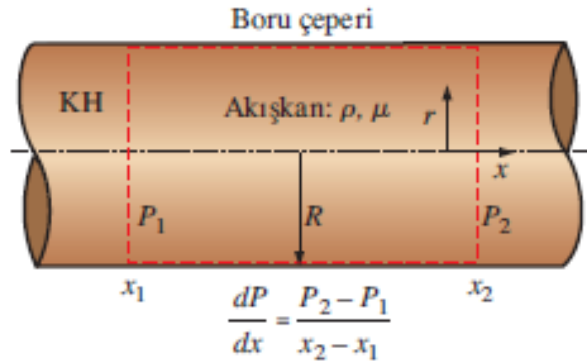


ŞEKİL 9-75

Alt yüzü boru çeperiyle temas eden diferansiyel akışkan elemanı üzerine etkiyen basınç ve viskoz kayma gerilmeleri.

Bu kuvvetin yönü yine sezgilerimizle uyuşmaktadır; yani, dP/dx negatif olduğunda sürtünmeden dolayı akışkan boru çeperini sağa doğru çekmeye çalışmaktadır.

İrdeleme Boru ekseninde $du/dr = 0$ olduğundan burada $\tau_{rx} = 0$ 'dır. Denklem 15'i buradaki yaklaşımın yerine, bir kontrol hacmi yaklaşımı kullanarak elde etmeye çalışın. Bunun için boru içerisinde herhangi iki x -konumu (x_1 ve x_2) arasındaki akışkanı kontrol hacmi olarak alın (Şekil 9–76). Aynı sonucu elde

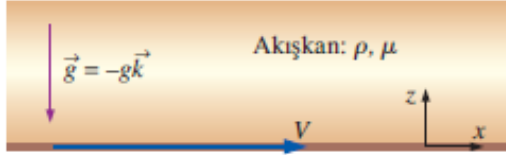


ŞEKİL 9–76

Örnek 9–18'deki Denklem 15'i alternatif bir yöntem ile elde etmek için kullanılan kontrol hacmi.

etmelisiniz. (*İpucu:* Akış tam gelişmiş olduğundan 1 kesitindeki aksel hız profili ile 2 kesitindeki aynıdır). Borudan geçen hacimsel debi kritik bir değeri aştığında akışta kararsızlıklar oluşur ve burada verilen çözüm geçerliliğini kaybeder. Bu durumda borudaki akış laminar değil *türbülanslı* olur. Türbülanslı boru akışı Bölüm 8'de daha ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Ayrıca bu problem Bölüm 8'de farklı bir yolla da çözülmüştür.

Buraya kadar olan tüm Navier-Stokes çözümlerimiz daimi akışlar içindi. Akış daimi olmadığında ve Navier-Stokes denkleminde zamana göre türev ortadan kalkmadığında çözümün çok karmaşık olacağını tahmin edebilirsiniz. Ancak, daimi olmayan bazı basit akış problemleri analitik olarak çözülebilir. Bunlardan birini Örnek 9–19'da ele alacağız.



Sonsuz büyüklükte düz levha

ŞEKİL 9-77

Örnek 9-19'un geometrisi ve kurulumu; y-koordinatı sayfa düzleminin içine doğrudur.

ÖRNEK 9-19

Sonsuz Büyüklükte Düz Bir Levhanın Ani Hareketi

xy-düzleminde $z = 0$ 'da konumlandırılmış sonsuz büyüklükte düz bir levha üzerindeki Newton tipi viskoz bir akışkanı göz önüne alınız (Şekil 9-77). Akışkan $t = 0$ anında hareketsizdir ve tam bu anda levha V hızıyla x-yönünde aniden harekete geçmektedir. Yerçekimi negatif z-yönünde etkidiğine göre basınç ve hız alanlarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM Aniden harekete geçen sonsuz büyüklükteki bir levha üzerinde bulunan akışkan için hız ve basınç alanları hesaplanacaktır.

Kabuller 1 Levha x- ve y-doğrultularında sonsuz uzunluktadır. Bu nedenle belirli bir x- veya y-konumunun özel bir önemi bulunmamaktadır. 2 Akış her yerde *paraleldir* ($w = 0$). 3 Basınç x'e göre sabittir, $P = \text{sabit}$. Diğer bir deyişle akışkanı x-yönünde hareket ettirmek için uygulanan bir basınç gradyeni yoktur. Akış sadece hareket eden levhanın neden olduğu viskoz gerilmeler yüzünden oluşmaktadır. 4 Newton tipi akışkan sabit özelliklere sahiptir, akış sıkıştırılmaz ve laminardır. 5 Hız alanı xz-düzleminde iki-boyutlu dolayısıyla $v = 0$ ve y'ye göre tüm türevler sıfırdır. 6 Yerçekimi negatif z-yönünde etkimektedir.

Analiz Hız ve basınç alanlarını elde etmek üzere Şekil 9-52'de özetlenen çözüm yolunu adım-adım izleyeceğiz.

Adım 1 *Problemi ve geometriyi tanımlayın.* (Şekil 9-77'e bakınız).

Adım 2 *Kabulleri ve sınır şartlarını sıralayın.* Altı tane kabul sıraladık. Sınır şartları: (1) $t = 0$ 'da her yerde $u = 0$ (levha harekete geçinceye kadar akış yok) (2) $z = 0$ 'da tüm x ve y değerleri için $u = V$ (levha üzerinde kaymama koşulu) (3) $z \rightarrow \infty$ olduğunda $u = 0$ (levhadan çok uzakta, hareket eden levhanın etkisi hissedilmemektedir) ve (4) $z = 0$ 'da $P = P_{\text{çeper}}$ (tüm levha yüzeyinde herhangi bir x- veya y-konumunda basınç sabittir).

Adım 3 *Diferansiyel denklemleri yazın ve sadeleştirin.* Buna kartezyen koordinatlardaki sıkıştırılmaz süreklilik denklemiyle (Denklem 9-61a) başlayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{kabul 5}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{kabul 2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Denklem 1 bize u 'nun x 'in fonksiyonu olmadığını ifade etmektedir. Ayrıca u , y 'nin fonksiyonu olmadığından (Kabul 5), u 'nun sadece z ve t 'nin fonksiyonu olduğu anlaşılmaktadır.

Süreklilik denkleminin sonucu:

$$u = u(z, t) \quad (2)$$

y-momentum denklemi Kabul 5 ve 6 ile (hızın y-bileşeni olan v 'li tüm terimler yok olmakta ve yerçekimi y-yönünde etkimemektedir)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

haline indirgenir. Denklem 3, kısaca bize basıncın y 'nin fonksiyonu olmadığını söylemektedir, böylece;

y-momentumun sonucu: $P = P(z, t) \quad (4)$

elde edilir. Benzer şekilde, z-momentum denklemi,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (5)$$

haline indirgenir. Şimdi x-momentum denklemini (Denklem 9-61b) mümkün olduğunca sadeleştirelim:

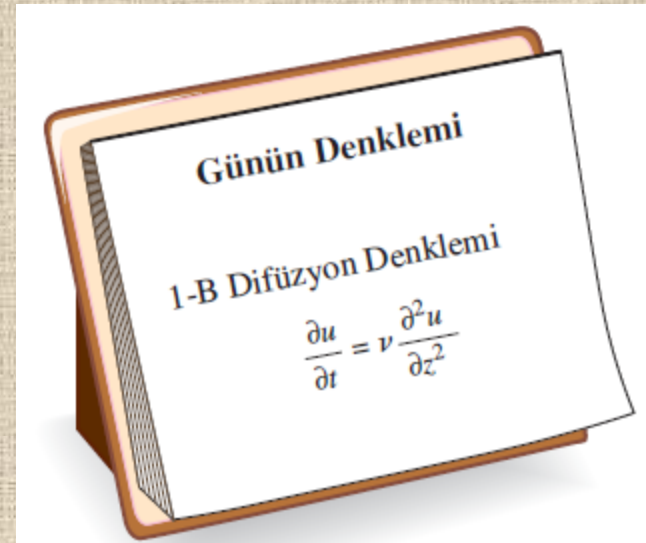
$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{süreklilik}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{kabul 5}} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{kabul 2}} \right) &= - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{kabul 3}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{kabul 6}} \\ &+ \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{\text{süreklilik}} \rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Viskozite ve yoğunluğun $\nu = \mu/\rho$ olarak tanımlanan kinematik viskozite altında ifade edilmesi daha uygundur. Denklem 6 yakından bilinen **bir-boyutlu difüzyon denklemdir** (Şekil 9-78).

y-momentumun sonucu: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (7)$

Adım 4 Diferansiyel denklemleri çözün. Süreklilik ve y-momentum denklemleri sırasıyla, Denklem 2 ve 4 ile sonuçlanarak zaten “çözülmüştü”. Denklem 5 (z-momentum) bir kez integre edilerek,

$$P = -\rho g z + f(t) \quad (8)$$



ŞEKİL 9-78

Bir-boyutlu difüzyon denklemi lineer ancak bir *kısmi diferansiyel denklemdir* (KDD). Bu denklemle çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında karşılaşılır.

bulunur. Burada P iki değişkenin, yani z ve t 'nin fonksiyonu olduğundan bir integral sabiti yerine zamana bağlı bir fonksiyon ekledik (Denklem 4'e bakınız). Denklem 7 (x -momentum) lineer bir kısmi diferansiyel denklem olup, çözümü iki bağımsız değişken olan z ve t 'nin tek bir bağımsız değişken olarak ifade edilmesiyle elde edilir. Çözüm bir **benzerlik çözümü** olarak bilinir ve detayları bu kitabın kapsamı dışındadır. Bir-boyutlu difüzyon denklemi, kütle difüzyonu ve ısı difüzyonu (ısı iletimi) gibi diğer pek çok mühendislik alanında karşılaşılan bir denklemdir ve ayrıntılı bilgi bu konularda yazılmış kitaplardan elde edilebilir. Denklem 7'nin çözümü dolaylı biçimde levhanın aniden harekete geçmesinden ileri gelen sınır şartına bağlı olup,

$$x\text{-momentum denkleminin integrali} \quad u = C_1 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right) \right] \quad (9)$$

olarak elde edilir. Bu denklemde **erf**, **hata fonksiyonu** olup,

$$\text{Hata fonksiyonu:} \quad \operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta \quad (10)$$

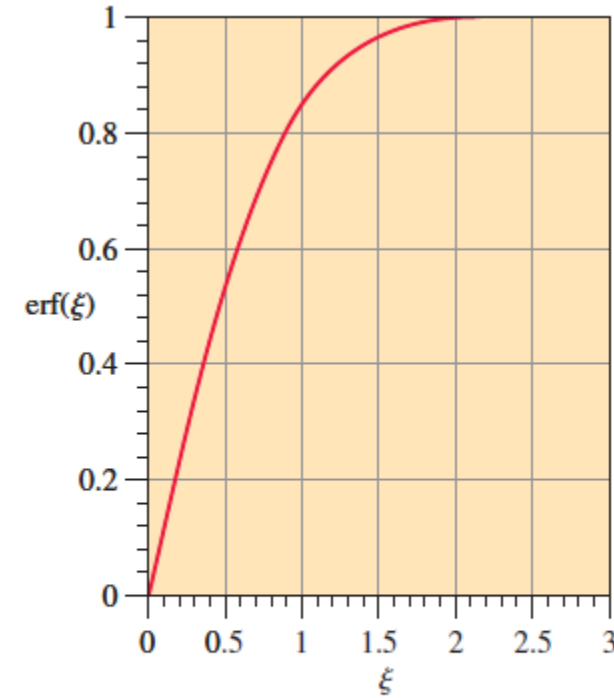
şeklinde tanımlanır (Çengel, 2010). Hata fonksiyonu olasılık teorisinde yaygın olarak kullanılır ve Şekil 9–79'da çizilmiştir. Hata fonksiyonu tabloları birçok kaynak kitapta bulunabilir. Bazı hesap makineleri ve hesap çizelgeleri hata fonksiyonunu doğrudan hesaplayabilmektedir. Ayrıca bu kitap ile birlikte verilen EES programında bir fonksiyon olarak mevcuttur.

Adım 5 *Sınır şartlarını uygulayın.* Basınç için Denklem 8 ile başlayalım. Sınır şartı (4) tüm zamanlar için $z = 0$ 'da $P = P_{\text{çeper}}$ olmasını gerektirir ve buna göre Denklem 8,

$$\text{Sınır şartı (4):} \quad P = 0 + f(t) = P_{\text{çeper}} \rightarrow f(t) = P_{\text{çeper}}$$

haline gelir. Diğer bir ifadeyle keyfi zaman fonksiyonu $f(t)$ zamandan bağımsız bir sabit olmaktadır. Böylece,

$$\text{Basınç alanı için nihai sonuç:} \quad P = P_{\text{çeper}} - \rho g z \quad (11)$$



ŞEKİL 9–79

Hata fonksiyonu $\xi = 0$ 'da 0'dan, $\xi \rightarrow \infty$ için 1'e kadar değişir.

şeklinde basitçe hidrostatik basınç olarak elde edilir. Buna göre *hidrostatik basınç, akıştan bağımsız olarak etkimektedir*. Adım 2'den (1) ve (3) sınır şartları, adım 4'te x -momentum denkleminin çözümünü elde etmek için zaten kullanılmıştı. $\text{erf}(0) = 0$ olduğu için ikinci sınır şartından,

Sınır şartı (2): $u = C_1(1 - 0) = V \rightarrow C_1 = V$

elde edilir ve Denklem 9,

Hız alanı için nihai sonuç: $u = V \left[1 - \text{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$ (12)

haline gelir. Oda sıcaklığındaki su ($\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) için $V = 1.0 \text{ m/s}$ alınarak çizilen birkaç hız profili Şekil 9–80'de gösterilmiştir. $t = 0$ anında hiç akış yoktur. Zaman geçtikçe levhanın hareketi akışkan içerisinde beklenildiği gibi daha fazla hissedilir. Viskoz difüzyonun akışkan içerisine işlemesinin ne kadar uzun sürdüğüne dikkat ediniz. Hareket eden levhanın etkisi, akıştan 15 dakika sonra levhanın 10 cm yukarısında henüz hissedilmemiştir.

Boyutsuz u^* ve z^* değişkenlerini,

Boyutsuz değişkenler: $u^* = \frac{u}{V}$ ve $z^* = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$

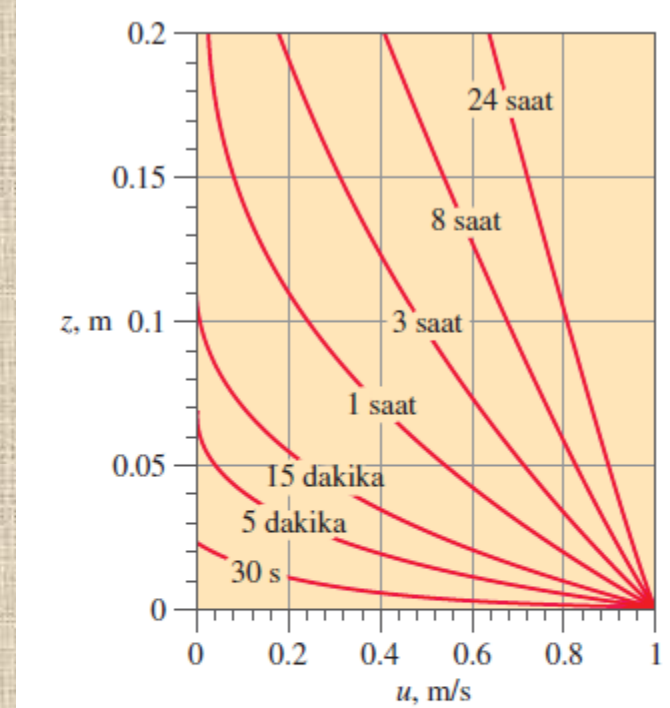
şeklinde tanımlayalım. Ardından Denklem 12'yi boyutsuz şekilde ifade edersek,

Boyutsuz hız alanı: $u^* = 1 - \text{erf}(z^*)$ (13)

elde edilir. Denklem 13'ün sağ tarafında yer alan $1 - \text{erf}(z^*)$ ifadesine mühendislikte sıklıkla rastlanır. Bu ifadeye **tümler hata fonksiyonu** adı verilir ve **erfc** sembolüyle gösterilir. Böylece Denklem 13 ayrıca,

Hız alanının alternatif biçimi: $u^* = \text{erfc}(z^*)$ (14)

şeklinde de ifade edilebilir. Boyutsuzlaştırmanın güzel yanı; z^* 'a bağlı bir u^* fonksiyonu için olan bu tek denklemin *herhangi bir* V hızıyla hareket eden bir levha üzerindeki *herhangi bir* akışkan (ν kinematik viskozitesine sahip) içerisinde, *herhangi bir* z konumunda ve de *herhangi bir* t anında geçerli olmasıdır! Denklem 13'e ait boyutsuz hız profili Şekil 9–81'de çizilmiştir. Şekil 9–80'deki tüm profiller Şekil 9–81'de tek bir profil üzerinde çakışmış durumdadır. Bu tür bir profile **benzerlik profili** denir.



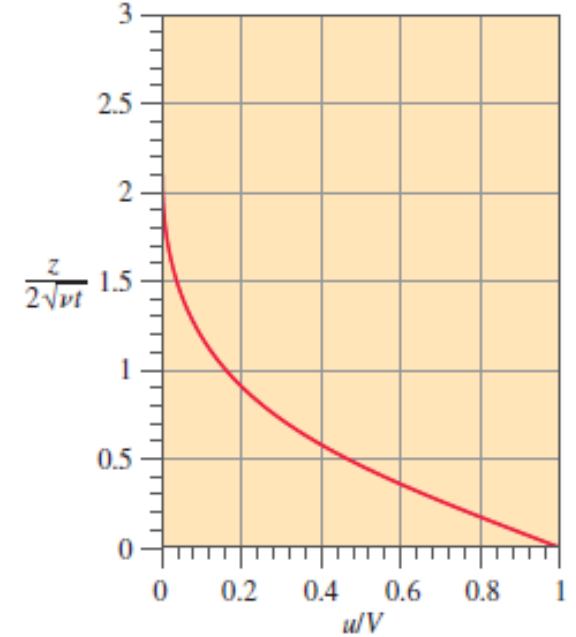
ŞEKİL 9–80

Örnek 9–19'a ait hız profilleri: Aniden çekilen sonsuz büyüklükteki bir levha üzerinde suyun akışı. Burada $\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ve $V = 1.0 \text{ m/s}$ alınmıştır.

Adım 6 *Sonuçları doğrulayın.* Tüm diferansiyel denklemlerin ve sınır şartlarının sağlandığını gösterebilirsiniz.

İrdeleme Momentumun akışkan içerisine yayılmasının, sezgilerimize göre beklediğimizden daha uzun süreceği anlaşılmaktadır. Bu durum yapılan çözümün sadece laminar akış için geçerli olmasından kaynaklanmaktadır. Levha hızı yeterince yüksek olduğunda veya levhada önemli titreşimler veya akışkanda çalkantılar olduğunda akış türbülanslı olacaktır. Türbülanslı bir akıştaki büyük girdaplar çeper yakınında hızlı hareket eden akışkan ile çeperden uzakta bulunan ve yavaş hareket eden akışkanı birbirine karıştırır. Bu karışma süreci çok hızlı gelişir ve bundan dolayı türbülans difüzyonu genellikle laminar difüzyondan birkaç mertebe daha hızlıdır.

Örnek 9–15’den Örnek 9–19’a kadar sıkıştırılamaz laminar akışları dikkate aldık. Aynı diferansiyel denklem sistemi (sıkıştırılamaz süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri) sıkıştırılamaz *türbülanslı* akışlar için de geçerlidir. Bununla birlikte düzensiz, daimi olmayan ve üç-boyutlu girdaplar akışkanın karışmasına neden olduklarından; türbülanslı akış çözümleri çok daha karmaşıktır. Ayrıca bu girdaplar büyüklük bakımından birkaç mertebe farklı boyut aralıklarında olabilir. Türbülanslı bir akış alanında denklemlerde yer alan hiçbir terim (bazı durumlarda yerçekimi terimi hariç) ihmal edilemez dolayısıyla çözümler sadece sayısal hesaplama yöntemleriyle elde edilebilir. Bununla ilgili olarak hesaplamalı akışkanlar dinamiği (HAD) yöntemleri Bölüm 15’te ele alınacaktır.



ŞEKİL 9–81

Örnek 9–19’a ait boyutsuzlaştırılmış hız profili: Aniden çekilen sonsuz büyüklükteki bir levha üzerindeki viskoz akışkanın laminar akışı.

Biyolojik Akışların Diferansiyel Analizi

Dairesel bir boru içinde tam gelişmiş akışı ya da sıkça kullanılan adıyla Poiseuille akışını inceledik.

Ancak bu yaklaşımların insan vücudundaki kan akışı için uygulanması durumunda yaklaşımların uygulanabilirliği yakından izlenmeli ve değerlendirilmelidir.

Kardiovasküler akış dinamiği konusunda çalışan uzmanlar, atardamarlardaki kan akışı hakkında ön fikir elde etmek için genellikle Poiseuille akışı yaklaşımını kullanırlar.

Bu yaklaşım mühendislere hız ve debi için ön fikir elde etme imkanı tanır.

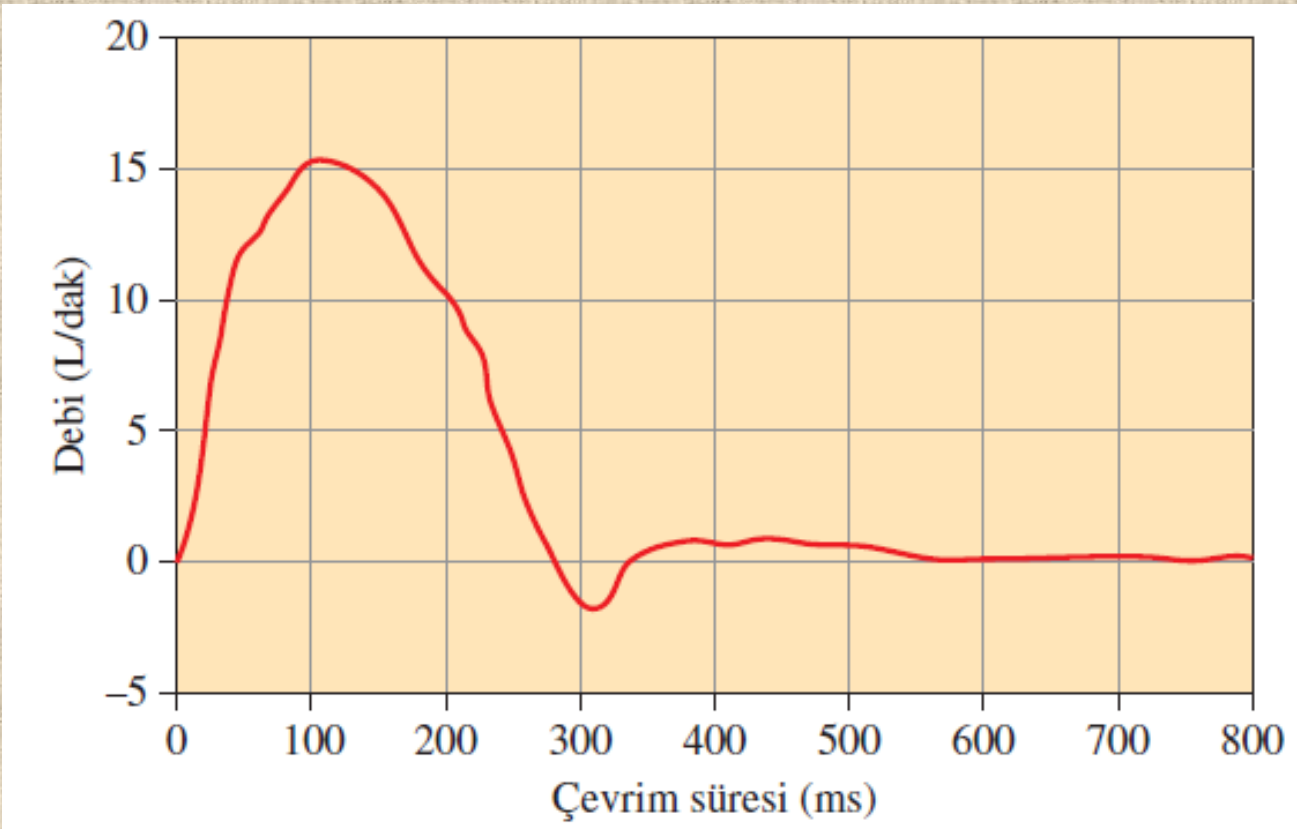
Poiseuille akışına ulaşmak için kullanılan temel yaklaşımları gözden geçirmesi önemlidir.

Akışkana ait yani bu durumda kan akışına ait temel yaklaşımları hatırlayalım.

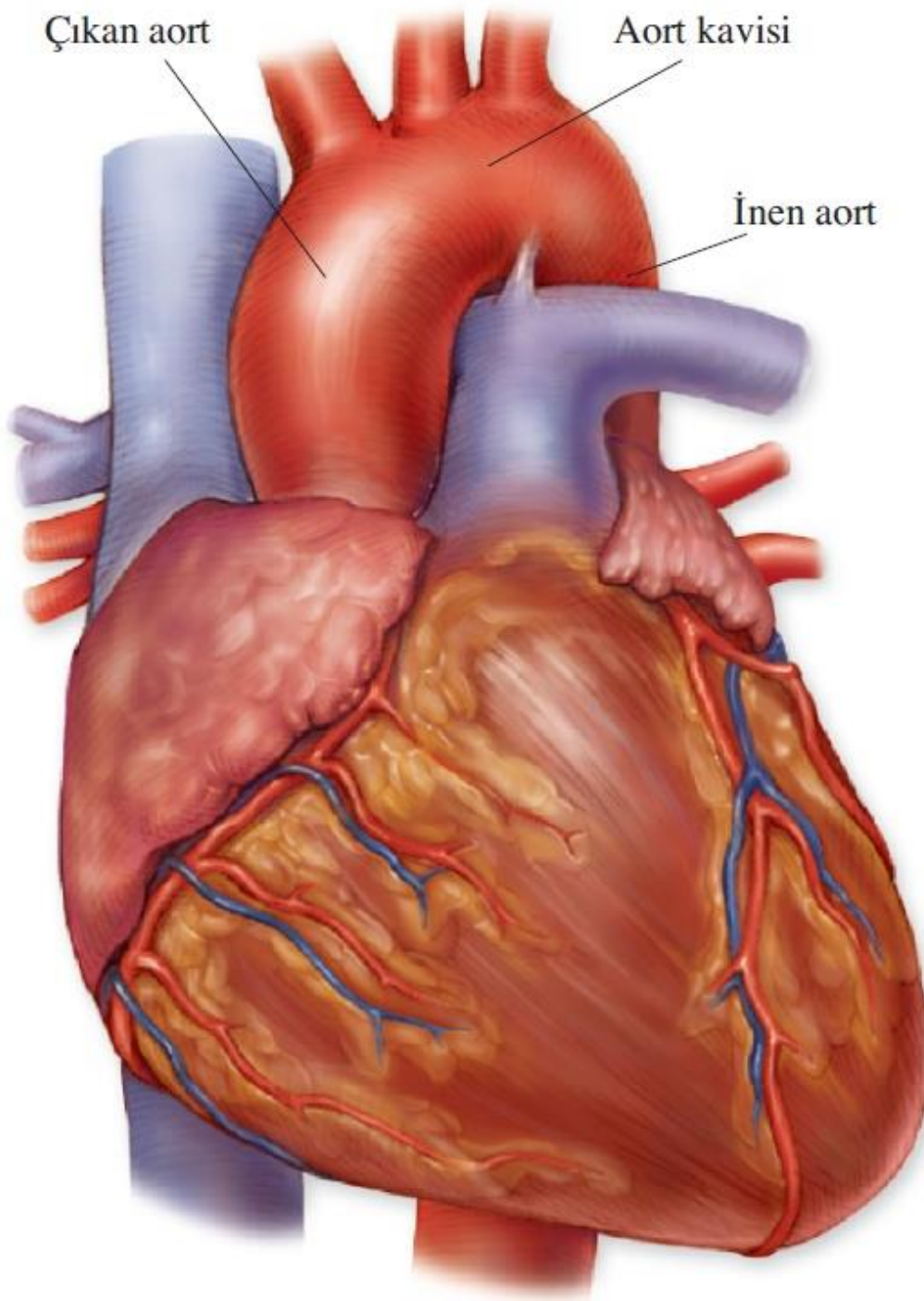
Akış sıkıştırılamaz ve laminar kalacaktır ve yerçekimi etkileri ihmal edilebilecektir.

Kardiovasküler sistemlerde gerçekçi olmamasına rağmen, tam gelişmiş akış kabulü de yapılabilir.

Sadece bu yaklaşımların baz alınması; daimi, paralel, eksenel simetrik Newton tipi akış ve borunun rijit ve dairesel olması gibi diğer temel kabullere de izin verir..



Bir yapay dolaşım sistemi içerisindeki ventriküler yardımcı aletin ejeksiyonu sırasında oluşan akışın dalga biçimi. Bu sol ventriküler ejeksiyon sırasında oluşturulan dalga biçimine benzerdir.



Çıkan aort, aort kavisi ve sol karıncıktan gelen inen aortu (bu görünüşte kalbin arka tarafında) gösteren anatomik bir görsel. Şekilde aortun omurilik tarafına doğru yönelmesi gösterilmektedir.

Bu nedenle atardamardaki kan akışını temel alan modellemelerde daimi akış kabulü uygun değildir. Bu da kan akışının modellenmesinde Poiseuille akışı olarak modellemeyi sadece bu yaklaştırım için bile uygunsuz kılar. Kısa zaman içinde (~ 300 ms) akışta aşağı ve yukarı yönlü ani ivmelenmeler vardır.

Rijit dairesel boru yaklaştırımı, kardiyovasküler kan akışına uygulandığında oldukça geçersizdir.

Kan akışı için yapılacak paralel ve eksensel simetrik akış yaklaştırmaları kardiyovasküler sistemin bir noktasında odaklanıldığında geçersiz olacaktır.

Kırmızı kan hücreleri kılcal damarlar içerisine sıkışmak zorunda olduğu için bu ince damarlar içerisindeki akışın Poiseuille akışı olmadığı da belirtilmelidir. Bu sıkışma sonucu kırmızı kan hücreleri ve plazmadan oluşan ve oksijen ve besin taşınımını kolaylaştıran özel bir iki fazlı akış söz konusudur. Son olarak, Örnek 9–20’de gösterildiği gibi kanın Newton tipi bir akışkan olmadığını da belirtmek gerekir.

ÖRNEK 9–20**Basit Bir Kan Viskozitesi Modeli ile Dairesel Bir Borudaki Tam Gelişmiş Akış**

Örnek 9–18’i, Poiseuille akışı için kullanılan tüm yaklaşımları ve Şekil 9–74’te gösterilen eksenel hız profilini dikkate alınız. Bu örnekte, temel yaklaşım olarak kullandığımız Newton tipi akışkan yerine Newton tipi olmayan akışkan ve buna uygun bir viskozite modeli kullanacağız. Kan vizkoelastik bir akışkan gibi davranır. Ancak burada amacımız açısından, kanı viskoelastik incelen akışkan veya sanki-plastik akışkan modeli olarak kabul edebiliriz ve böylece genelleştirilmiş kuvvet yasası viskozite modeli uygulanabilir. Kuvvet yasası modeli viskoz gerilme tensöründen gelmektedir ve $\tau_{rz} = -\mu \left(\frac{du}{dr} \right)^n$ şeklinde ifade edilir.

Denklemden eksi işareti yönü belirtmek için kullanılmıştır. n üssü $0 < n < 1$ arasında değişmektedir.

ÇÖZÜM Örnek 9–18’deki denklemleri Denklem–4’e kadar alacağız:

$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}$. Gerekli düzenlemeler yapılarak ve r ’ye göre bir kez integrali alınırsa, $\frac{r}{2} \frac{dP}{dx} = \mu \frac{dP}{dx}$ denklemini elde ederiz. Bu denklem aynı zamanda

$\frac{r}{2} \frac{dP}{dx} = \mu \frac{dP}{dx} = \tau_{rz}$ olarak da ifade edilebilir. Daha sonra elde ettiğimiz eşitliği kuvvet yasası modeliyle eşitleyebilir ve böylece $\frac{r}{2} \frac{dP}{dx} = -\mu \left(\frac{du}{dr} \right)^n$ şeklinde yeni

bir eşitlik elde ederiz. Eksi işaretini diğer tarafa taşıyıp, eşitliğin her iki tarafını $1/n$ ile çarpıp $\frac{du}{dr}$ için eşitliği çözersek, $\frac{du}{dr} = \left(-\frac{r}{2\mu} \frac{dP}{dx} \right)^{1/n}$ denklemini elde ederiz.

Denklemini integre edip Örnek 9–18’deki ikinci sınır şartını (borunun merkezi simetri eksenidir) uygularsak, hızı şu şekilde elde ederiz.

$$u = \frac{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} - r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Yukarıda kan için temel bir model olabilecek, kuvvet yasasına uyan bir akışkan için (Newton tipi olmayan bir akışkan) genel bir hız profilini elde ettik. Bahsedildiği gibi kanın sanki-plastik akışkan olduğu yaklaşıtlırını yaptık; $n = 0.5$ alarak hızı şu şekilde elde ederiz:

$$u = \frac{R^3 - r^3}{3} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \right)^2$$

Eğer $n = 1$ alsaydık, Newton tipi akışkan için aşağıda verilen eksenel hızı elde edecektik,

$$u = (R^2 - r^2) \left(\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \right)$$

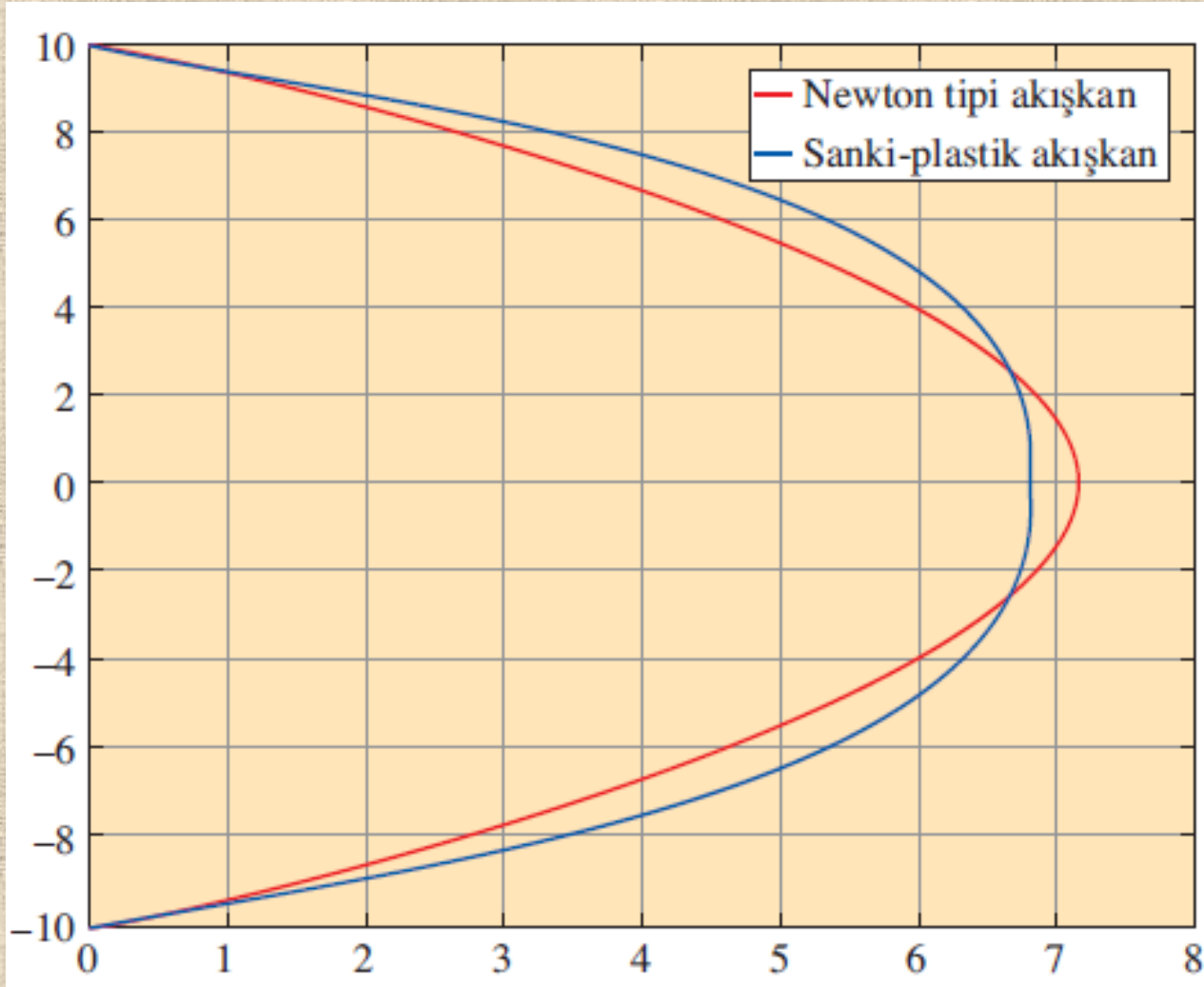
Newton tipi ve sanki-plastik akışkan için hız profilleri Şekil 9-84'te verilmiştir. Sanki-plastik akışkan için kullanılan viskozite modelinin akış profilini daha küt olarak değıştirdiğine dikkat ediniz. Hacimsel debiyi hesaplamak için, borunun kesit alanı boyunca $\dot{V} = \int_0^R 2\pi r u dr$ eşitliğini ve u 'nun genelleştirilmiş biçimini kullanarak integre edebiliriz. İntegre edip gerekli cebirsel işlemleri yaparsak, hacimsel debiyi şu şekilde elde ederiz:

$$\dot{V} = \frac{n\pi R^3}{3n + 1} \left(\frac{R}{2\mu} \frac{dP}{dx} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Sanki-plastik akışkan ($n = 0.5$) örneğimiz için hacimsel debi aşağıdaki hale gelişir:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^5}{5} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \right)^2$$

İrdeleme Hacimsel debiyi veren genel denklemde $n = 1$ alındığı zaman, hacimsel debi beklendiği gibi Poiseuille akışı için elde edilen ifadeye dönüşür.



Hız denklemlerindeki tüm değerlerin aynı kaldığını ve boru çapının aynı olduğunu varsayarsak, Newton tipi akışkan için elde edilen parabolik hız profili ile karşılaştırıldığında sanki-plastik akışkan daha küt bir hız profili oluşumuna neden olur

Özet

- Giriş
- Kütlenin korunumu-Süreklilik denklemi
 - ✓ Diverjans teoremi kullanarak türetme
 - ✓ Sonsuz küçük kontrol hacmi kullanarak türetme
 - ✓ Süreklilik denkleminin alternatif biçimi
 - ✓ Silindirik koordinatlarda süreklilik denklemi
 - ✓ Süreklilik denkleminin özel durumları
- Akım fonksiyonu
 - ✓ Kartezyen koordinatlarda akım fonksiyonu
 - ✓ Silindirik koordinatlarda akım fonksiyonu
 - ✓ Sıkıştırılabilir akım fonksiyonu
- Lineer momentum denkleminin diferansiyel biçimi-Cauchy denklemi
 - ✓ Diverjans teoremini kullanarak türetme
 - ✓ Sonsuz küçük kontrol hacmi kullanarak türetme
 - ✓ Cauchy' denkleminin alternatif biçimi
 - ✓ Newton'un ikinci yasasını kullanarak türetme

- Navier-Stokes denklemi
 - ✓ Giriş
 - ✓ Newton tipi ve Newton tipi olmayan akışkanlar
 - ✓ Sıkıştırılamaz, izotermal akış için Navier-Stokes denkleminin türetilmesi
 - ✓ Kartezyen koordinatlarda süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri
 - ✓ Silindirik koordinatlarda süreklilik ve Navier-Stokes denklemleri
- Akış problemlerinin diferansiyel analizi
 - ✓ Bilinen bir hız alanı için basınç alanının hesaplanması
 - ✓ Süreklilik ve Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri
 - ✓ Biyolojik akışların diferansiyel analizi