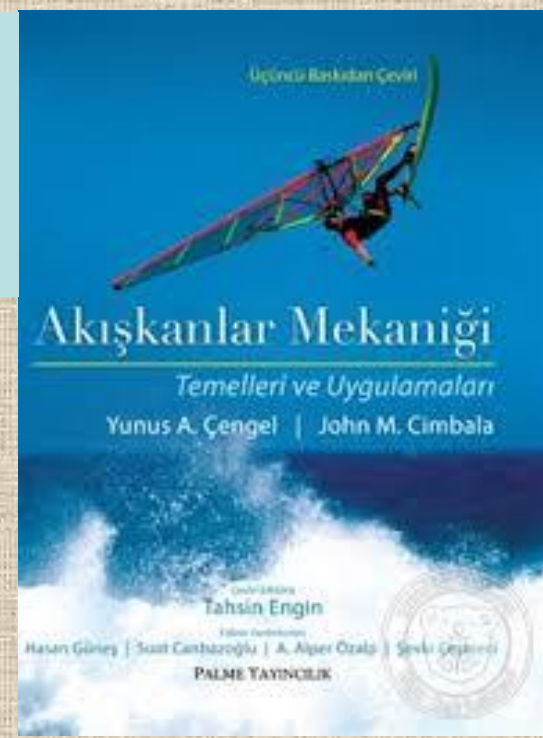


Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları

3'üncü Baskıdan Çeviri

Yunus A. Cengel, John M. Cimbala

McGraw-Hill, 2014

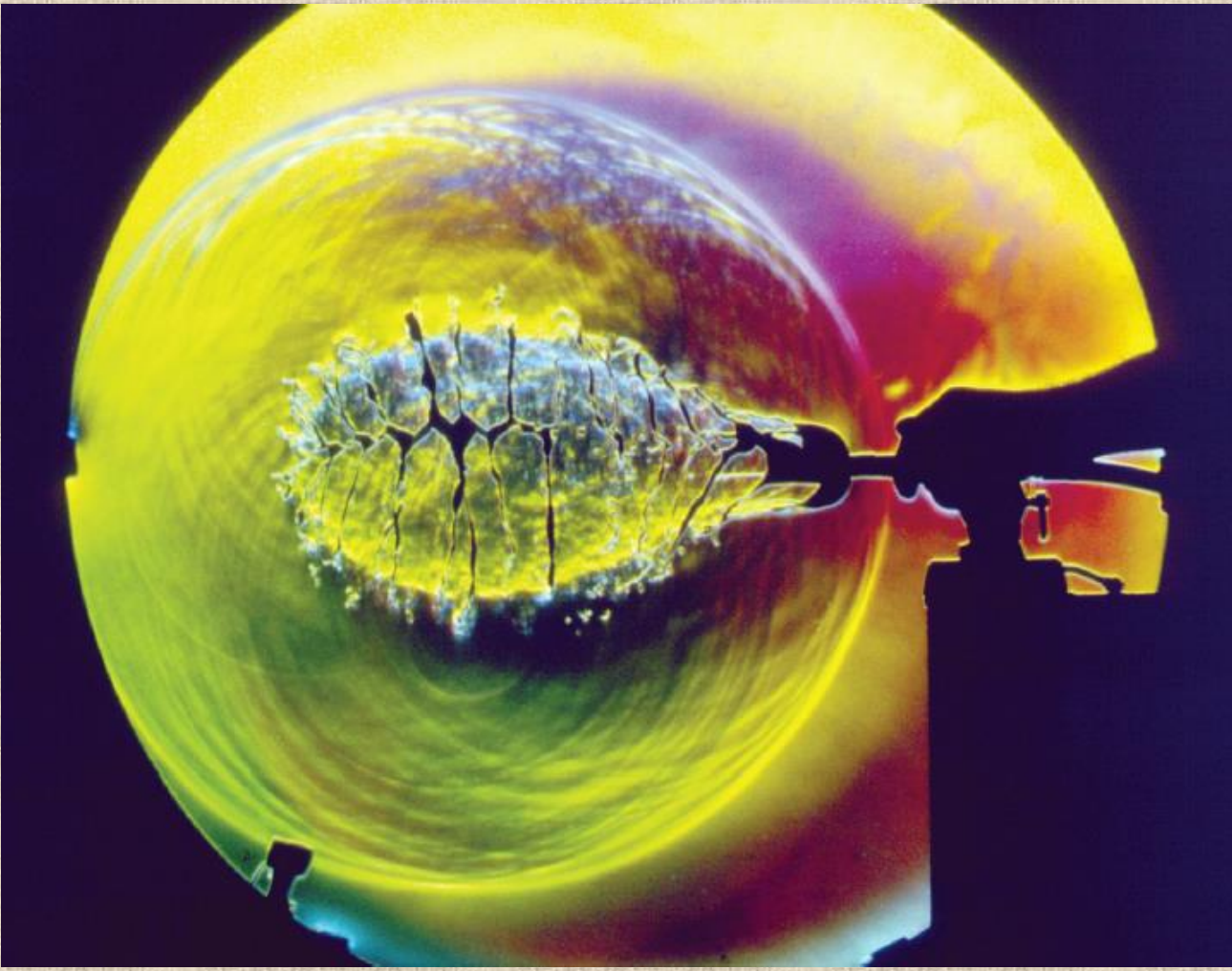


Bölüm 12

SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞ

İngilizce orijinal sunum esas alınarak

Tahsin Engin, Hasan Güneş, A. Alper Özalp ve Suat Canbazoğlu tarafından hazırlanmıştır.



Basınçlı havayla aşırı doldurulmuş bir oyuncak balonun yüksek hızlı renkli Schlieren görüntüsü. Bu 1-mikrosaniyelik poz parçalanmış balon yüzeyini yakalamış ve içeride genişlemeye başlayan sıkıştırılmış hava kabarcığını açığa çıkarmıştır. Balonun patlaması aynı zamanda, burada balonun etrafını saran bir daire olarak görülen zayıf bir küresel şok dalgasını da meydana getirmiştir. Fotoğrafçının hava valfinin üzerindeki elinin silueti sağ tarafta görülmektedir.

Öğrenim Amaçları

- Gaz akışında sıkıştırılabilirliğin sonuçlarını değerlendirebilmelidir
- Bir gazı sesüstü hızlara çıkarabilmek için yakınsakırsak bir lüle kullanmanın gerekliliğini anlayabilmelidir
- Şok oluşumunu kestirebilmeli ve bir şok dalgasının önü ve arkası arasındaki özellik değişimlerini hesaplayabilmelidir
- Sıkıştırılabilir akışlarda sürtünme ve ısı geçişinin etkilerini kavrayabilmelidir

12-1 ■ DURMA ÖZELLİKLERİ

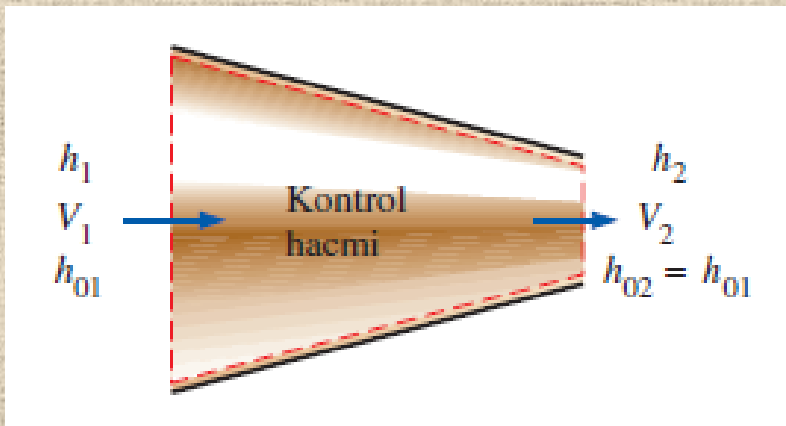
Durma entalpisi (veya toplam entalpi)

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (\text{kJ/kg})$$

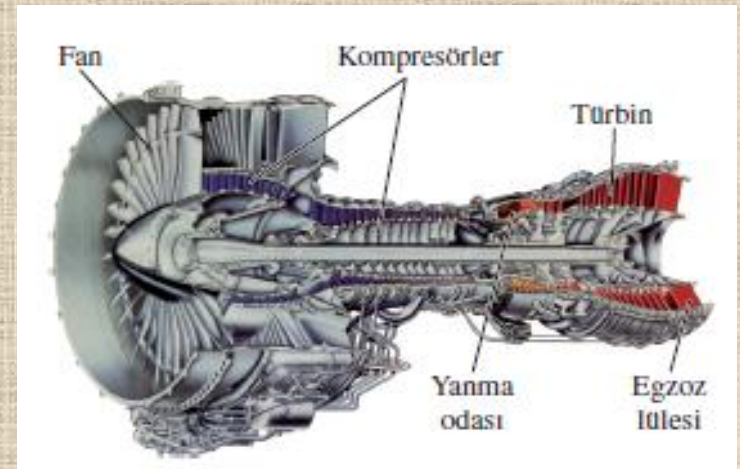
Statik entalpi: normal entalpi h

Enerji dengesi(ısı ve iş etkileşimleri ile potansiyel enerji değişimi olmadığında)

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad h_{01} = h_{02}$$



Adyabatik kanalda daimi akış.



Uçak ve jet motorlarındaki yüksek hızlar dolayısıyla bunların analizi yapılırken kinetik enerji terimi daima göz önünde bulundurulmalıdır.

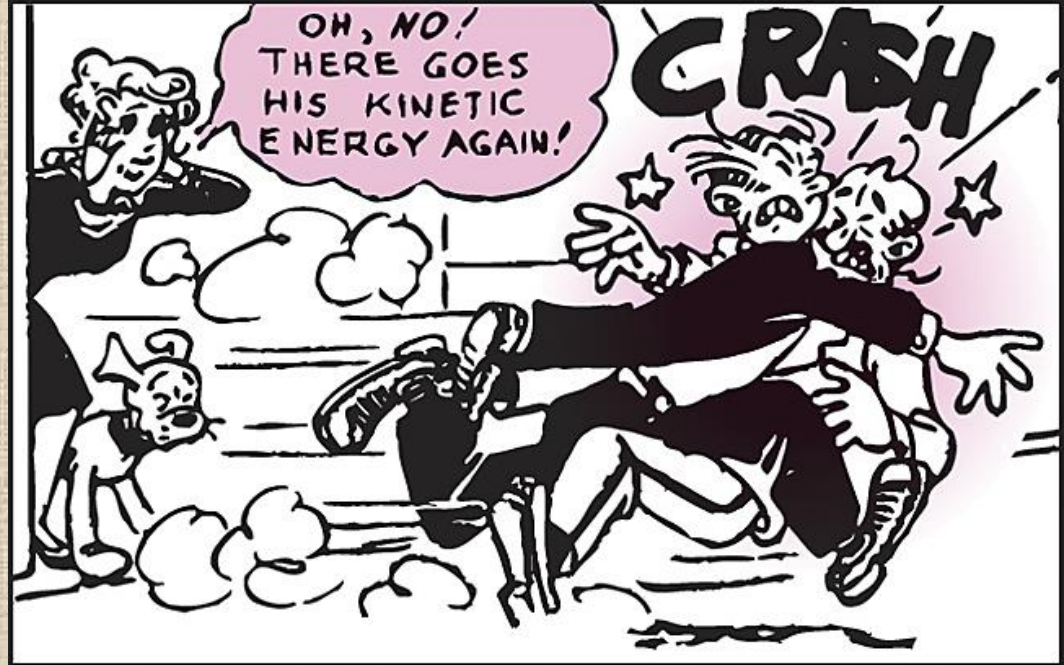
Eğer akışkan tamamen durdurulsaydı, enerji dengesi aşağıdaki hali alır:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 = h_{02}$$

Durma entalpisi: Akışkan adyabatik olarak durdurulduğunda akışkanın sahip olduğu entalpidir.

Durma prosesi sırasında akışkanın kinetik enerjisi entalpiye dönüşür, bu da akışkan sıcaklığında ve basıncında bir miktar artışa neden olur. Durma halindeki bir akışkanın özelliklerine **durma özellikleri** (durma sıcaklığı, durma basıncı, durma yoğunluğu vb.) denir.

Durma hali ve durma özellikleri 0 alt indisi ile gösterilir.



Durma prosesi sırasında akışkanın kinetik enerjisi entalpiye dönüşür.

İzentropik durma hali: Durma prosesi adyabatik olmanın yanında aynı zamanda tersinir de olursa buna izentropik durma hali denir.

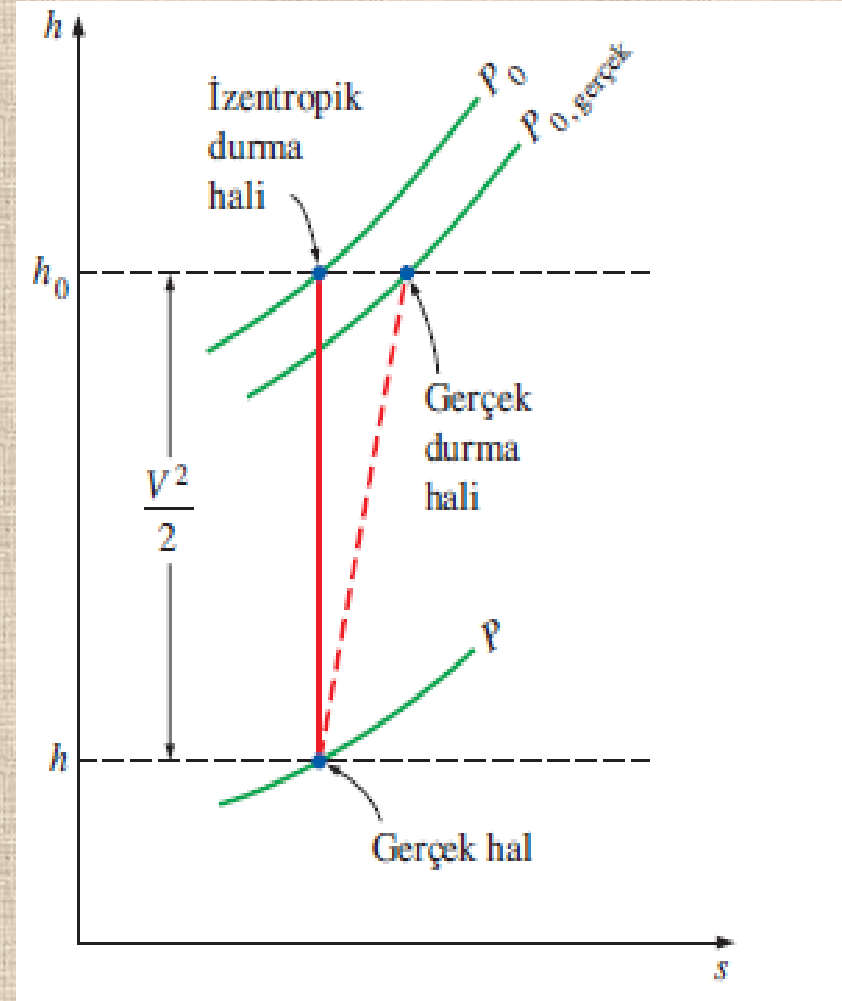
Durma prosesleri yaklaşık olarak izentropik alınır ve izentropik durma özelliklerine basitçe durma özellikleri denir.

Akışkan **sabit özgül ısı** bir ideal gaz olarak düşünüldüğünde

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \quad \rightarrow \quad T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

Durma (veya toplam) sıcaklık T_0 : Adyabatik olarak durdurulduğunda bir ideal gazın ulaştığı sıcaklıktır.

Dinamik sıcaklık: $V^2/2c_p$: böyle bir proses sırasındaki sıcaklık artışına karşılık gelir.



$h-s$ diyagramı üzerinde bir akışkanın gerçek hali, gerçek durma hali ve izentropik durma hali.

Durma basıncı P_0 :Bir akışkanın izentropik olarak durdurulduğunda ulaştığı basınçtır.

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)}$$

Durma yoğunluğu ρ_0

$$\rho = 1/v$$

$$Pv^k = P_0v_0^k$$



$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(k-1)}$$

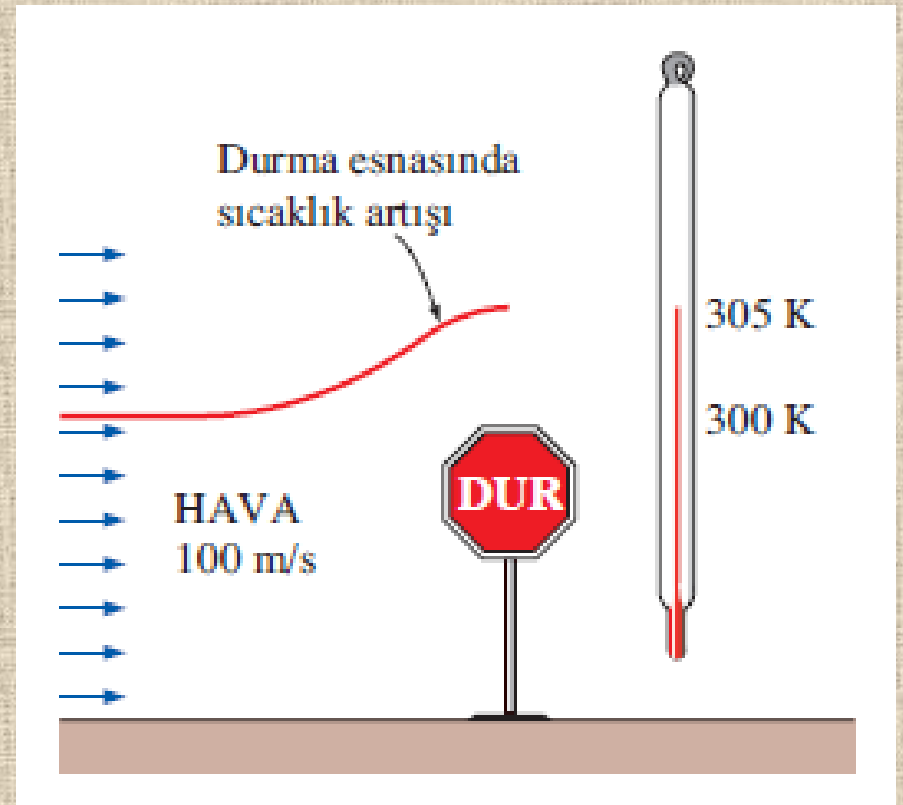
Durma entalpileri kullanıldığında, bir boyutlu daimi akış için enerji dengesi aşağıdaki gibidir

$$\dot{E}_{giren} = \dot{E}_{çıkan}$$

$$q_{giren} + w_{giren} + (h_{01} + gz_1) = q_{çıkan} + w_{çıkan} + (h_{02} + gz_2)$$

Akışkan sabit özgül ısı ideal gaz olduğunda

$$(q_{giren} - q_{çıkan}) + (w_{giren} - w_{çıkan}) = c_p(T_{02} - T_{01}) + g(z_2 - z_1)$$



V hızı ile akan ideal gaz tamamen durdurulduğuna sıcaklığı $V^2/2c_p$ kadar artar.

ÖRNEK 12-1 Uçakta Yüksek Hızlı Havanın Sıkıştırılması

Bir uçak 5000 m irtifada 250 m/s hızla uçmaktadır. Bu yükseklikteki atmosfer basıncı 54.05 kPa ve çevre sıcaklığı 255.7 K'dir. Hava kompresöre girmeden önce yayıcıda yavaşlatılmaktadır (Şekil 12-5). Yayıcı ve kompresörün izentropik olduğunu kabul ederek (a) kompresör girişindeki durma basıncını ve (b) kompresörün durma basıncı oranı 8 olduğuna göre, birim kütle başına gerekli olan kompresör işini bulunuz.

ÇÖZÜM Yüksek hızlı hava bir uçağın yayıcı ve kompresörüne girmektedir. Havanın durma basıncı ve kompresör işi belirlenecektir.

Kabuller 1 Yayıcı ve kompresör izentropiktir. 2 Hava, özgül ısıları sabit olan oda sıcaklığındaki bir ideal gazdır.

Özellikler Havanın sabit basınçtaki özgül ısı c_p ve özgül ısı oranı k

$$c_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \quad \text{ve} \quad k = 1.4$$

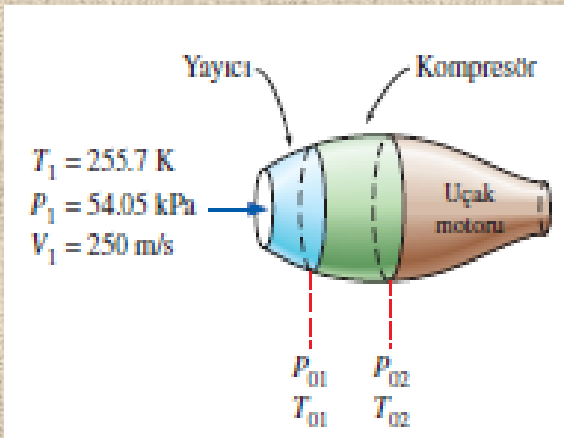
olarak verilmektedir.

Analiz (a) Kompresör girişindeki (yayıcı çıkışındaki) durma basıncı izentropik şartlarda Denklem 12-5'ten bulunabilir. Ancak ilk önce kompresör girişindeki durma sıcaklığını (T_{01}) bulmamız gerekir. Belirtilen şartlarda T_{01} Denklem 12-4'ten aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} T_{01} &= T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 255.7 \text{ K} + \frac{(250 \text{ m/s})^2}{(2)(1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})} \left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) \\ &= 286.8 \text{ K} \end{aligned}$$

Sonrasında Denklem 12-5'ten,

$$\begin{aligned} P_{01} &= P_1 \left(\frac{T_{01}}{T_1} \right)^{k/(k-1)} = (54.05 \text{ kPa}) \left(\frac{286.8 \text{ K}}{255.7 \text{ K}} \right)^{1.4/(1.4-1)} \\ &= 80.77 \text{ kPa} \end{aligned}$$



bulunur. Yani hava hızı 250 m/s'den sıfıra indirildiğinde, sıcaklık 31.1°C ve basınç 26.72 kPa artacaktır. Hava sıcaklığı ve basıncındaki bu artışlar kinetik enerjinin entalpiye dönüşmesinden kaynaklanmaktadır.

(b) Kompresör işini bulmak için kompresör çıkışındaki havanın durma sıcaklığını (T_{02}) bilmemiz gerekir. Kompresör çıkışı ile girişi arasındaki durma basıncı oranı $P_{02}/P_{01} = 8$ olarak verilmiştir. Sıkıştırma işlemi izentropik kabul edildiğine göre, T_{02} izentropik ideal gaz bağıntısından (Denklemler 12-5) bulunabilir:

$$T_{02} = T_{01} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (286.8 \text{ K})(8)^{(1.4-1)/1.4} = 519.5 \text{ K}$$

Potansiyel enerji değişimini ve ısı geçişini göz ardı ederek havanın birim kütlesi başına kompresör işi Denklem 12-8'den bulunabilir:

$$\begin{aligned} w_{\text{gizem}} &= c_p(T_{02} - T_{01}) \\ &= (1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(519.5 \text{ K} - 286.8 \text{ K}) \\ &= \mathbf{233.9 \text{ kJ/kg'dır.}} \end{aligned}$$

Dolayısıyla kompresöre verilen iş 233.9 kJ/kg'dır.

İrdeleme Durma özelliklerinin kullanılması ile akışın kinetik enerjisindeki herhangi bir değişiklik kendiliğinden hesaba katılmış olur.

12-2 ■ BİR-BOYUTLU İZENTROPİK AKIŞ

$$c = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_s}$$

Ses hızı

$$c = \sqrt{k(\partial P / \partial \rho)_T}$$

$$c = \sqrt{kRT}$$

İdeal bir
gaz için

k gazın özgül ısı oranı
 R gaz sabiti

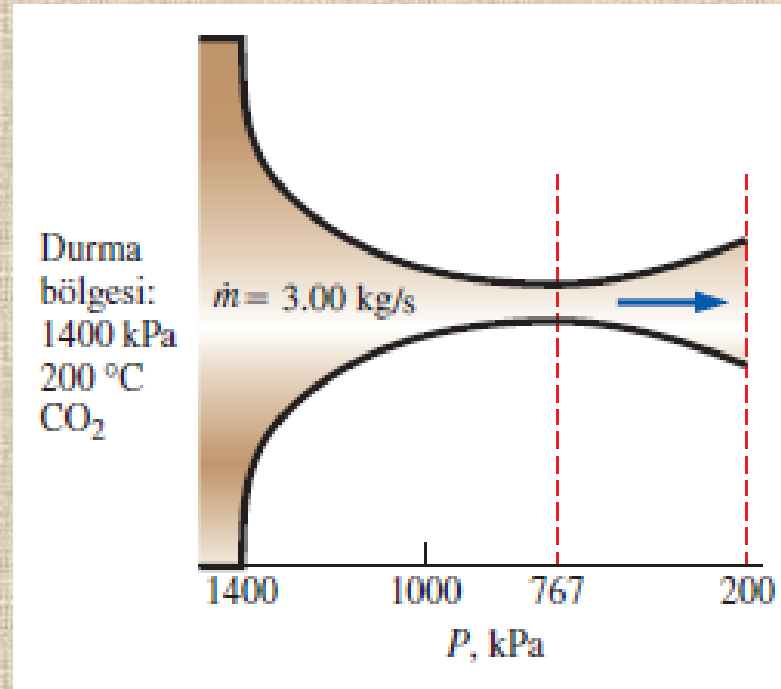
$$\text{Ma} = \frac{V}{c}$$

Mach
sayısı

Lüleler, yayıcılar gibi birçok sistemde ve türbin kanatlarının arasındaki akışlarda akış nicelikleri esasen sadece akış yönünde değişir ve akış, iyi bir doğrulukla, bir-boyutlu izentropik akış olarak ele alınabilir.

ÖRNEK 12-2 Bir Yakınsak-İraksak Kanaldaki Gaz Akışı

Şekil 12-6'da gösterilen lüle benzeri en-kesit alanı değişen bir kanalda karbondioksit 3 kg/s kütleli debi ile daimi olarak akmaktadır. Karbondioksit kanala 1400 kPa basınçta ve 200 °C sıcaklıkta düşük hızla girmekte ve lüle içerisinde 200 kPa basınca kadar genişlemektedir. Kanal, akış yaklaşık olarak izentropik olacak şekilde tasarlanmıştır. Kanal boyunca 200 kPa basınç düşüşüne karşılık gelen kesitlerdeki akışkan yoğunluğunu, akış hızını, en-kesit alanını ve Mach sayısını bulunuz.



ÇÖZÜM Karbondioksit en-kesit alanı değişen kanala belirtilen şartlarda girmektedir. Kanal boyunca akış özellikleri bulunacaktır.

Kabuller 1 Karbondioksit oda sıcaklığında sabit özgül ısı ideal gazdır. 2 Kanaldaki akış daimi, bir-boyutlu ve izentropiktir.

Özellikler Basitlik açısından hesaplamalarda $c_p = 0.846$ kJ/kg·K ve $k = 1.289$ kullanacağız. Bu değerler oda sıcaklığındaki karbondioksitin sabit basınçta özgül ısı ve özgül ısı oranı değerleridir. Karbondioksitin gaz sabiti $R = 0.1889$ kJ/kg·K'dir.

Analiz Giriş hızı küçük olduğundan, giriş sıcaklığı yaklaşık olarak durma sıcaklığına eşittir. Akış izentropiktir, dolayısıyla kanal boyunca durma sıcaklığı ve durma basıncı sabit kalır. Bu nedenle,

$$T_0 \cong T_1 = 200 \text{ }^\circ\text{C} = 473 \text{ K}$$

ve

$$P_0 \cong P_1 = 1400 \text{ kPa}$$

olur.

Çözüm yolunu göstermek için, 200 kPa basınç düşüşüne karşılık gelen ilk yer olan basıncın 1200 kPa olduğu konumda istenen özellikleri hesaplayacağız. Buna göre Denklem 12–5'ten,

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(k-1)/k} = (473 \text{ K}) \left(\frac{1200 \text{ kPa}}{1400 \text{ kPa}} \right)^{(1.289-1)/1.289} = 457 \text{ K}$$

Denklem 12–4'ten,

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2c_p(T_0 - T)} \\ &= \sqrt{2(0.846 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(473 \text{ K} - 457 \text{ K})\left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^3}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} \\ &= 164.5 \text{ m/s} \cong \mathbf{164 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

İdeal gaz bağıntısından,

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{1200 \text{ kPa}}{(0.1889 \text{ kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K})(457 \text{ K})} = \mathbf{13.9 \text{ kg/m}^3}$$

Kütleli debi bağıntısından,

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho V} = \frac{3.00 \text{ kg/s}}{(13.9 \text{ kg/m}^3)(164.5 \text{ m/s})} = 13.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = \mathbf{13.1 \text{ cm}^2}$$

Denklem 12–11 ve 12–12'den

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.289)(0.1889 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(457 \text{ K})\left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} = 333.6 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{164.5 \text{ m/s}}{333.6 \text{ m/s}} = \mathbf{0.493}$$

elde edilir. Diğer basınç adımları için bulunan sonuçlar Tablo 12–1'de özetlenmiş ve Şekil 12–7'de çizilmiştir.

TABLO 12-1

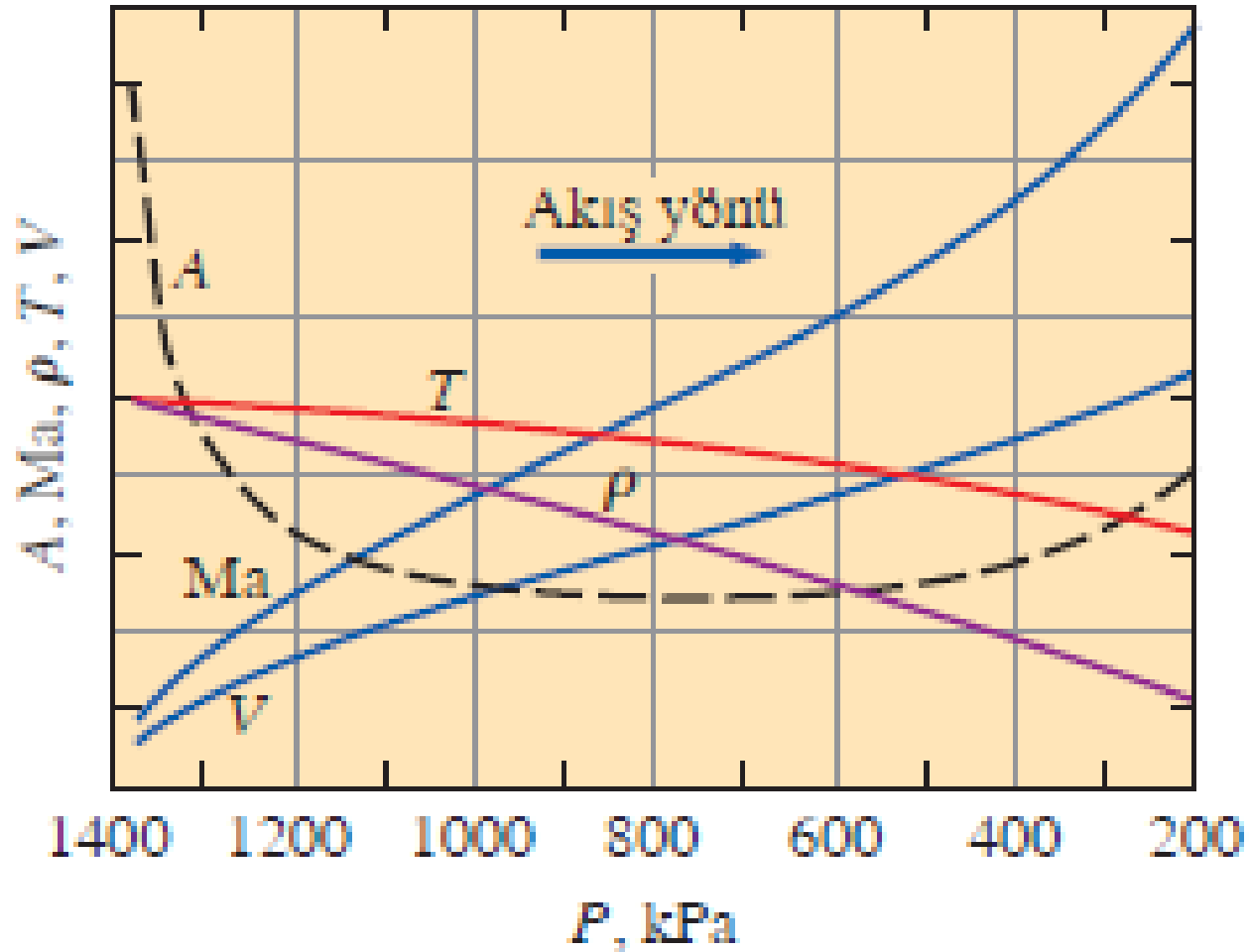
Örnek 12-2'de verilen kanalda $\dot{m} = 3 \text{ kg/s}$ = sabit olması halinde akışkan özelliklerinin akış yönünde değişimi

P , kPa	T , K	V , m/s	ρ , kg/m ³	c , m/s	A , cm ²	Ma
1400	473	0	15.7	339.4	∞	0
1200	457	164.5	13.9	333.6	13.1	0.493
1000	439	240.7	12.1	326.9	10.3	0.736
800	417	306.6	10.1	318.8	9.64	0.962
767*	413	317.2	9.82	317.2	9.63	1.000
600	391	371.4	8.12	308.7	10.0	1.203
400	357	441.9	5.93	295.0	11.5	1.498
200	306	530.9	3.46	272.9	16.3	1.946

* Yerel Mach sayısının 1 olduğu yerdeki kritik basınç 767 kPa'dır.

Basınç düştükçe sıcaklık ve ses hızı düşer, akışkan hızı ve Mach sayısı ise akış yönünde artar.

Akışkan hızı arttıkça yoğunluk önce yavaşça, sonra hızla düşer.



Basınç 1400kPa'dan 200kPa'a düşerken kanal boyunca boyutsuz akışkan özelliklerinin ve en-kesit alanının değişimi.

Örnek 12.2'den anlaşılacağı üzere basınç, kritik basınç değerine yani Mach sayısının 1 olduğu değere düşerken akış alanı da küçülür ve daha sonra basınçtaki daha fazla düşme ile birlikte akış alanı artmaya başlar.

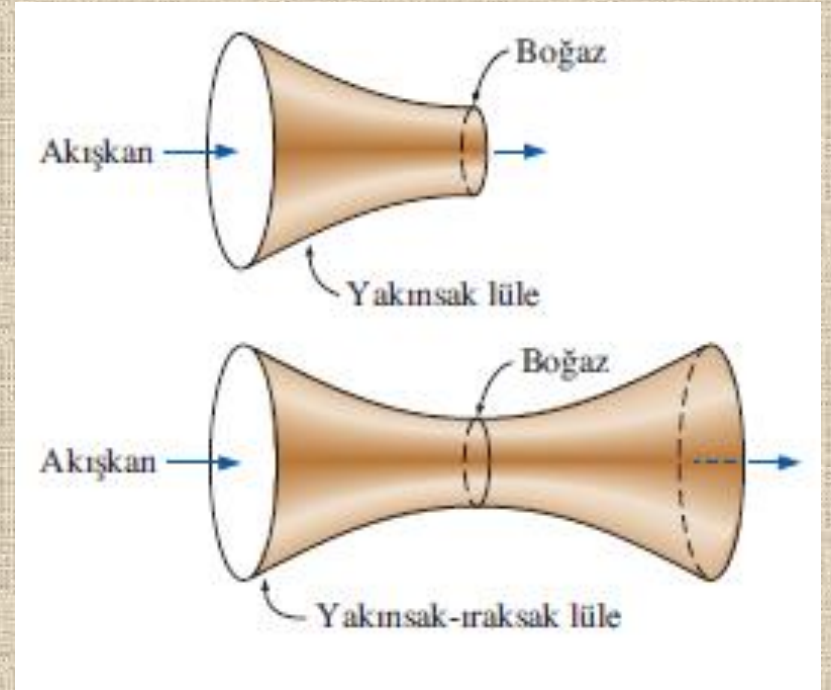
Akış alanının en küçük olduğu yerde $Ma=1$ 'dir ve buraya **boğaz** denir.

Akış alanının boğazdan sonra hızla büyümesine rağmen, akışkan hızı boğazı geçtikten sonra artmaya devam etmektedir.

Boğazı geçtikten sonra hızdaki bu artış, akışkan yoğunluğundaki ani düşmeden kaynaklanmaktadır.

Bu örnekte ele alınan kanalın akış alanı önce azalmakta sonra da artmaktadır. Böyle kanallara **yakınsak-ıraksak lüleler** denir.

Bu lüleler, gazları sesüstü hızlara çıkarmak için kullanılır ve **sıkıştırılmaz akışlar** için kullanılan **Venturi lüleleri** ile karıştırılmamalıdır



Lülede akış alanının en küçük olduğu yere **boğaz** denir.

Akışkan Hızının Akış Alanı ile Değişimi

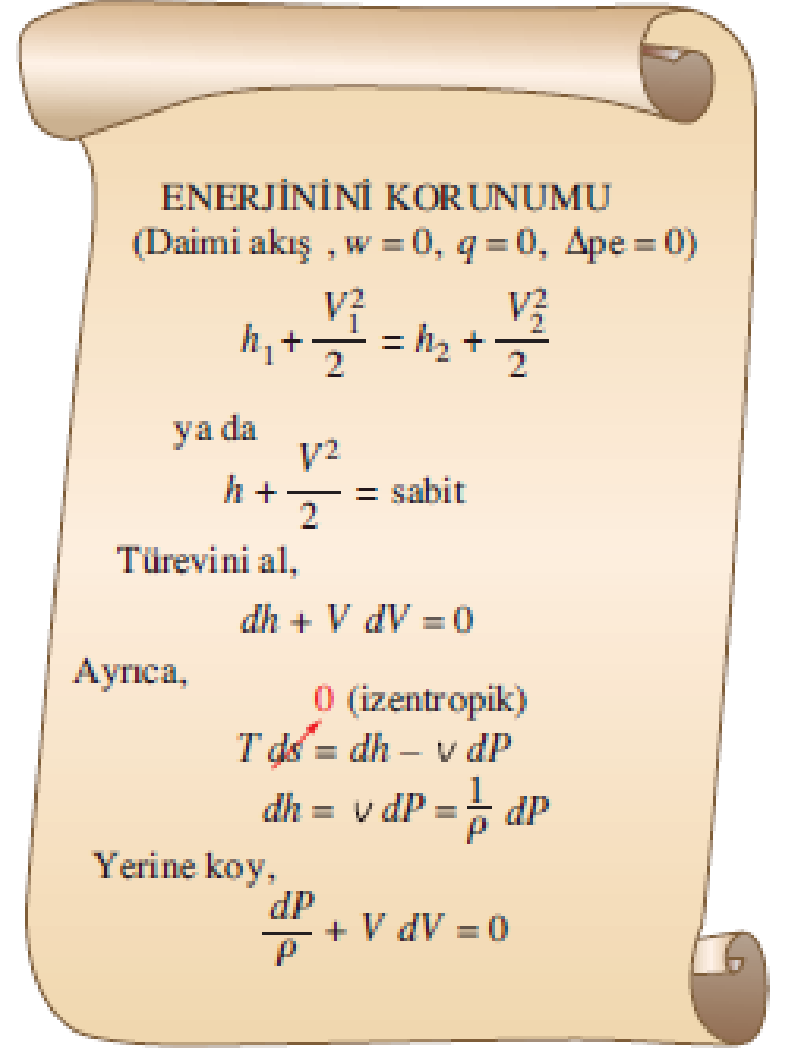
Bu bölümde, statik değerler ile durma özelliklerinin, Mach sayısına bağlı oranlarını veren bağıntılar geliştireceğiz.

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2} (1 - \text{Ma}^2)$$

Bu bağıntı basıncın akış alanı ile değişimini vermektedir.

Sesaltı akışlarda, yakınsak kanallarda basınç düşer (sesaltı lüleler) and ıraksak kanallarda ise basınç artar (sesaltı yayıcılar).

Sesüstü akışlarda, ıraksak kanallarda basınç düşer (sesüstü lüleler) ve yakınsak kanallarda ise basınç artar (sesüstü yayıcılar).



ENERJİNİNİ KORUNUMU
(Daimi akış , $w = 0$, $q = 0$, $\Delta p_e = 0$)

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

ya da

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{sabit}$$

Türevini al,

$$dh + V dV = 0$$

Ayrıca,

0 (izentropik)

$$T ds = dh - v dP$$
$$dh = v dP = \frac{1}{\rho} dP$$

Yerine koy,

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0$$

Daimi izentropik akışa ait enerji denkleminin diferansiyel biçiminin elde edilişi.

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}(1 - \text{Ma}^2)$$

Bu denklem sesaltı veya sesüstü izentropik akışlarda bir lüle veya yayıcının şeklini tayin eder.

$$\text{Sesaltı akış için } (\text{Ma} < 1), \quad \frac{dA}{dV} < 0$$

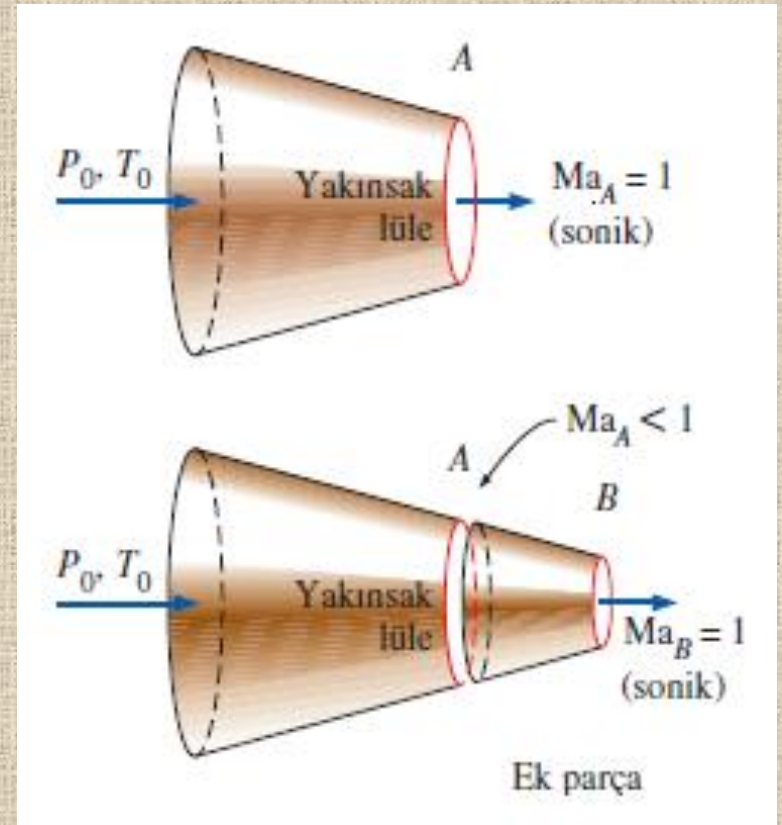
$$\text{Sesüstü akış için } (\text{Ma} > 1), \quad \frac{dA}{dV} > 0$$

$$\text{Sonik akış için } (\text{Ma} = 1), \quad \frac{dA}{dV} = 0$$

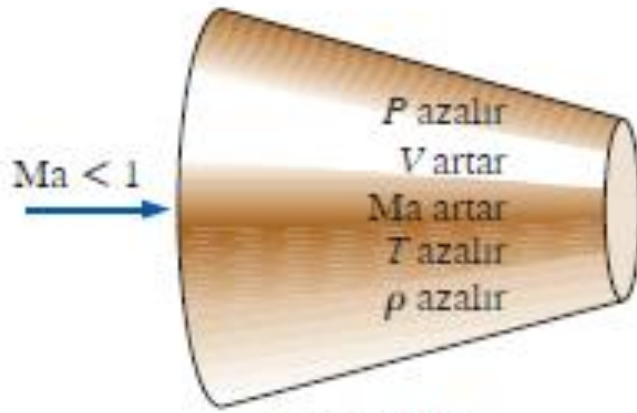
Bir lülenin uygun şekli, ses hızına göre istenen en yüksek hıza bağlıdır.

Akışkanı ivmelendirmek için, sesaltı hızlarda yakınsak bir lüle, sesüstü hızlarda ise ıraksak bir lüle kullanmalıyız .

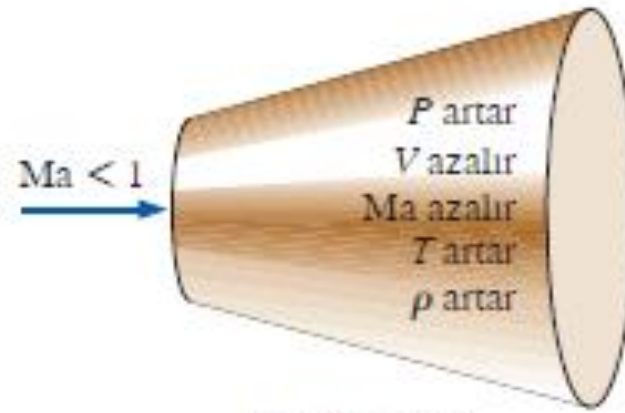
Bir akışkanı sesüstü hıza ivmelendirmek için, yakınsak-ıraksak lüle kullanmalıyız.



Yakınsak lüleye yakınsak bir parça ekleyerek sesüstü hızlara erişemeyiz. Bu sonik kesiti aşağıakımın daha uzağına taşımaktan başka bir işe yaramayacak ve kütleli debiyi azaltacaktır.

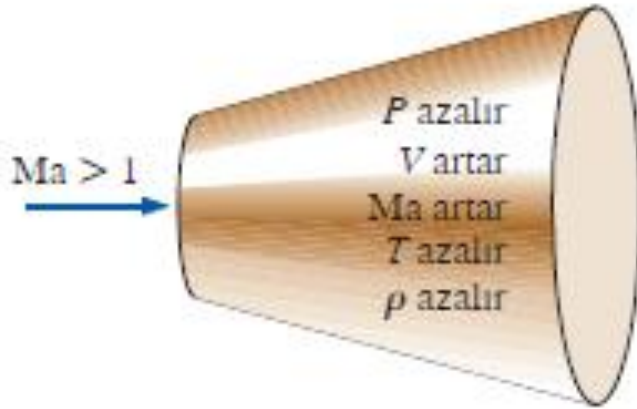


Sesaltı lüle

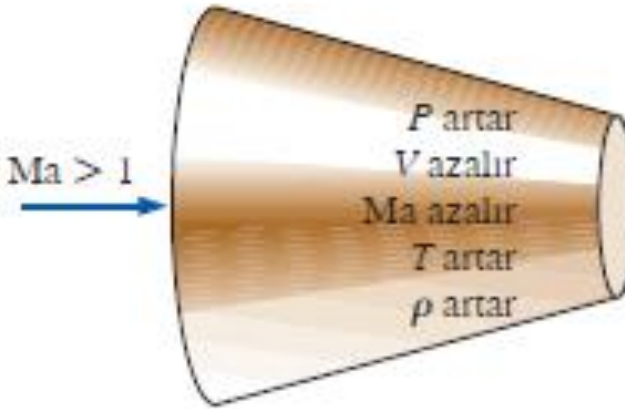


Sesaltı yayıcı

(a) Sesaltı akış



Sesüstü lüle



Sesüstü yayıcı

(b) Sesüstü akış

Sesaltı ve sesüstü lülelerde ve yayıcılarda akış özelliklerinin değişimi.

İdeal Gazların İzentropik Akışına Ait Özellik Bağlıntıları

İdeal gazın statik özellikleri ile durma özellikleri arasındaki bağıntıları özgün ısı oranı ve Mach sayısı cinsinden elde edebiliriz.

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2 \right]^{k/(k-1)}$$

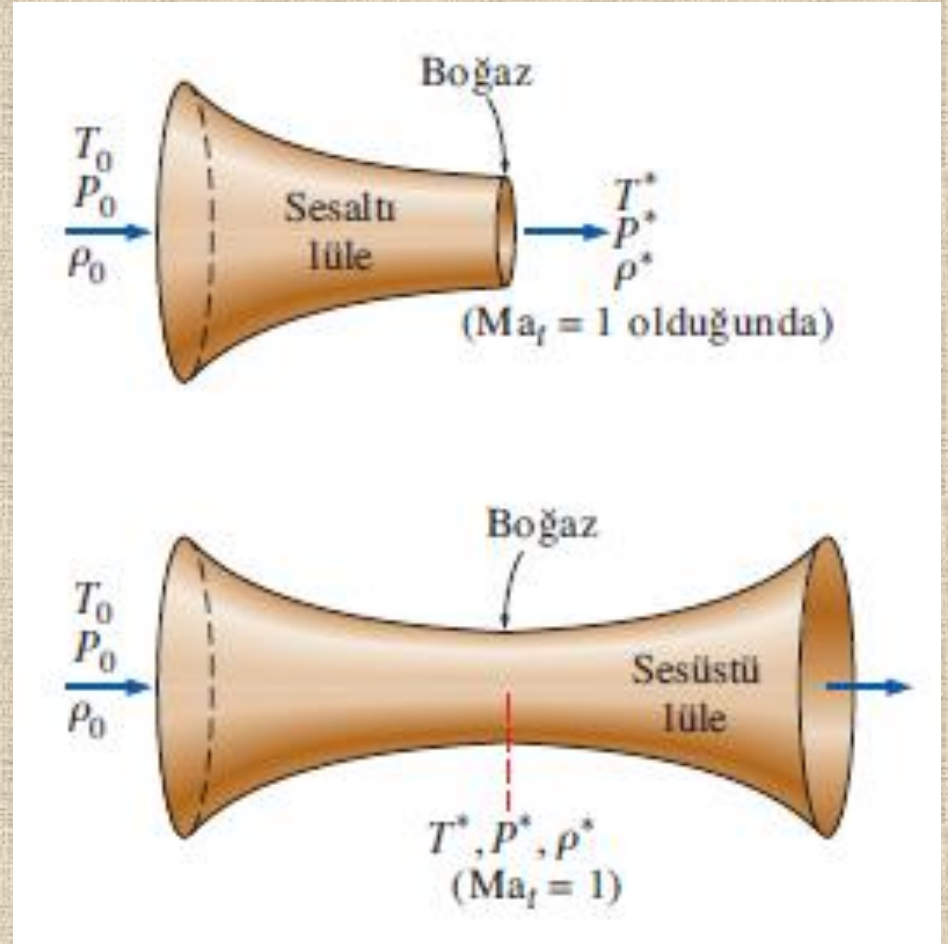
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2 \right]^{1/(k-1)}$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)}$$

Kritik özellikler
(Ma=1)



$\text{Ma}_t = 1$ olduğunda lüle boğazındaki özellikler kritik özellikler olur.

TABLO 12-2

Bazı ideal gazların izentropik akışında kritik basınç, kritik sıcaklık ve kritik yoğunluk oranları.

	Kızgın buhar, $k = 1.3$	Sıcak yanma ürünleri, $k = 1.33$	Hava $k = 1.4$	Tek atomlu gazlar, $k = 1.667$
$\frac{P^*}{P_0}$	0.5457	0.5404	0.5283	0.4871
$\frac{T^*}{T_0}$	0.8696	0.8584	0.8333	0.7499
$\frac{\rho^*}{\rho_0}$	0.6276	0.6295	0.6340	0.6495

ÖRNEK 12-3 Gaz Akışında Kritik Sıcaklık ve Basınç

Örnek 12-2'de (Şekil 12-13) verilen akış şartlarında karbondioksitin kritik basınç ve kritik sıcaklığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM Örnek 12-2'de ele alınan akışın kritik basınç ve kritik sıcaklığı hesaplanacaktır.

Kabuller 1 Akış daimi, adyabatik ve bir-boyutludur. 2 Karbondioksit sabit özgül ısı ideal gazdır.

Özellikler Karbondioksitin oda sıcaklığındaki özgül ısı oranı $k = 1.289$ 'dur.

Analiz Kritik sıcaklık ve kritik basınç değerlerinin durma değerlerine oranları,

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k + 1} = \frac{2}{1.289 + 1} = 0.8737$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k + 1} \right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{1.289 + 1} \right)^{1.289/(1.289-1)} = 0.5477$$

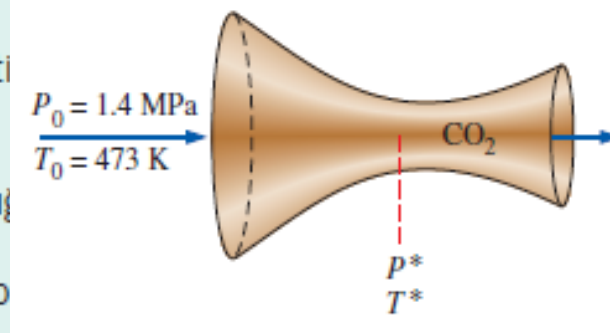
olarak bulunur. Örnek 12-2'den durma sıcaklığı ve basıncı $T_0 = 473$ K ve $P_0 = 1400$ kPa olarak bulunmuştur. Bu durumdaki kritik sıcaklık ve basınç ise,

$$T^* = 0.8737T_0 = (0.8737)(473 \text{ K}) = \mathbf{413 \text{ K}}$$

$$P^* = 0.5477P_0 = (0.5477)(1400 \text{ kPa}) = \mathbf{767 \text{ kPa}}$$

olarak elde edilir.

İrdeleme Beklendiği gibi bu değerler Tablo 12-1'de 5. satırda verilen değerlerle uyumludur. Ayrıca boğazda, burada hesaplananlar dışındaki özellik değerleri akışın kritik olmadığını ve Mach sayısının 1 olmadığını göstermektedir.



12-3 ■ LÜLELERDE İZENTROPİK AKIŞ

Yakınsak veya yakınsak-ırsak lüleler, buhar ve gaz türbinleri, uçak ve uzay araçlarının itici güç sistemlerinde kullanılmaktadır.

Bu kısımda karşı basınç değerinin (örneğin lülenin boşalma bölgesinde uygulanan basınç); çıkış hızı, kütleli debi ve lüledeki basınç dağılımı üzerindeki etkileri inceleyeceğiz.

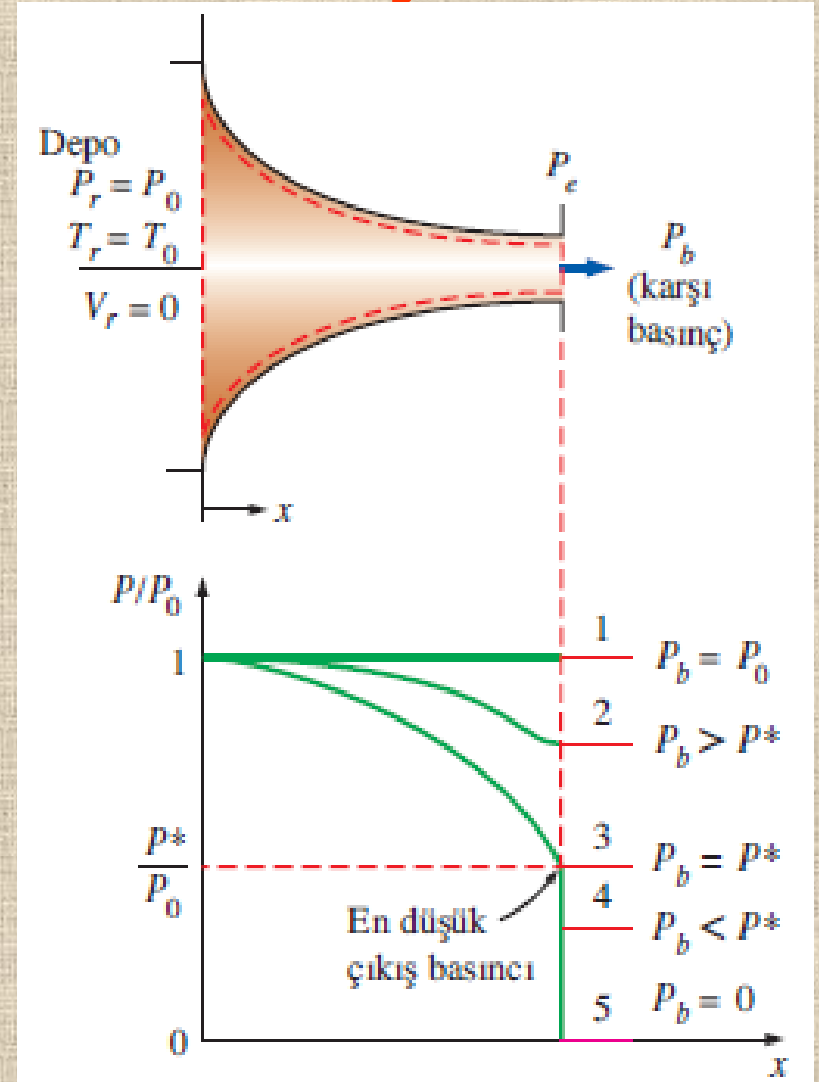
Yakınsak lüleler

Lüledeki kütleli debi

$$\dot{m} = \frac{A Ma P_0 \sqrt{k/(RT_0)}}{[1 + (k-1)Ma^2/2]^{(k+1)/[2(k-1)]}}$$

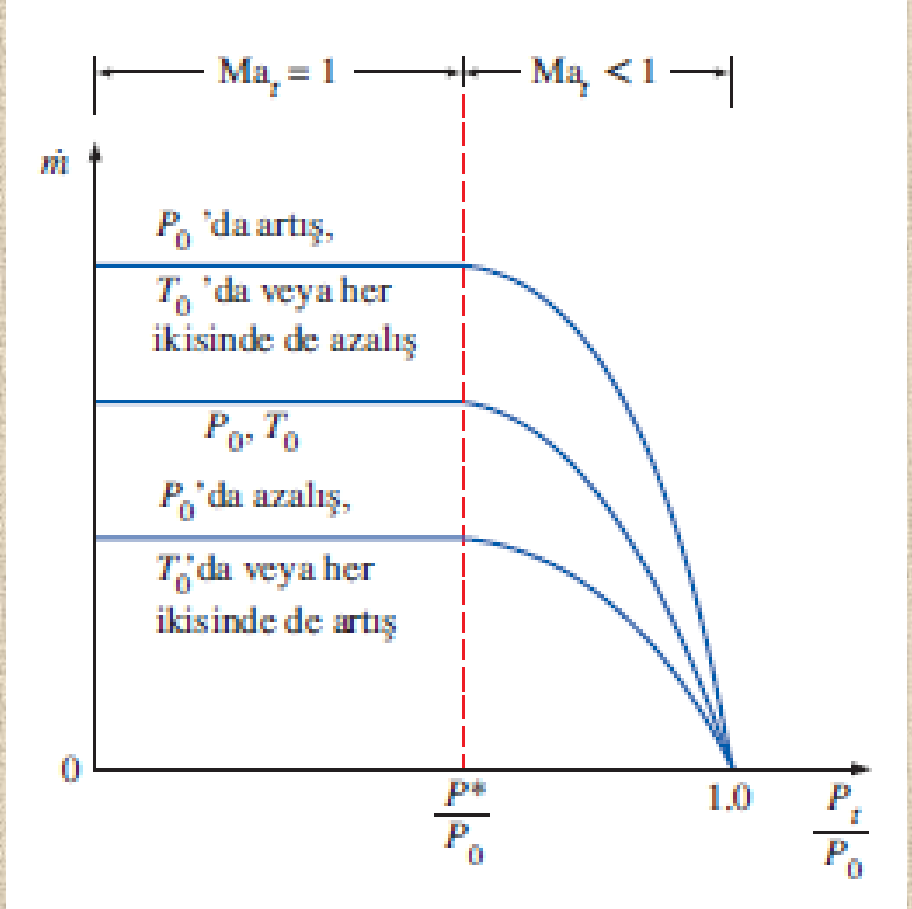
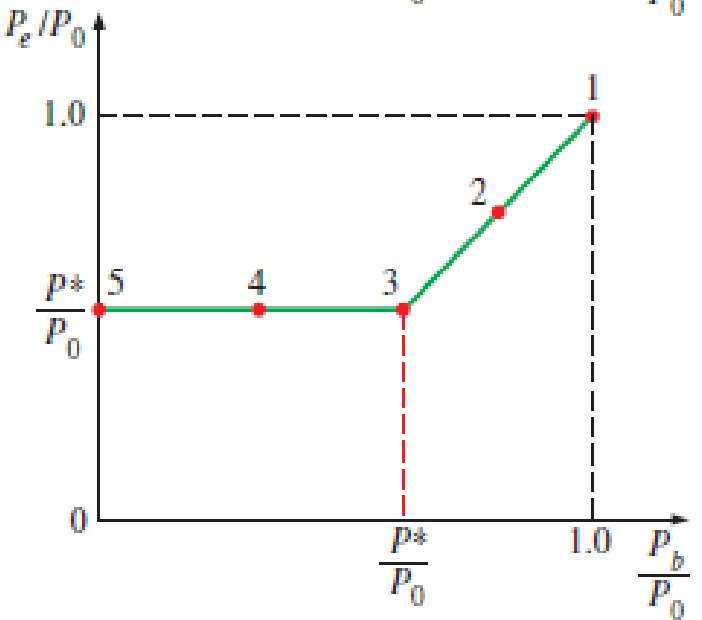
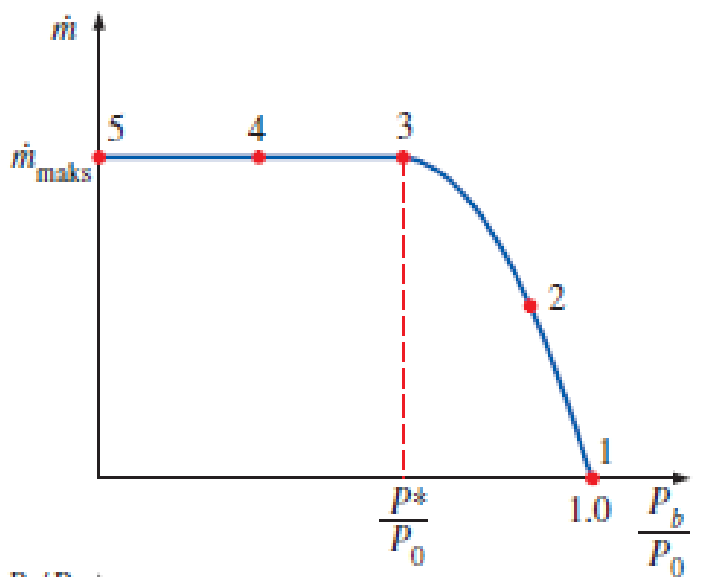
Maksimum kütleli debi

$$\dot{m}_{\max} = A^* P_0 \sqrt{\frac{k}{RT_0} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/[2(k-1)]}}$$



Karşı basıncın bir yakınsak lüle boyunca basınç dağılımı üzerindeki etkisi.

$$P_e = \begin{cases} P_b & P_b \geq P^* \text{ için} \\ P^* & P_b < P^* \text{ için} \end{cases}$$



Bir lüledeki kütleli debinin girişteki durma özellikleri ile değişimi.

Karşı basınç P_b 'nin yakınsak bir lüleden geçen kütleli debi ve çıkış basıncı P_e üzerindeki etkisi.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \right]^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c^*}$$

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c} \frac{c}{c^*} = \frac{\text{Ma}c}{c^*} = \frac{\text{Ma} \sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = \text{Ma} \sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

$$\text{Ma}^* = \text{Ma} \sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}}$$

Ma* boğazdaki ses hızına göre boyutsuzlaştırılmış yerel hızdır.

Ma yerel ses hızına göre boyutsuzlaştırılmış yerel hızdır.

Ma	Ma*	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.90	0.9146	1.0089	0.5913	⋮	⋮
1.00	1.0000	1.0000	0.5283	⋮	⋮
1.10	1.0812	1.0079	0.4684	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Lüle ve yayıcılardaki izentropik akışa ait değişik özelliklerin oranları $k = 1.4$ (hava için) Tablo A-13'de verilmiştir.

ÖRNEK 12-4 Karşı Basıncın Kütlelel Debi Üzerindeki Etkisi

Şekil 12-18'de gösterilen yakınsak lüleye 1 MPa ve 600 °C 'deki hava 150 m/s hızla girmektedir. Boğaz alanı 50 cm^2 olan bu lüledeki kütlelel debiyi (a) 0.7 MPa ve (b) 0.4 MPa karşı basınç değerleri için bulunuz.



ÇÖZÜM Yakınsak lüleye hava girmektedir. Farklı karşı basınç değerleri için lüledeki havanın kütlelel debisi hesaplanacaktır.

Kabuller 1 Hava oda sıcaklığında sabit özgül ısılı ideal gazdır. 2 Lüledeki akış daimi, bir-boyutlu ve izentropiktir.

Özellikler Havanın sabit basınçtaki özgül ısı ve özgül ısı oranı sırasıyla $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ve $k = 1.4$ 'tür.

Analiz Lüle girişinde ve boğazdaki özellikleri temsil etmek için sırasıyla i ve t alt indislerini kullanacağız. Lüle girişindeki durma sıcaklığı ve durma basıncı Denklem 12-4 ve 12-5'ten bulunabilir:

$$T_{0i} = T_i + \frac{V_i^2}{2c_p} = 873 \text{ K} + \frac{(150 \text{ m/s})^2}{2(1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})} \left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) = 884 \text{ K}$$

$$P_{0i} = P_i \left(\frac{T_{0i}}{T_i} \right)^{k/(k-1)} = (1 \text{ MPa}) \left(\frac{884 \text{ K}}{873 \text{ K}} \right)^{1.4/(1.4-1)} = 1.045 \text{ MPa}$$

(a) Bu durumdaki karşı basınç oranı,

$$\frac{P_b}{P_0} = \frac{0.7 \text{ MPa}}{1.045 \text{ MPa}} = 0.670$$

olur. Bu değer, kritik basınç oranı 0.5283'ten daha büyüktür. Bundan dolayı bu durumdaki çıkış düzlemi basıncı (veya boğaz basıncı P_t) karşı basınca eşittir. Yani $P_t = P_b = 0.7 \text{ MPa}$ ve $P_t / P_0 = 0.670$. Buna göre akış boğulmamıştır diyebiliriz. Tablo A-13'ten $P_t / P_0 = 0.670$ için $Ma_t = 0.778$ ve $T_t / T_0 = 0.892$ okunur.

Lüledeki kütleli debi Denklem 12-24'ten hesaplanabilir. Ancak aşağıda gösterildiği gibi de hesaplanabilir:

$$T_t = 0.892T_0 = 0.892(884 \text{ K}) = 788.5 \text{ K}$$

$$\rho_t = \frac{P_t}{RT_t} = \frac{700 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K})(788.5 \text{ K})} = 3.093 \text{ kg/m}^3$$

$$\begin{aligned} V_t &= Ma_t c_t = Ma_t \sqrt{kRT_t} \\ &= (0.778) \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(788.5 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} \\ &= 437.9 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\dot{m} = \rho_t A_t V_t = (3.093 \text{ kg/m}^3)(50 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(437.9 \text{ m/s}) = \mathbf{6.77 \text{ kg/s}}$$

(b) Bu durumdaki karşı basınç oranı,

$$\frac{P_b}{P_0} = \frac{0.4 \text{ MPa}}{1.045 \text{ MPa}} = 0.383$$

olacaktır. Bu değer kritik basınç oranı 0.5283'ten daha küçüktür. Bu nedenle, sonik şartlar lüenin çıkış düzleminde (boğazda) ortaya çıkar ve $Ma = 1$ olur. Bu durumda akış boğulur ve lüledeki kütleli debi Denklem 12-25'ten,

$$\begin{aligned} \dot{m} &= A \cdot P_0 \sqrt{\frac{k}{RT_0} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/[2(k-1)]}} \\ &= (50 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(1045 \text{ kPa}) \sqrt{\frac{1.4}{(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(884 \text{ K})} \left(\frac{2}{1.4+1} \right)^{2.4/0.8}} \\ &= \mathbf{7.10 \text{ kg/s}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır, zira $\text{kPa}\cdot\text{m}^2\sqrt{\text{kJ/kg}} = \sqrt{1000} \text{ kg/s}$ 'dir.

İrdeleme Bu değer belirtilen giriş şartları ve lüle boğaz alanı için lüledeki maksimum kütleli debidir.

ÖRNEK 12-5 Patlak Lastikten Hava Kaçağı

Bir otomobil lastiğindeki hava, atmosfer basıncının 94 kPa olduğu bir ortamda 220 kPa (etkin) basınçta tutulmaktadır. Tekerlekteki hava ortam sıcaklığı olan 25 °C'dedir. Bir kaza sonucu tekerlekte 4 mm çapında bir delik oluşmuştur. İzentropik akış kabulü ile delikten kaçan havanın başlangıçtaki kütleli debisini bulunuz.



Özellikler Havanın gaz sabiti $R = 0.287 \text{ kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K}$ 'dir. Havanın oda sıcaklığında özgül ısı oranı $k = 1.4$ 'tür.

Analiz Lastikteki mutlak basınç

$$P = P_{\text{etkin}} + P_{\text{atm}} = 220 + 94 = 314 \text{ kPa}$$

Kritik basınç (Tablo 12-2'den)

$$P^* = 0.5283P_o = (0.5283)(314 \text{ kPa}) = 166 \text{ kPa} > 94 \text{ kPa}$$

Dolayısıyla akış boğulmuştur ve deliğin çıkışındaki hız ses hızına eşittir. Bu durumda çıkıştaki akış özellikleri:

$$\rho_o = \frac{P_o}{RT_o} = \frac{314 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K})(298 \text{ K})} = 3.671 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho^* = \rho \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} = (3.671 \text{ kg/m}^3) \left(\frac{2}{1.4+1} \right)^{1/(1.4-1)} = 2.327 \text{ kg/m}^3$$

$$T^* = \frac{2}{k+1} T_o = \frac{2}{1.4+1} (298 \text{ K}) = 248.3 \text{ K}$$

$$V = c = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right) (248.3 \text{ K})}$$

$$= 315.9 \text{ m/s}$$

Bu durumda delikten kaçan havanın başlangıçtaki kütleli debisi:

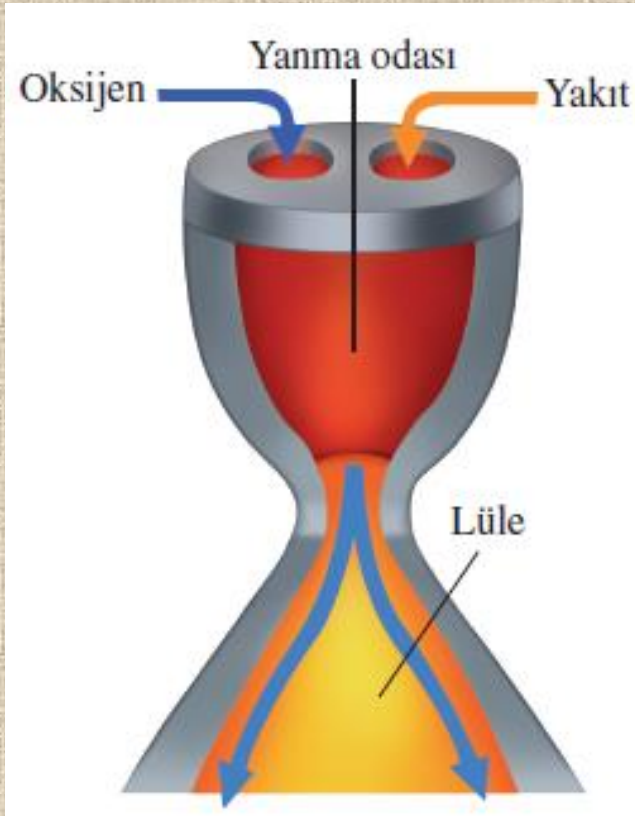
$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho AV = (2.327 \text{ kg/m}^3) [\pi(0.004 \text{ m})^2/4] (315.9 \text{ m/s}) = 0.00924 \text{ kg/s} \\ &= \mathbf{0.554 \text{ kg/dakika}} \end{aligned}$$

İrdeleme Tekerleğin içindeki basıncın düşmesinden dolayı kütleli debi zamanla azalmaktadır.

Yakınsak-İraksak Lüleler

Yakınsak lülede bir akışkanın çıkarılabileceği en yüksek hız, lülenin çıkış düzleminde (boğaz) oluşan ses hızı ($Ma = 1$) ile sınırlıdır.

Akışkanın sesüstü hızlara ($Ma > 1$) çıkarılması, sesaltı lülenin boğaz kısmına sadece iraksak bir akış bölümü eklenerek gerçekleştirilebilir. Ortaya çıkan birleşik akış bölümü bir yakınsak-ıraksak lüledir ve sesüstü uçak ve roketlerin itici güç sistemlerinde bu bir standart donanımdır.

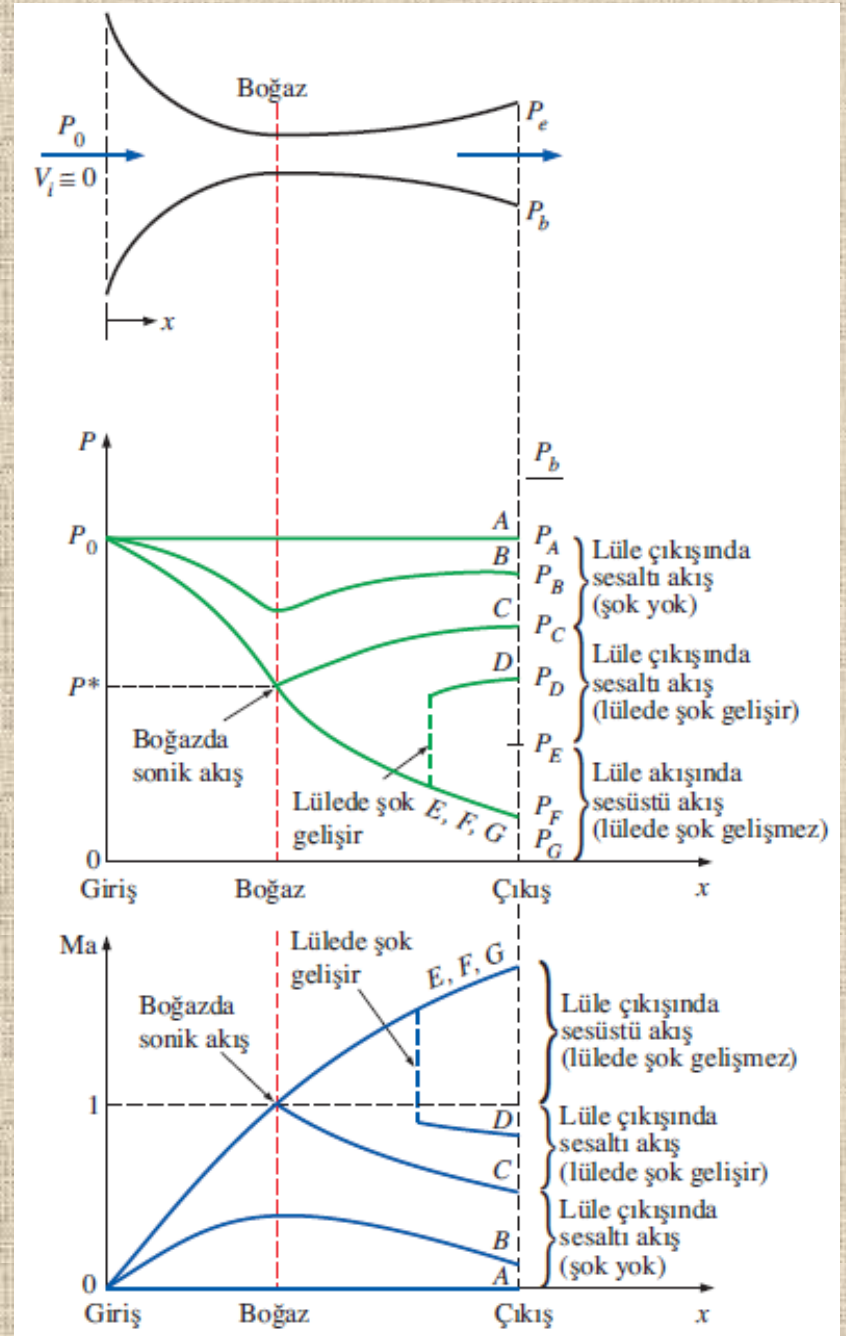


Yakınsak-ıraksak lüleler roket motorlarında yüksek itiş sağlamak amacıyla yaygın olarak kullanılır.

$P_b = P_0$ (A durumu) olduğunda, lülede akış oluşmaz.

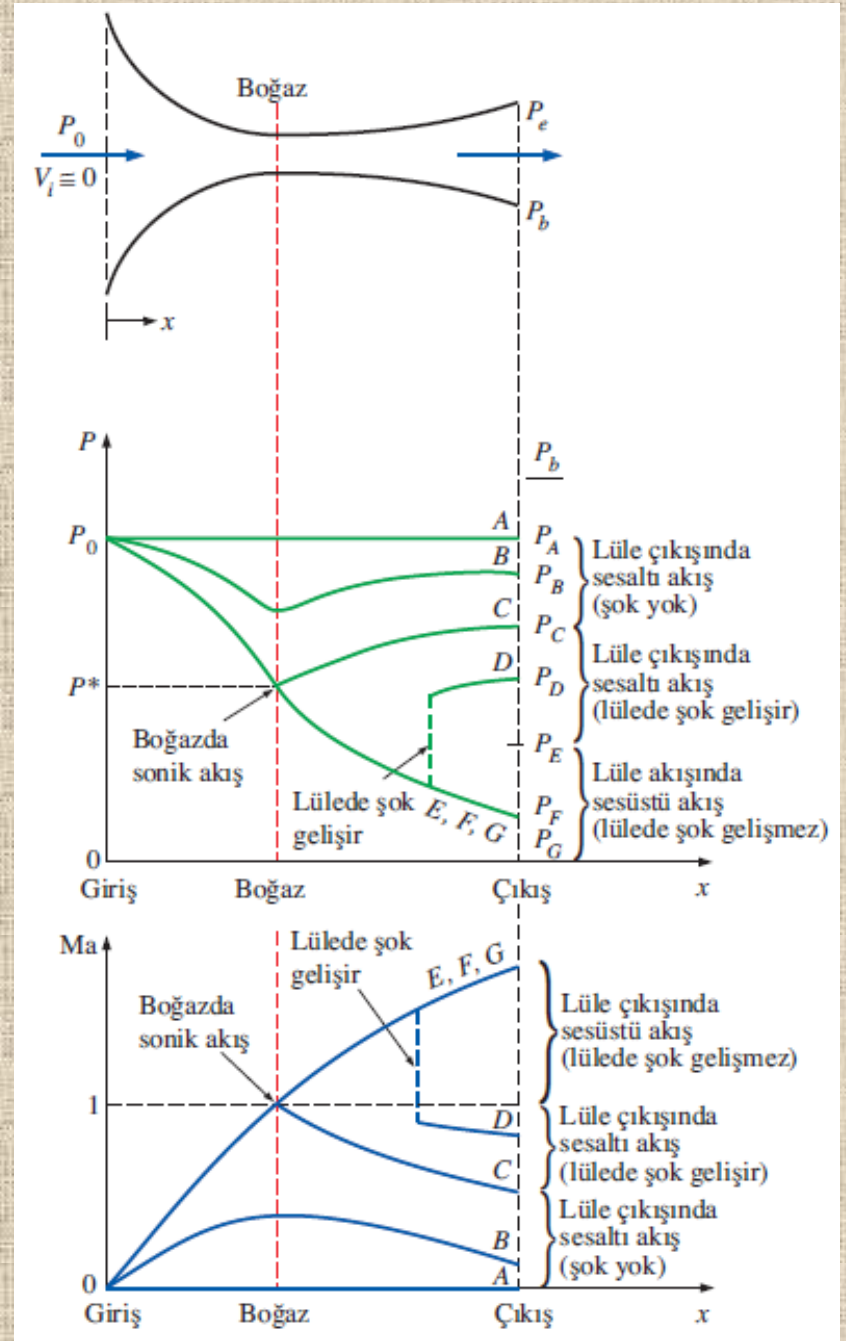
1. $P_0 > P_b > P_c$ olduğunda, lüledeki akış, girişten çıkışa kadar sesaltı olarak kalır ve kütleli debi, boğulmuş akıştaki değerden daha azdır. Yakınsak kısımda akışkan hızı artar ve boğazda maksimum değerine ulaşır (ancak $Ma < 1$ 'dir). Bununla birlikte, kazanılan hızın çoğu lülenin yayıcı gibi davranan iraksak kısımda kaybedilir. Basınç yakınsak kısımda düşer, boğazda minimum değerine ulaşır, iraksak kısımda ise hızın düşmesine bağlı olarak yükselir.

Yakınsak-iraksak bir lülede karşı basıncın akış üzerindeki etkisi.



2. $P_b = P_c$ olduğunda olduğunda boğaz basıncı P^* 'e eşit olur ve akışkan boğazda ses hızına ulaşır. Ancak lülenin iraksak kısmı hala yayıcı gibi davranmaktadır ve akışkanı sesaltı hızlara doğru yavaşlatır. P_b 'nin düşmesi ile artan kütleli debi de maksimum değerine ulaşır.

3. $P_c > P_b > P_e$ olduğunda olduğunda boğazda sonik hıza ulaşan akışkan, basınç düştükçe iraksak kısımda sesüstü hızlara çıkmaya devam eder. Ancak boğaz ile çıkış düzlemi arasında bir yerde **normal şok** oluşmaya başladığında ivmelenme aniden durur. Bu ise hızın aniden sesaltı seviyelerine inmesine ve basıncın aniden yükselmesine yol açar. Sonrasında akışkan, yakınsak-iraksak lülenin geri kalan kısmında daha da yavaşlamaya devam eder.

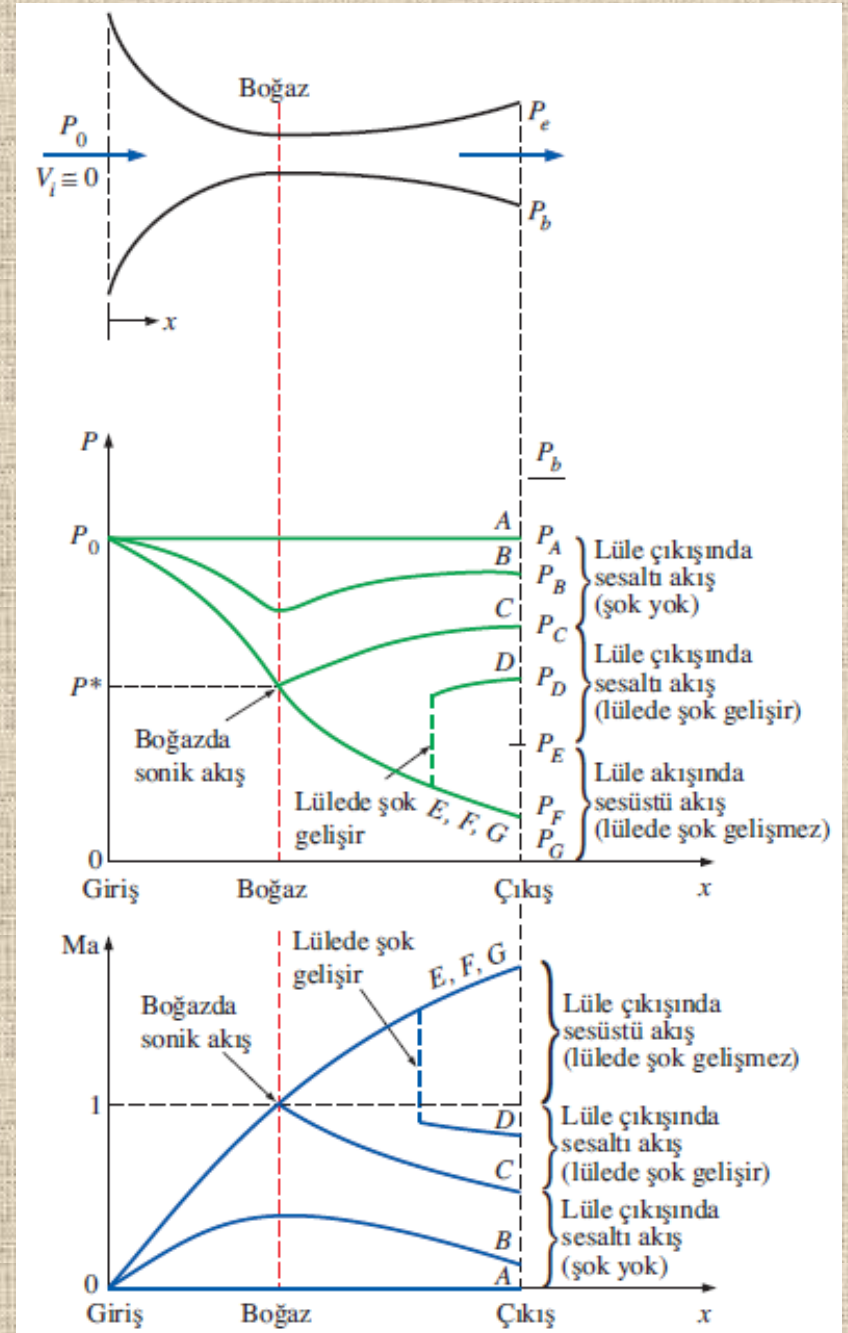


4. $P_E > P_b > 0$ olduğunda, olduğunda iraksak kısımdaki akış sesüstüdür ve lülede normal şok oluşmaksızın akışkan lüle çıkışında P_F basıncına kadar genişler. Dolayısıyla lüledeki akış izentropik olarak düşünülebilir.

$P_b = P_F$ olduğunda, lülenin içinde veya dışında şok oluşmaz.

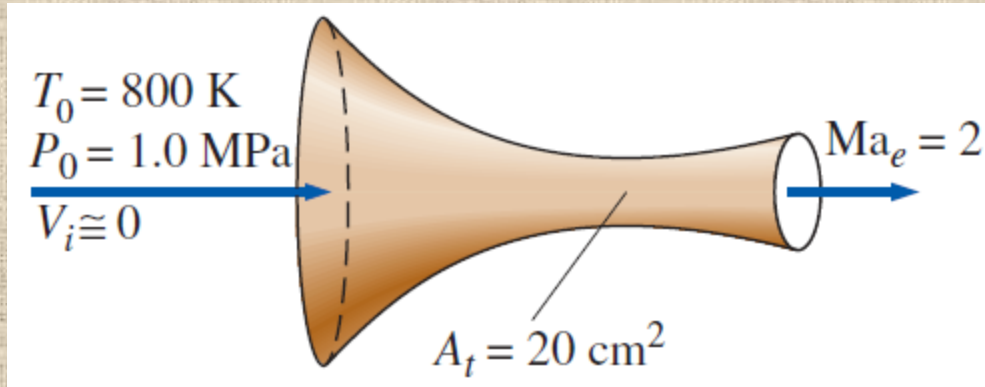
$P_b < P_F$ olduğunda, tersinmez karışma ve genişleme dalgaları lülenin çıkış düzleminin aşağıakımında ortaya çıkar.

$P_b > P_F$ olduğunda, akışkanın basıncı, lüle çıkışının art izinde tersinmez bir şekilde P_F 'den P_b 'ye yükselerek eğik şoklar oluşturur.



ÖRNEK 12-6 Yakınsak-İraksak Lülede Hava Akışı

Hava, Şekil 12-22'de gösterilen yakınsak-ıraksak lüleye 1.0 MPa ve 800 K'de ihmal edilebilir bir hızla girmektedir. Akış daimi, bir-boyutlu ve izentropiktir, $k = 1.4$ 'tür. Çıkıştaki Mach sayısı $Ma = 2$ ve boğaz alanı 20 cm^2 olduğuna göre, (a) boğaz şartlarını, (b) çıkış alanı dahil çıkış şartlarını ve (c) lüledeki kütleli debiyi bulunuz.



Özellikler Havanın özgül ısı oranı $k = 1.4$ olarak verilmiştir. Havanın gaz sabiti $0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$.

Analiz Çıkıştaki Mach sayısı 2 olarak verilmiştir. Buna göre akış boğazda sonik, lülenin iraksak kısmında ise sesüstü olmalıdır. Giriş hızı ihmal edilebilir olduğundan durma noktasındaki basınç ve sıcaklık girişteki basınç ve sıcaklıkla aynıdır, yani $P_0 = 1.0 \text{ MPa}$ ve $T_0 = 800 \text{ K}$. İdeal gaz davranışı kabul edilirse durma yoğunluğu şu şekilde bulunur:

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{1000 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K})(800 \text{ K})} = 4.355 \text{ kg/m}^3$$

(a) Lüle boğazında $Ma = 1$, ve Tablo A-13'ten

$$\frac{P^*}{P_0} = 0.5283 \quad \frac{T^*}{T_0} = 0.8333 \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6339$$

okunur. Buradan,

$$P^* = 0.5283P_0 = (0.5283)(1.0 \text{ MPa}) = \mathbf{0.5283 \text{ MPa}}$$

$$T^* = 0.8333T_0 = (0.8333)(800 \text{ K}) = \mathbf{666.6 \text{ K}}$$

$$\rho^* = 0.6339\rho_0 = (0.6339)(4.355 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{2.761 \text{ kg/m}^3}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} V^* = c^* &= \sqrt{kRT^*} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(666.6 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} \\ &= \mathbf{517.5 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

(b) Akış izentropik olduğu için çıkıştaki özellikler Tablo A-13 kullanılarak hesaplanabilir. $Ma = 2$ için Tablo A-13'ten:

$$\frac{P_e}{P_0} = 0.1278 \quad \frac{T_e}{T_0} = 0.5556 \quad \frac{\rho_e}{\rho_0} = 0.2300 \quad Ma_e^* = 1.6330 \quad \frac{A_e}{A^*} = 1.6875$$

Buradan,

$$P_e = 0.1278P_0 = (0.1278)(1.0 \text{ MPa}) = \mathbf{0.1278 \text{ MPa}}$$

$$T_e = 0.5556T_0 = (0.5556)(800 \text{ K}) = \mathbf{444.5 \text{ K}}$$

$$\rho_e = 0.2300\rho_0 = (0.2300)(4.355 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{1.002 \text{ kg/m}^3}$$

$$A_e = 1.6875A^* = (1.6875)(20 \text{ cm}^2) = \mathbf{33.75 \text{ cm}^2}$$

ve

$$V_e = Ma_e^*c^* = (1.6330)(517.5 \text{ m/s}) = \mathbf{845.1 \text{ m/s}}$$

elde edilir. Lüle çıkış hızı, çıkış şartlarındaki ses hızı c_e olmak üzere $V_e = Ma_e c_e$ 'den de bulunabilir:

$$\begin{aligned} V_e &= Ma_e c_e = Ma_e \sqrt{kRT_e} = 2 \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(444.5 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} \\ &= \mathbf{845.2 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

(c) Akış daimi olduğundan akışkanın kütleli debisi lülenin bütün bölümlerinde aynıdır. Dolayısıyla kütleli debi, lülenin herhangi bir en-kesitindeki özellikler kullanılarak hesaplanabilir. Boğazdaki özellikler kullanarak kütleli debi,

$$\dot{m} = \rho^* A^* V^* = (2.761 \text{ kg/m}^3)(20 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(517.5 \text{ m/s}) = \mathbf{2.86 \text{ kg/s}}$$

olarak hesaplanır.

12-4 ■ ŞOK DALGALARI ve GENİŞLEME DALGALARI

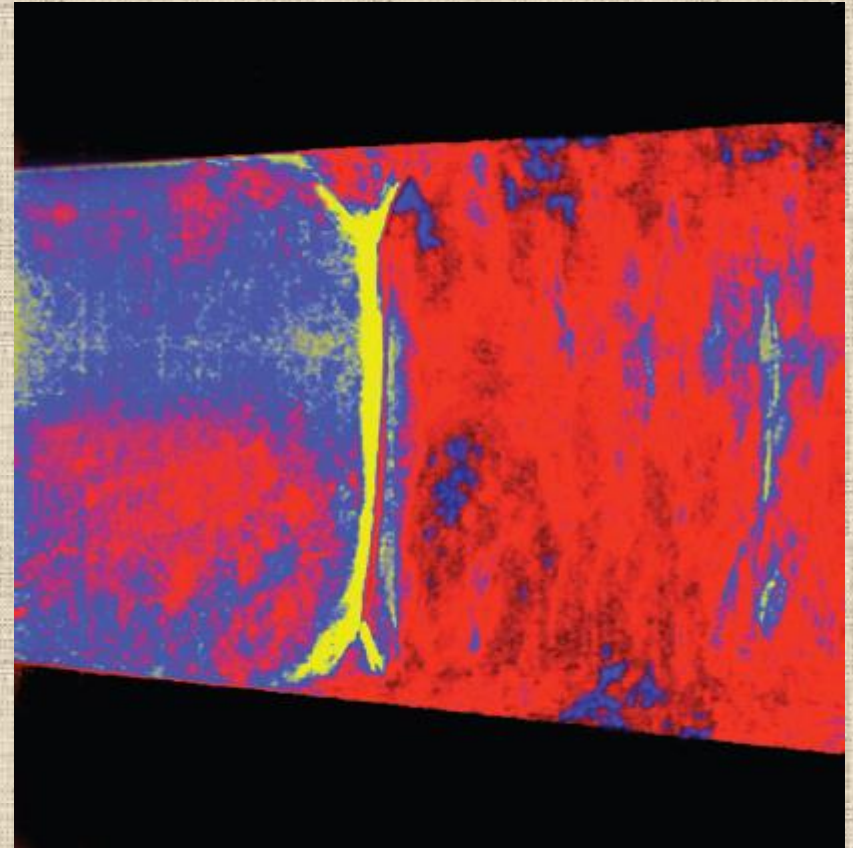
Sesüstü akış şartlarındaki bazı karşı basınç değerlerinde, yakınsak-ıraksak lüenin çok ince bir bölümünde , akışkan özelliklerinde **şok dalgası** meydana getiren ani değişiklikler olur.

Bu kısımdaki amacımız, şok dalgalarının hangi şartlarda oluştuğunu ve bunların akışı nasıl etkilediğini belirlemektedir.

Normal Şoklar

Normal şok dalgaları: Akış yönüne dik bir düzlemde oluşan şok dalgalarıdır. Şok dalgasından akış yüksek oranda tersinmezdir

Normal şokun Laval lüesindeki Schlieren görüntüsü. Lülede şok dalgasının hemen yukarıkımında (sola doğru) Mach sayısı 1.3 civarındadır. Sınır tabaka, çeper yakınında normal şokun şeklini bozar ve şokun tam altında akış ayrılmasına yol açar.



Normal şok dalgasından geçen akış için kontrol hacmi

Kütlenin korunumu

$$\rho_1 A V_1 = \rho_2 A V_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Enerjinin korunumu

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad h_{01} = h_{02}$$

Momentumun korunumu

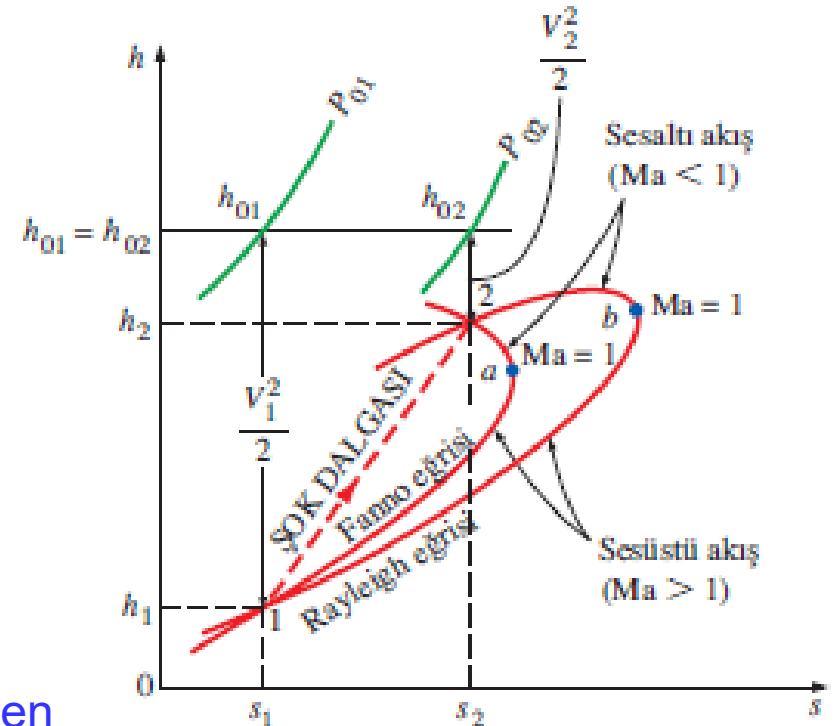
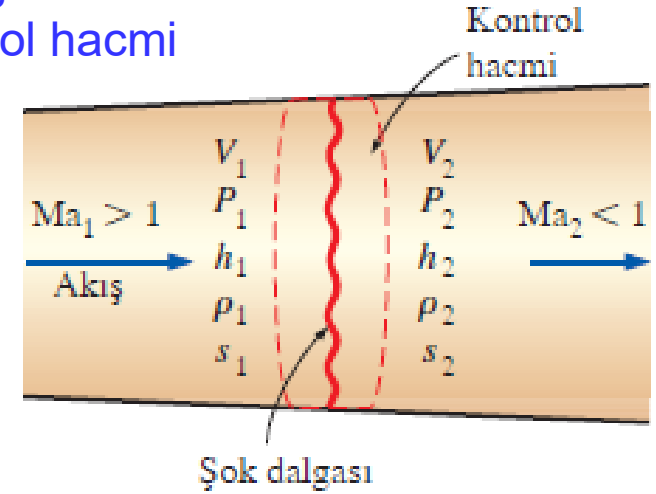
$$A(P_1 - P_2) = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$s_2 - s_1 \geq 0 \quad \text{Entropi artışı}$$

Fanno eğrisi: Kütlenin ve enerjinin korunumu bağıntıları tek denklem haline getirilebilir ve özellik bağıntıları kullanılarak h - s diyagramı üzerinde çizildiğinde ortaya çıkan eğridir. Bu eğri aynı durma entalpisi ve kütle akısına sahip hallerin geometrik yreidir.

Rayleigh eğrisi: Kütlenin ve momentumun korunumu bağıntılarını tek denklem haline getirip h - s diyagramı üzerinde çizildiğinde ortaya çıkan eğridir.

Normal şoktan geçen akışın h - s diyagramı



Sabit özgül ısılu bir ideal gaz için, şok öncesi ve sonrası değişik özellikler arasındaki bağıntılar.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{P_2 Ma_2 c_2}{P_1 Ma_1 c_1} = \frac{P_2 Ma_2 \sqrt{T_2}}{P_1 Ma_1 \sqrt{T_1}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \left(\frac{Ma_2}{Ma_1}\right)^2$$

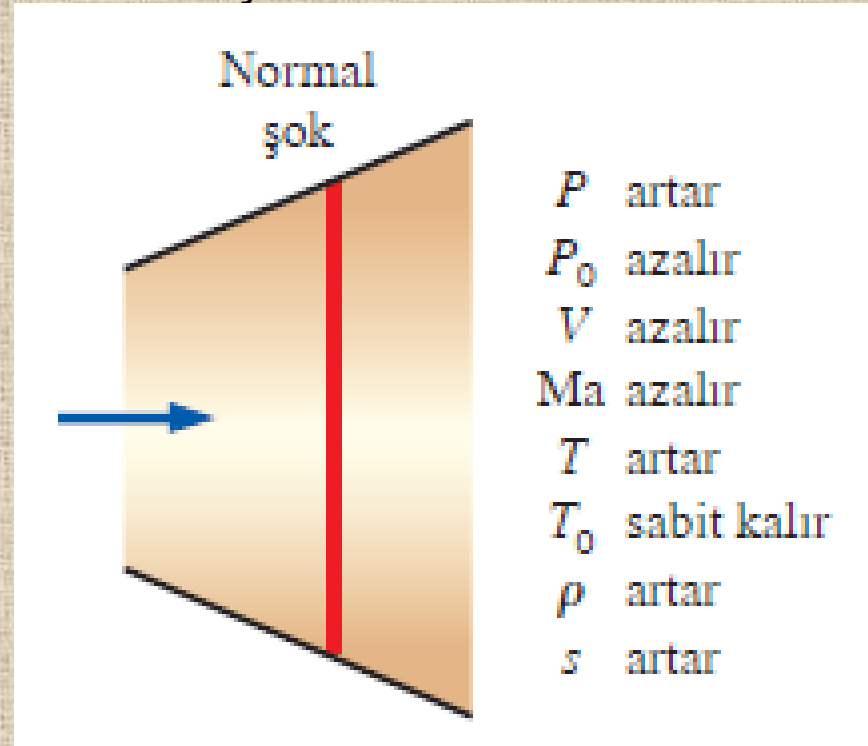
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{Ma_1 \sqrt{1 + Ma_1^2(k-1)/2}}{Ma_2 \sqrt{1 + Ma_2^2(k-1)/2}}$$

$$Ma_2^2 = \frac{Ma_1^2 + 2/(k-1)}{2Ma_1^2 k/(k-1) - 1}$$

Bu denklem Fanno ve Rayleigh eğrilerinin kesişmesini temsil eder.

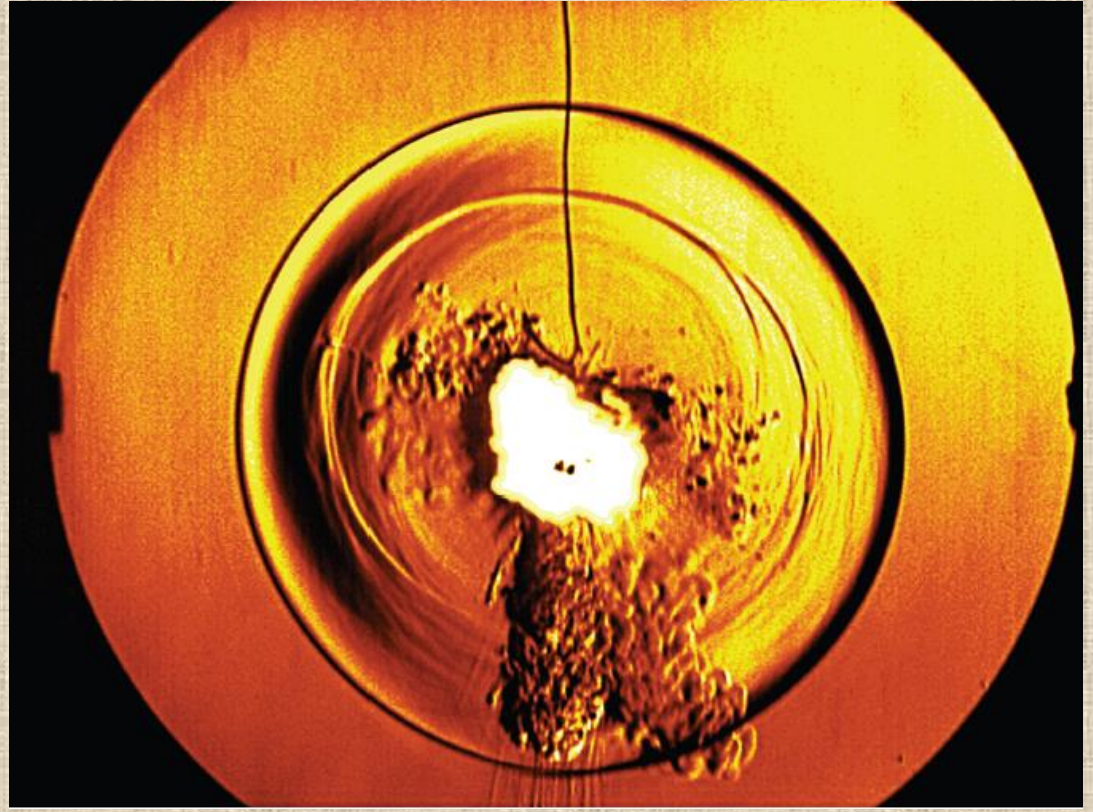
Normal şoktan geçişte akış özelliklerinin değişimi.

Tablo A-14'te bir ideal gaz için, $k=1.4$, şok önü ile arkasındaki akış özelliklerinin oranları verilmiştir.



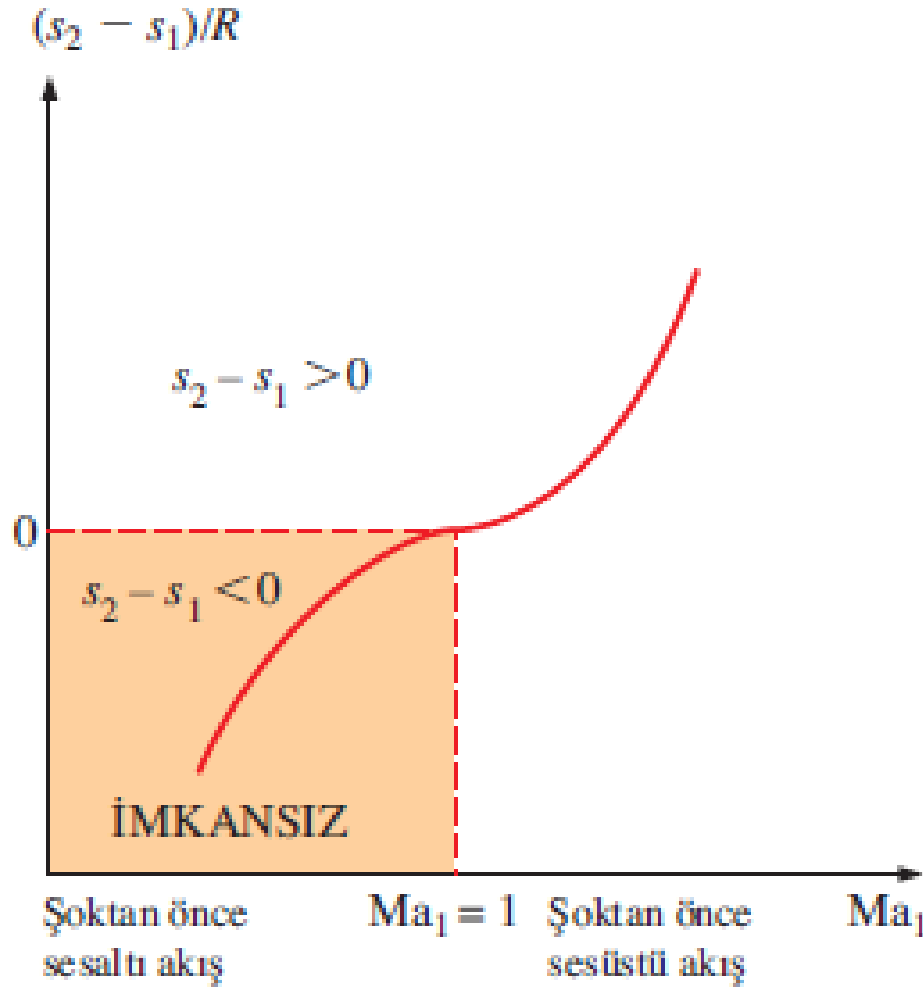


Bir sesüstü avcı jetinin hava girişi, girişte bir şok dalgası havanın hızını sesaltı hızına düşürerek havanın motora girmeden önce basıncını ve sıcaklığını arttıracak şekilde tasarlanmıştır.



Bir maytabın patlamasıyla oluşan patlama dalgasının (genişleyen küresel normal şok) Schlieren görüntüsü. Şok radyal olarak dışarı doğru her yönde patlamanın merkezinden itibaren yarıçap boyunca azalan sesüstü hızla genişlemiştir. Bir mikrofon, geçen şok dalgasının basıncındaki ani değişimi algılayarak mikrosaniyeler mertebesinde fotoğrafı çeken kameranın flaşını patlatmıştır.

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$



Normal şokun önü ile arkasındaki entropi değişimi.

Şoktan geçen akış adyabatik ve tersinmez olduğundan, ikinci yasaya göre şok dalgası enince entropinin artması gerekmektedir.

Dolayısıyla Ma_1 'in 1'den küçük olduğu değerlerde şok dalgası oluşamaz, aksi takdirde entropi değişimi negatif olurdu.

Adyabatik akış durumunda şok dalgaları sadece sesüstü akışlarda ($Ma > 1$) oluşabilir.

ÖRNEK 12–7 Fanno Eğrisindeki Maksimum Entropi Noktası

Bir kanaldaki akışkanın adyabatik daimi akışında Fanno eğrisindeki maksimum entropi noktasının (Şekil 12–25'teki a noktası) ses hızına yani, $Ma = 1$ 'e karşılık geldiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM Adyabatik daimi akışta Fanno eğrisindeki maksimum entropi noktasının ses hızına karşılık geldiği gösterilecektir.

Kabuller Akış daimi, adyabatik ve bir-boyutludur.

Analiz Isı, iş etkileşimleri ve potansiyel enerji değişimleri olmadığı daimi akışta enerji denklemi,

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{sabit}$$

halini alır. Bu denklemin türevi alınırsa,

$$dh + V dV = 0$$

elde edilir. Şokun önü ve arkasındaki kanal alanında değişimin ihmal edilebilir olduğu çok ince bir şok için daimi akışta süreklilik (kütlenin korunumu) denklemi,

$$\rho V = \text{sabit}$$

olarak ifade edilebilir. Her iki yanın türevi alınırsa,

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

elde edilir. Bu ifadeden dV çekilirse,

$$dV = -V \frac{d\rho}{\rho}$$

bulunur. Bu ifadeyi enerji denklemi ile birleştirirsek,

$$dh - V^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

elde ederiz. Bu denklem, Fanno eğrisi denkleminin diferansiyel biçimidir. a noktasında (maksimum entropi noktası) $ds = 0$ olur. İkinci $T ds$ bağıntısından ($T ds = dh - v dP$), $dh = v dP = dP/\rho$ yazılabilir. Bu, yukarıdaki ifadede yerine konursa,

$$\frac{dP}{\rho} - V^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad s = \text{sabit}$$

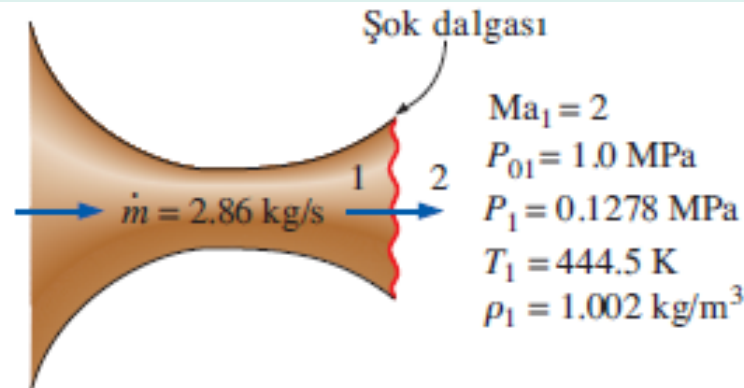
elde edilir. Bu ifadeden V 'yi çekersek, ses hızı bağıntısı (Denklem 12-9) olan

$$V = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s^{1/2}$$

sonucuna varırız. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ÖRNEK 12–8 Yakınsak-İraksak Bir Lüledeki Şok Dalgası

Örnek 12–6'daki yakınsak-ıraksak lülede hava akışı olmaktadır ve normal şok dalgası lülenin çıkış düzleminde görülmektedir (Şekil 12–30). Şoktan sonra şu değerleri hesaplayınız: (a) durma basıncı, statik basınç, statik sıcaklık ve statik yoğunluk; (b) şokun önü ile arkası arasındaki entropi değişimi; (c) çıkış hızı ve (d) lüledeki kütleli debi. Lüle girişinden şokun olduğu yere kadar akışın daimi, bir-boyutlu ve $k = 1.4$ olan izentropik akış olduğunu kabul ediniz.



Kabuller 1 Hava oda sıcaklığında sabit özgül ısı bir ideal gazdır. 2 Lüledeki akış, şok oluşmadan önce daimi, bir-boyutlu ve izentropiktir. 3 Şok dalgası, çıkış düzleminde oluşmaktadır.

Özellikler Havanın sabit basınçta özgül ısı ve özgül ısı oranı $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ve $k = 1.4$ 'tür. Havanın gaz sabiti $0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ 'dir.

Analiz (a) Şoktan hemen önce (alt indis 1 ile gösterilmiştir) lüle çıkışındaki akışkan özellikleri, Örnek 12–6'da lüle çıkışında aşağıdaki gibi hesaplanmıştı:

$$P_{01} = 1.0 \text{ MPa} \quad P_1 = 0.1278 \text{ MPa} \quad T_1 = 444.5 \text{ K} \quad \rho_1 = 1.002 \text{ kg/m}^3$$

Şoktan sonraki (alt indis 2 ile gösterilmiştir) ve şoktan önceki akışkan özellikleri Tablo A-14'te verilen fonksiyonlar uyarınca ilişkilidir. $Ma_1 = 2.0$ için değerler aşağıdaki gibi okunabilir:

$$Ma_2 = 0.5774 \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 0.7209 \quad \frac{P_2}{P_1} = 4.5000 \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.6875 \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2.6667$$

Bu değerlere göre, şok sonrası durma basıncı P_{02} , statik basınç P_2 , statik sıcaklık T_2 ve statik yoğunluk ρ_2 ,

$$P_{02} = 0.7209P_{01} = (0.7209)(1.0 \text{ MPa}) = \mathbf{0.721 \text{ MPa}}$$

$$P_2 = 4.5000P_1 = (4.5000)(0.1278 \text{ MPa}) = \mathbf{0.575 \text{ MPa}}$$

$$T_2 = 1.6875T_1 = (1.6875)(444.5 \text{ K}) = \mathbf{750 \text{ K}}$$

$$\rho_2 = 2.6667\rho_1 = (2.6667)(1.002 \text{ kg/m}^3) = \mathbf{2.67 \text{ kg/m}^3}$$

şeklinde hesaplanabilir.

(b) Şok önü ile arkası arasındaki entropi değişimi ise,

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \\ &= (1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln (1.6875) - (0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln (4.5000) \\ &= \mathbf{0.0942 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece normal şok devam ederken havanın entropisi artar ve bu durum büyük ölçüde tersinmezdir.

(c) Şok sonrası hava hızı $V_2 = Ma_2c_2$ 'den bulunabilir, burada c_2 şok sonrası çıkış şartlarındaki ses hızıdır:

$$\begin{aligned} V_2 &= Ma_2c_2 = Ma_2\sqrt{kRT_2} \\ &= (0.5774)\sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(750.1 \text{ K})\left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} \\ &= \mathbf{317 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

(d) Boğazında sonik şartlar olan yakınsak-ıraksak bir lüledeki kütleli debi, lüledeki şok dalgasının varlığından etkilenmez. Dolayısıyla bu durumdaki kütleli debi, Örnek 12–6'da hesaplanan değerle aynıdır:

$$\dot{m} = \mathbf{2.86 \text{ kg/s}}$$

İrdeleme Bu sonuç, 1'den önemli oranda büyük tüm Mach sayılarında lüle çıkışında şok sonrası özellik değerleri kullanılarak kolayca doğrulanabilir.

Örnek 12-8, şoktan geçişte statik basıncın, sıcaklığın, yoğunluğun ve entropinin arttığını, durma basıncının ve hızın ise azaldığını göstermektedir.

Bir şokun aşağıdaki sıcaklık artışı havacılık mühendisleri için çok önemli bir konudur. Çünkü bu durum kanatların hücum kenarlarında, atmosfere giriş yapan uzay araçlarının burun kısmında ve son zamanlarda üzerinde çalışmaların başladığı hipersonik uzay araçlarında ısı geçişi problemlerine yol açar.

Aşırı ısınma, uzay mekiği *Columbia*'nın 2003 Şubat'ında dünya atmosferine girişte trajik bir biçimde kaybedilmesine yol açmıştır.

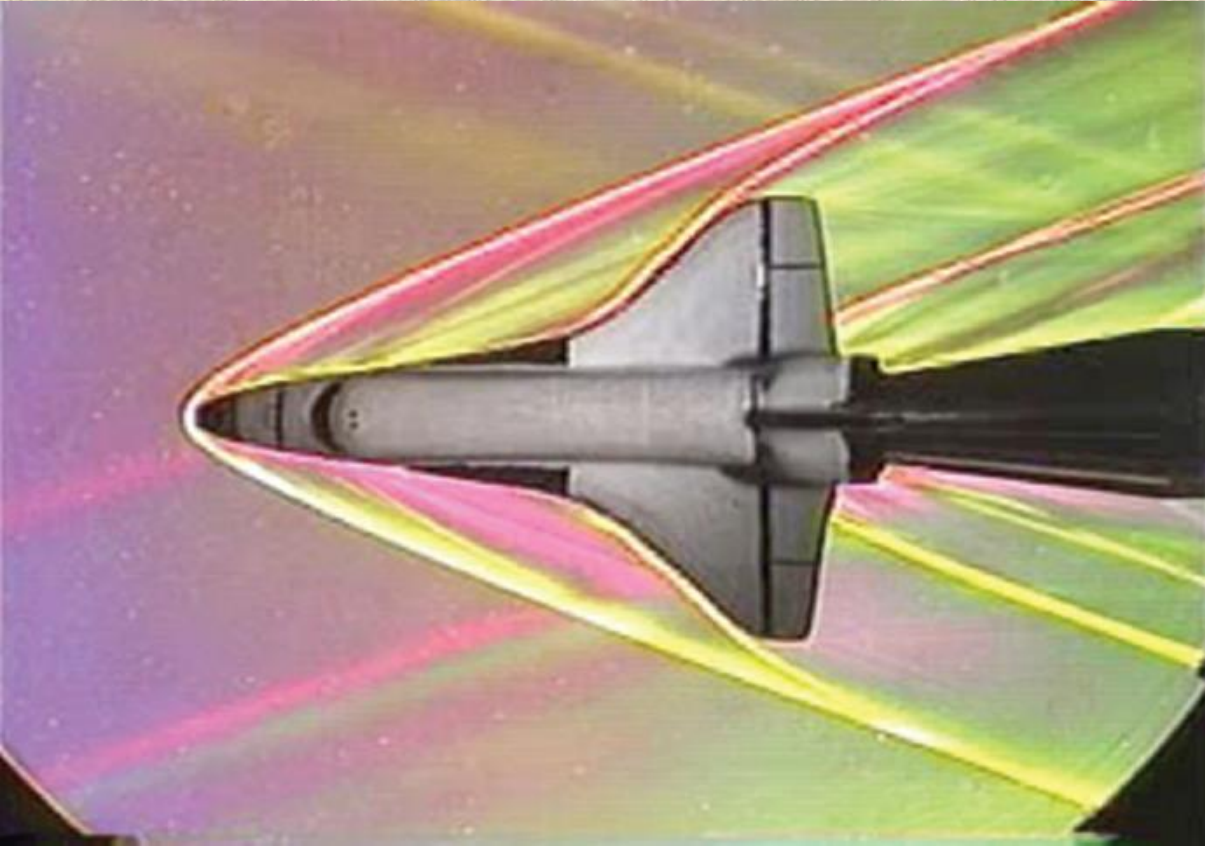
Bir aslan terbiyecisi kamçısını şaklattığında, kamçının ucunun yakınında zayıf bir küresel şok dalgası oluşarak dışa doğru yarıçap boyunca yayılır. Genişleyen şok dalgasının içindeki basınç ortam havasının basıncından yüksektir ve arslanın işittiği şaplama sesini oluşturan bu şok dalgasıdır.



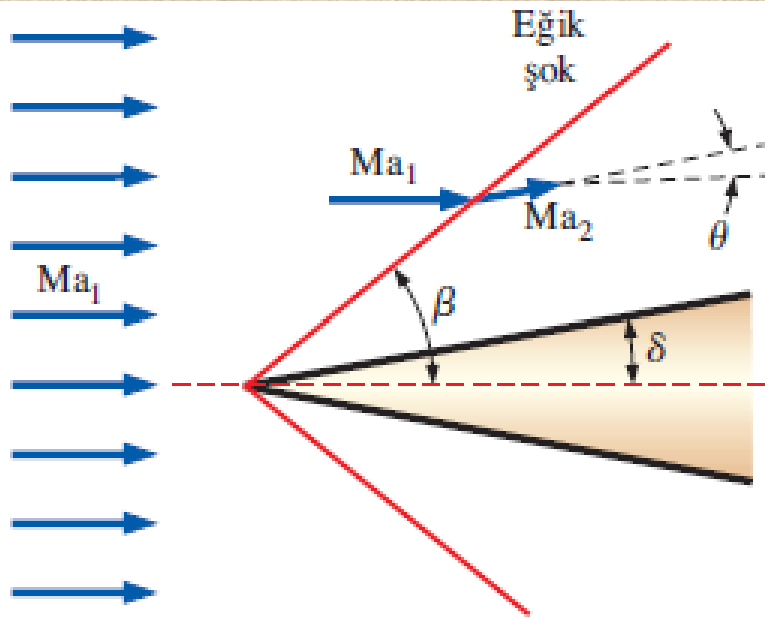
Eğik Şoklar

Uzay mekiği atmosferde sesüstü hızla hareket ederken **eğik Şok** denilen eğimli Şok dalgalarından oluşan karmaşık Şok desenleri oluşturur.

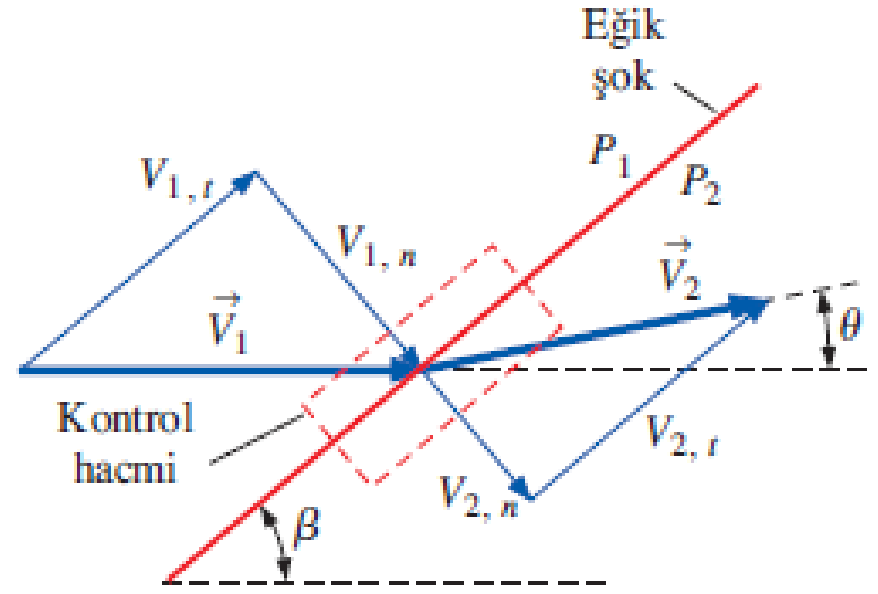
Eğik Şokun bir kısmı eğri, diğer kısımları düz olabilir.



Penn State Gaz Dinamiği Laboratuvarındaki sesüstü rüzgar tüneline 3 Mach'da denenmekte olan uzay mekiğinin küçük bir modelinin Schlieren görüntüsü. Uzay aracını çevreleyen havada birkaç eğik Şok görülmektedir.

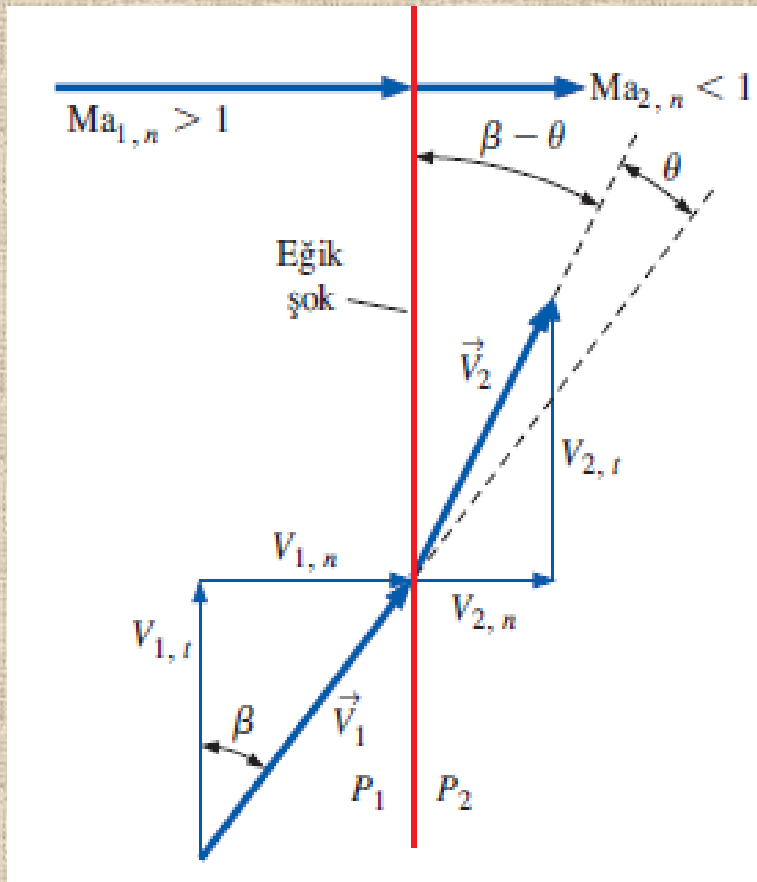


Yarım açısı δ olan iki-boyutlu ince bir kama ile oluşturulmuş **şok açısı** β olan eğik şok. Akış şokun aşağıyakımında **sapma açısı** θ kadar döner ve Mach sayısı düşer.



Şok açısı β ve sapma açısı θ olan eğik şoktaki hız vektörleri.

Bir eğik şokun aşağıyakım Mach sayısı Ma_2 daima sesaltı olan normal şokların aksine, yukarıyakım Mach sayısı Ma_1 ve dönme açısına bağlı olarak sesaltı, sonik veya sesüstü olabilir.



Şekil 12-34'deki hız vektörleri, eğik şoku dikey yapmak için $\pi/2 - \beta$, kadar döndürülmüştür. Normal yöndeki Mach sayıları olan $Ma_{1,n}$ ve $Ma_{2,n}$ de şekilde tanımlanmıştır.

$$h_{01} = h_{02} \rightarrow T_{01} = T_{02}$$

$$Ma_{2,n} = \sqrt{\frac{(k-1)Ma_{1,n}^2 + 2}{2kMa_{1,n}^2 - k + 1}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2kMa_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1,n}}{V_{2,n}} = \frac{(k+1)Ma_{1,n}^2}{2 + (k-1)Ma_{1,n}^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (k-1)Ma_{1,n}^2] \frac{2kMa_{1,n}^2 - k + 1}{(k+1)^2 Ma_{1,n}^2}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left[\frac{(k+1)Ma_{1,n}^2}{2 + (k-1)Ma_{1,n}^2} \right]^{k/(k-1)} \left[\frac{(k+1)}{2kMa_{1,n}^2 - k + 1} \right]^{1/(k-1)}$$

Yukarıdaki Mach sayısının normal bileşeni $Ma_{1,n}$ cinsinden bir ideal gazdaki eğik şoka ait bağıntılar.

Normal şoka ait bütün denklemler, şok tabloları vb., Mach sayısının **normal** bileşenlerini kullanmak şartıyla eğik şoka da uygulanabilir.

Şok açısı β ve yukarıdaki Mach sayısı Ma_1 bilindiğinde; $Ma_{1,n}$ 'i hesaplamak için Denklem 12-44'ün ilk kısmını, sonrasında ise $Ma_{2,n}$ 'yi elde etmek için normal şok tablolarını (veya ilgili denklemleri) kullanırız. Eğer sapma açısı θ 'yı da biliyorsak, Denklem 12-44'ün ikinci kısmından Ma_2 'yi hesaplayabiliriz. Ancak tipik bir uygulamada, şok açısı β ve sapma açısı θ 'dan sadece bir tanesi bilinir. Bununla beraber, biraz cebirsel işlemler yapılarak β , θ ve Ma_1 arasında bir bağıntı çıkarılabilir. Bu bağıntıyı çıkarmak için $\tan \beta = V_{1,n} / V_{1,t}$ ve $\tan(\beta - \theta) = V_{2,n} / V_{2,t}$ olduğunu hatırlayarak işe başlayalım (Şekil 12-35). $V_{1,t} = V_{2,t}$ olduğundan bu iki ifadeyi aşağıdaki gibi birleştirebiliriz:

$$\frac{V_{2,n}}{V_{1,n}} = \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (k - 1)Ma_{1,n}^2}{(k + 1)Ma_{1,n}^2} = \frac{2 + (k - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta}{(k + 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \quad (12-45)$$

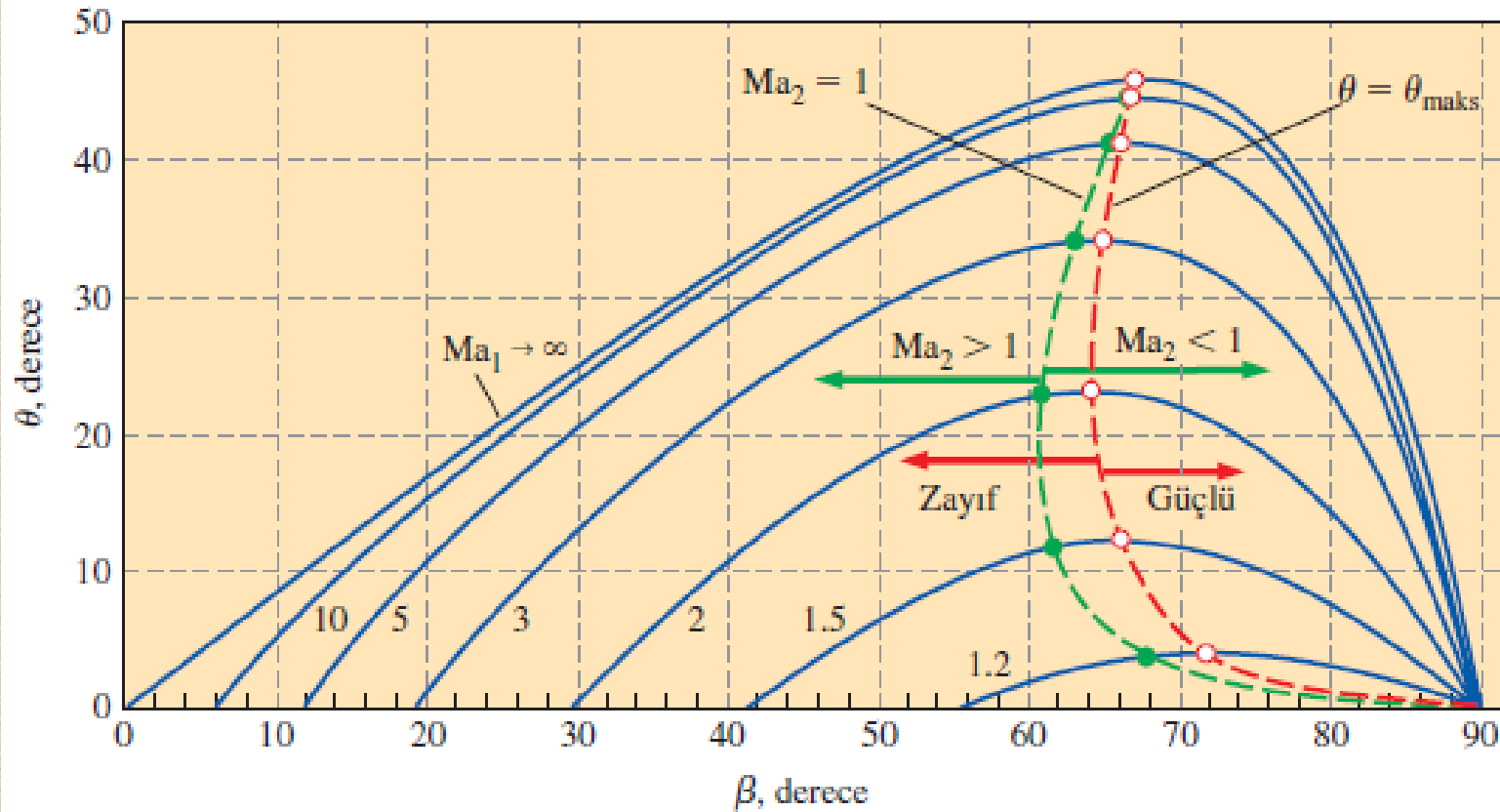
Burada ayrıca Denklem 12-44 ile Şekil 12-36'daki dördüncü denklemi de kullanmış olduk. $\cos 2\beta$ ve $\tan(\beta - \theta)$ için aşağıdaki trigonometrik özdeşlikler uygulandıktan

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad \text{ve} \quad \tan(\beta - \theta) = \frac{\tan \beta - \tan \theta}{1 + \tan \beta \tan \theta}$$

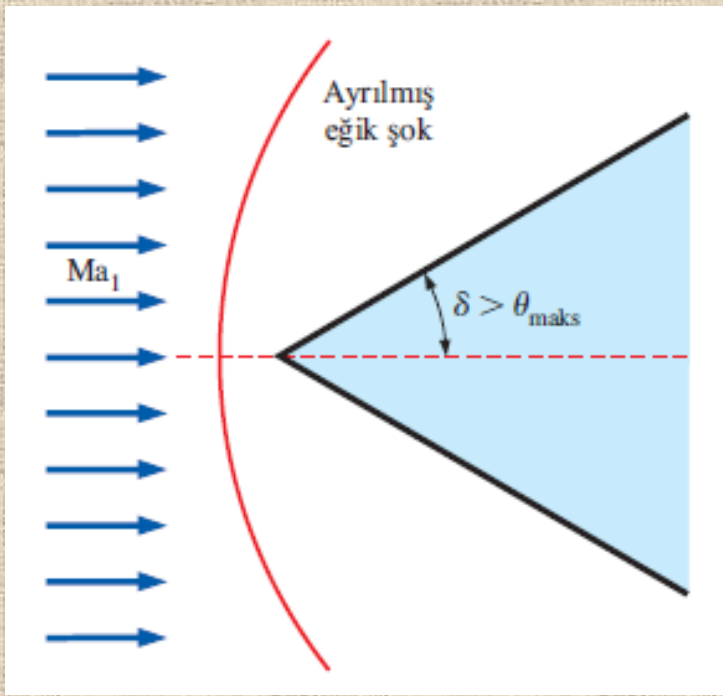
ve birkaç cebirsel işlemten sonra Denklem 12-45,

$$\theta\text{-}\beta\text{-}Ma \text{ arasındaki bağıntı:} \quad \tan \theta = \frac{2 \cot \beta (Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{Ma_1^2 (k + \cos 2\beta) + 2} \quad (12-46)$$

haline gelir.



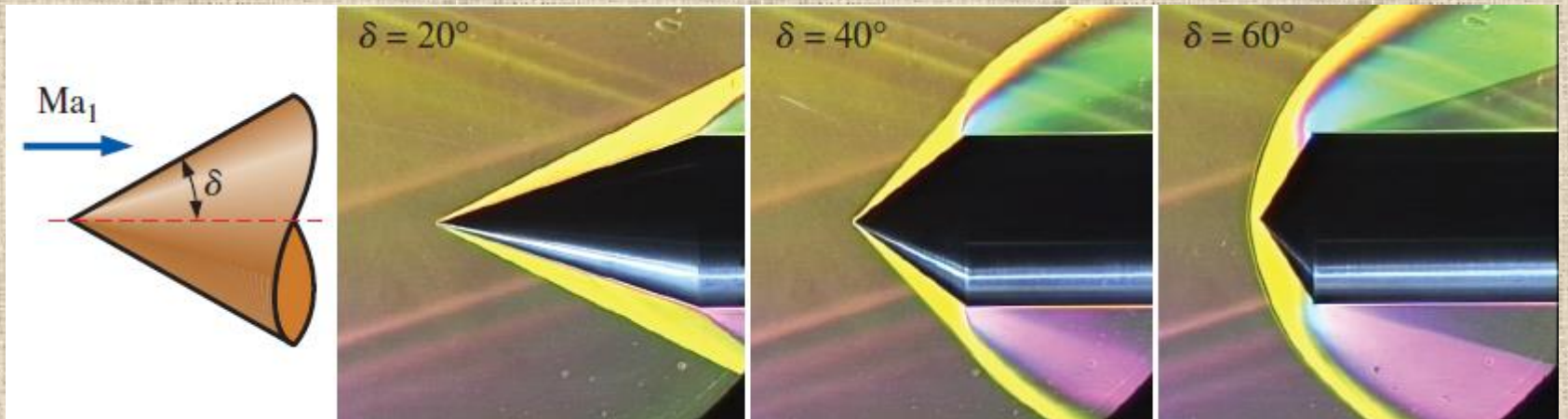
Düz eğik şokun sapma açısı θ 'nın, yukarıakım Mach sayısı Ma_1 'in birkaç değeri için şok açısı β 'ya bağımlılığı. Hesaplamalar $k = 1.4$ olan ideal gaz içindir. Kesikli kırmızı çizgi maksimum sapma açısı ($\theta = \theta_{maks}$) noktalarını birleştirmektedir. **Zayıf eğik şoklar** bu çizginin sol tarafında, **güçlü eğik şoklar** ise sağ tarafındadır. Kesikli yeşil çizgi ise aşağıakım Mach sayısının **sonik** ($Ma_2 = 1$) olduğu noktaları birleştirmektedir. **Sesüstü aşağıakım akışı** ($Ma_2 > 1$) bu çizginin sol tarafında, **sesaltı aşağıakım akışı** ($Ma_2 < 1$) ise sağ tarafındadır.

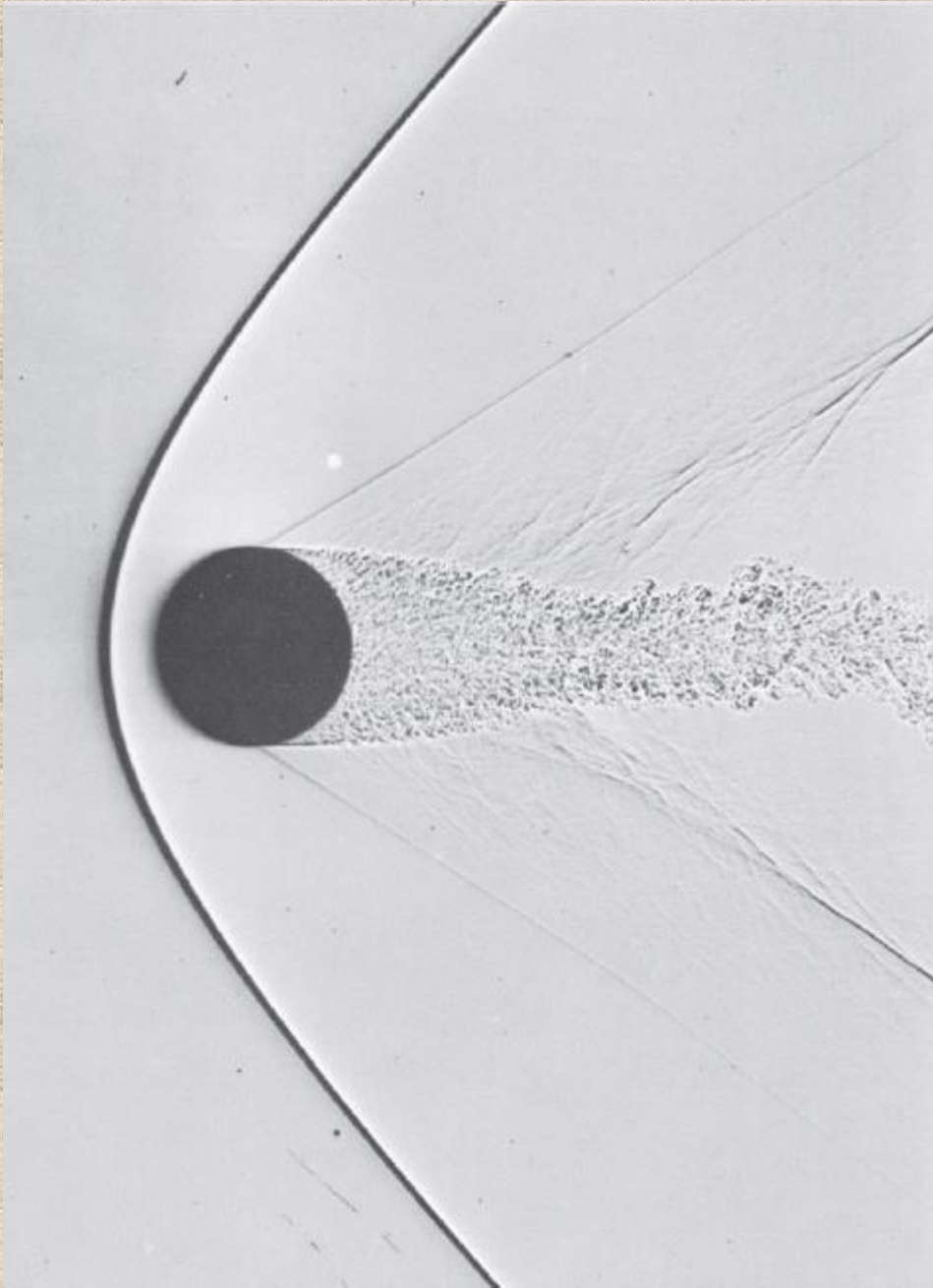


Yarım açısı olan iki-boyutlu kamanın yukarıdaki durumda δ açısı, muhtemel maksimum sapma açısı θ dan daha büyük olduğunda, *ayırmış eğik şok* meydana gelir. Gemilerin ön tarafında oluşan su dalgasına benzeyen bu tür bir şoka *yay dalgası* denir.

Havada Mach= 3'de, koni yarım açısı δ 'nın artmasıyla bir koniden eğik şok ayrılmasını gösteren resimler (sabit Schlieren videosundan alınan kareler) (a) $\delta = 20^\circ$ ve (b) $\delta = 40^\circ$ 'de eğik şok tutunmuş vaziyette kalır, ancak (c) $\delta = 60^\circ$ 'de eğik şok ayrılmış ve yay dalgası halini almıştır.

Mach açısı $\mu = \sin^{-1}(1/Ma_1)$





Havada $Ma=1.53$ ile serbest uçuş yapan 1.27 cm çaplı bir kürenin gölge grafiği. Kürenin önünde bulunan yay dalgasının arkasındaki akış sesaltıdır ve küre yüzeyi üzerinde arkaya doğru 45° civarında bir açı yapar. Yaklaşık 90° 'de, laminar sınır tabaka eğik şok dalgası ile ayrılır ve hızla türbülanslı hale gelir. Çalkantılı art izi, ikinci bir "tekrar sıkışan" şok dalgasıyla birleşen zayıf bir düzensizlikler sistemi oluşturur.

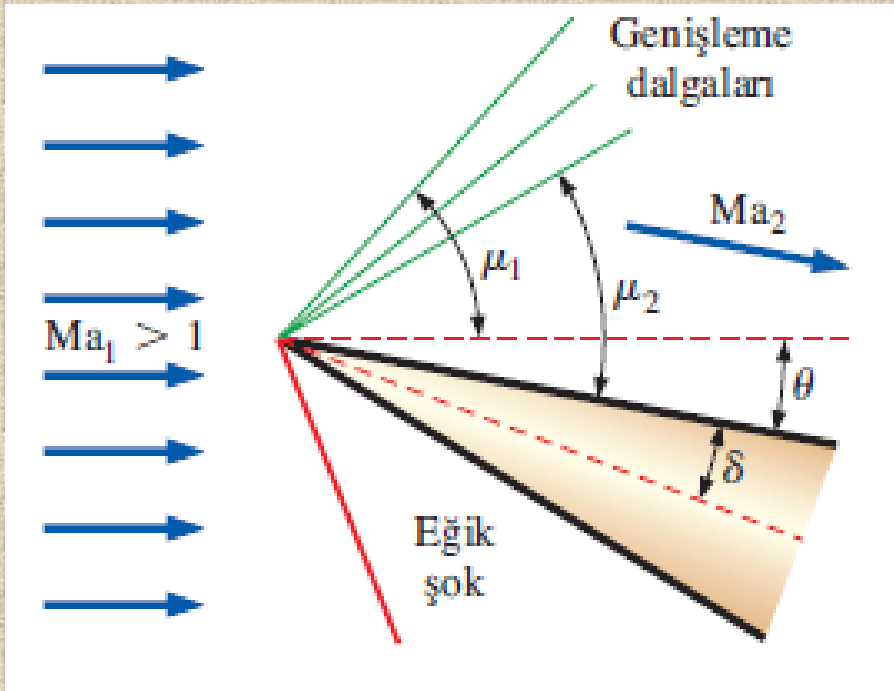
Prandtl–Meyer Genişleme Dalgaları

Şimdi de sesüstü akışın ters yönde döndüğü durumu ele alacağız. Bu durum, örneğin hücum açısı, yarım açısı δ 'dan büyük olan iki-boyutlu kama kenarının üst kısmında görülebilir.

Bu tür akış **genişleyen akış** olarak nitelendirilir. Bunun yanında eğik şok oluşturan akışa **sıkışan akış** denebilir.

Daha önce de olduğu gibi kütlenin korunması için akış yön değiştirir. Ancak sıkışan akışın aksine, genişleyen akış şok dalgası *oluşturmaz*.

Bunun yerine **Prandtl-Meyer dalgaları** adı verilen sonsuz sayıda Mach dalgasından oluşmuş ve sürekli genişleyen bir **genişleme yelpazesi** bölgesi görülür.

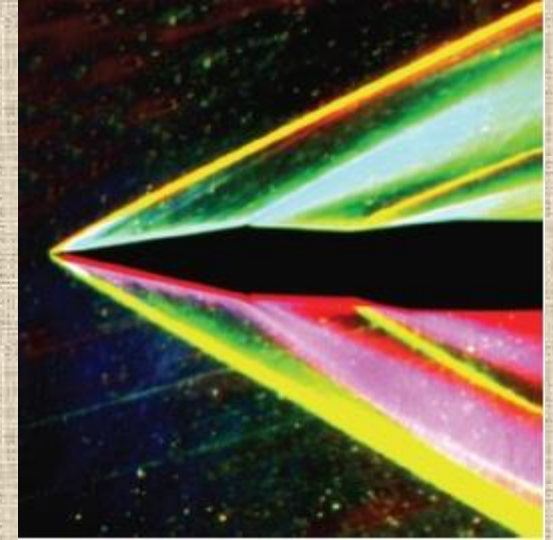
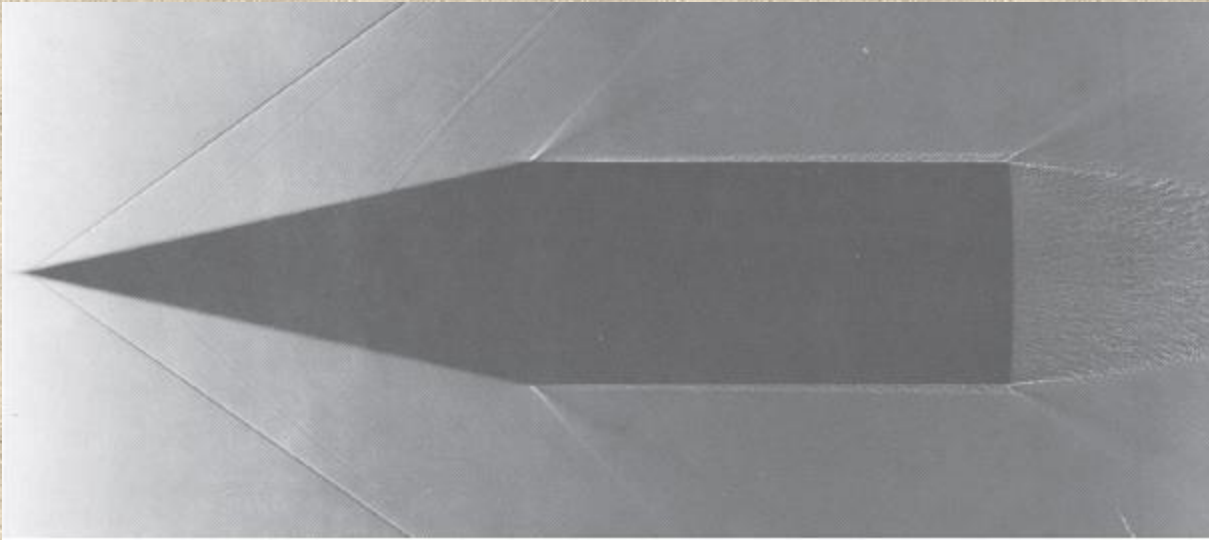


Bir sesüstü akışta, hücum açısındaki iki-boyutlu kama kenarı tarafından oluşturulan akışın üst kısmındaki genişleme yelpazesi. Akış θ kadar döner ve Mach sayısı genişleme yelpazesi boyunca artar. Genişleme yelpazesinin yukarıakım ve aşağıakımındaki Mach açıları gösterilmiştir. Basitlik bakımından sadece üç tane genişleme dalgası gösterilmiştir, ancak aslında bunlardan sonsuz sayıda vardır. (Bu akışın alt kısmında bir eğik şok bulunmaktadır.)

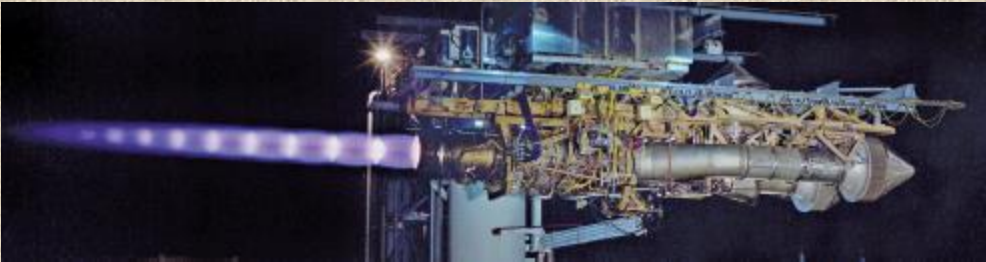
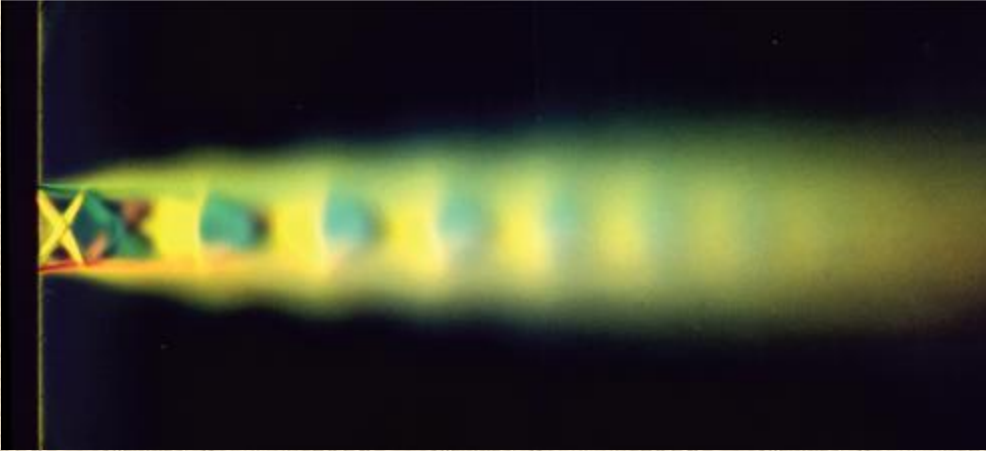
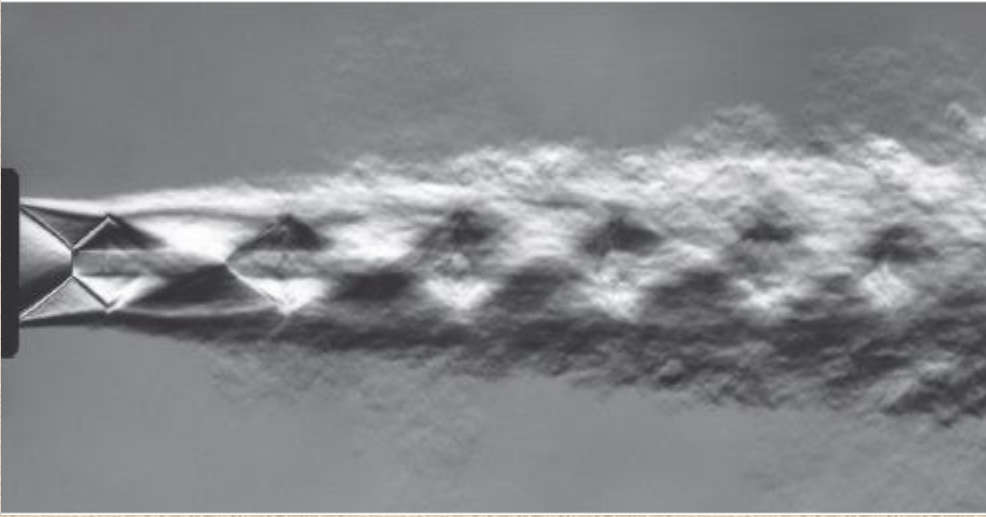
Genişleme yelpazesindeki dönüş açısı: $\theta = \nu(\text{Ma}_2) - \nu(\text{Ma}_1)$

Prandtl–Meyer fonksiyonu

$$\nu(\text{Ma}) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1} (\text{Ma}^2 - 1)} \right] - \tan^{-1} \left(\sqrt{\text{Ma}^2 - 1} \right)$$



(a) Mach sayısı 1.84 olan akış içerisinde bulunan ve yarım açısı 12.5° olan bir koni-silindir. Sınır tabaka burnun aşağıyakımının hemen başlarında türbülansa geçer ve bu bölge grafiğinde de görülebilen Mach dalgaları oluşturur. Genişleme dalgaları koninin köşelerinde ve firar kenarında görülmektedir. (b) 11° iki-boyutlu kama üzerinden Mach sayısı 3 olan akışa ait olan benzer desen.



“Aşırı genişlemiş” sesüstü jette şok dalgaları ile genişleme dalgaları arasındaki karmaşık etkileşim.

(a) Akış, Schlieren benzeri bir diferansiyel interferogram ile görüntülenmiştir.

(b) Renkli Schlieren görüntüsü.

(c) Kaplan kuyruğu şok deseni.

ÖRNEK 12-9 Mach sayısının Mach Çizgilerinden Hesaplanması

Şekil 12-32'de gösterilen uzay mekiğinin yukarıdaki serbest akışın Mach sayısını şekil üzerinden hesaplayınız. Elde ettiğiniz sonucu, şekil alt yazısında verilen değerle karşılaştırınız.

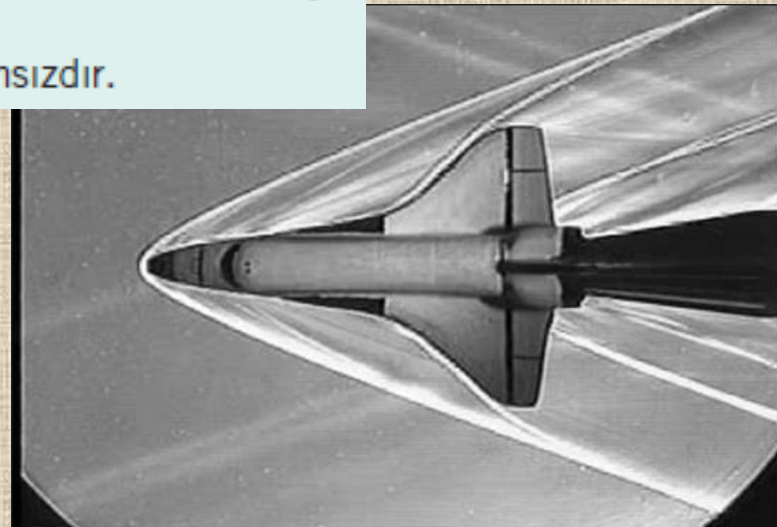
ÇÖZÜM Şekilden Mach sayısını hesaplayacağız ve bilinen değerle karşılaştıracacağız.

Analiz Serbest akışın Mach sayısını açıölçer ile ölçeriz: $\mu \cong 19^\circ$. Buna göre Denklem 12-47'den elde edilen Mach sayısı,

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Ma_1}\right) \rightarrow Ma_1 = \frac{1}{\sin 19^\circ} \rightarrow Ma_1 = 3.07$$

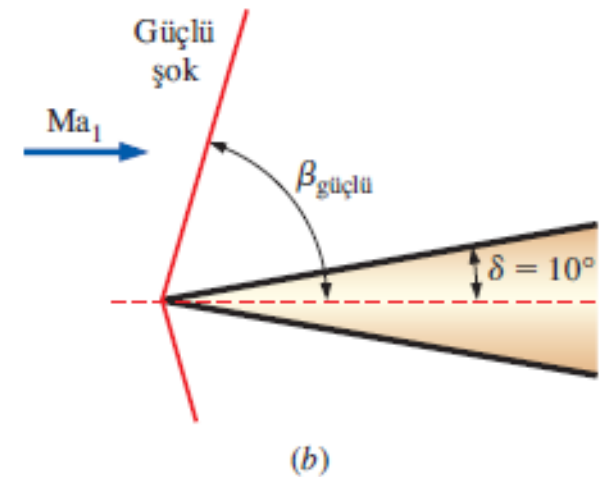
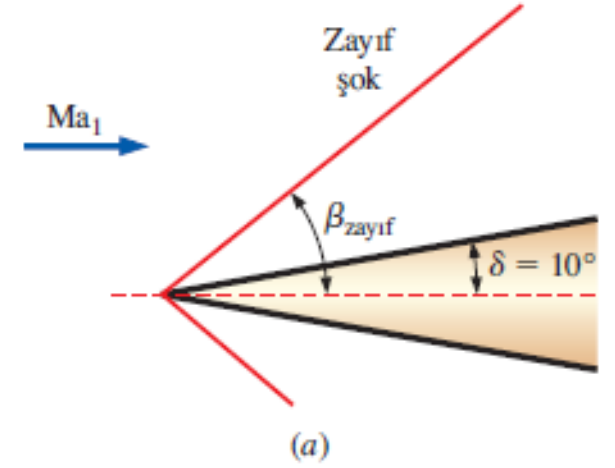
olur. Hesapladığımız bu Mach sayısı ile deneysel değer olan 3.0 ± 0.1 uyumaktadır.

İrdeleme Elde edilen sonuç akışkan özelliklerinden bağımsızdır.



ÖRNEK 12-10 Eğik Şok Hesaplamaları

$Ma_1 = 2.0$ ve 75.0 kPa'daki sesüstü hava, yarım açısı $\delta = 10^\circ$ olan iki-boyutlu kamaya çarpılmaktadır (Şekil 12-44). Bu kamanın oluşturabileceği muhtemel iki eğik şokun açısını ($\beta_{\text{zayıf}}$ ve $\beta_{\text{güçlü}}$) hesaplayınız. Eğik şokun aşağıdaki basınç ve Mach sayısını her bir durum için hesaplayınız, karşılaştırınız ve sonucu irdeleyiniz.



Yarım açısı $\delta = 10^\circ$ olan iki-boyutlu kamanın oluşturduğu muhtemel iki eğik şok açısı: (a) $\beta_{\text{zayıf}}$ ve (b) $\beta_{\text{güçlü}}$.

Analiz Kabul 2'den dolayı eğik şokun sapma açısını yaklaşık olarak kamanın yarım açısına eşit alırız, yani $\theta \cong \delta = 10^\circ$. $Ma_1 = 2.0$ ve $\theta = 10^\circ$ değerlerinde muhtemel iki eğik şok açısı β için Denklem 12-46'yı çözersek, $\beta_{zayıf} = 39.3^\circ$ ve $\beta_{güçlü} = 83.7^\circ$ elde ederiz. Bu değerleri kullanarak yukarıdaki Mach sayısı $Ma_{1,n}$ 'yi hesaplamak için Denklem 12-44'ün birinci kısmını kullanırız:

$$\text{Zayıf şok:} \quad Ma_{1,n} = Ma_1 \sin \beta \rightarrow Ma_{1,n} = 2.0 \sin 39.3^\circ = 1.267$$

ve

$$\text{Güçlü şok:} \quad Ma_{1,n} = Ma_1 \sin \beta \rightarrow Ma_{1,n} = 2.0 \sin 83.7^\circ = 1.988$$

Aşağıdaki normal Mach sayısı $Ma_{2,n}$ 'yi hesaplamak için $Ma_{1,n}$ 'nin bu değerlerini Şekil 12-36'daki ikinci denklemde yerine yazarsak, zayıf şok için $Ma_{2,n} = 0.8032$ ve güçlü şok için $Ma_{2,n} = 0.5794$ bulunur. Şekil 12-36'daki üçüncü denklemi kullanarak aşağıdaki basıncını da her iki durum için hesaplayabiliriz:

Böylece,

Zayıf şok:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k Ma_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \rightarrow P_2 = (75.0 \text{ kPa}) \frac{2(1.4)(1.267)^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} = 128 \text{ kPa}$$

ve

Güçlü şok:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k Ma_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \rightarrow P_2 = (75.0 \text{ kPa}) \frac{2(1.4)(1.988)^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} = 333 \text{ kPa}$$

sonuçları elde edilir. Son olarak, aşağıdaki Mach sayısını hesaplamak için Denklem 12–44'ün ikinci kısmını kullanarak,

$$\text{Zayıf şok:} \quad \text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,n}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.8032}{\sin(39.3^\circ - 10^\circ)} = \mathbf{1.64}$$

ve

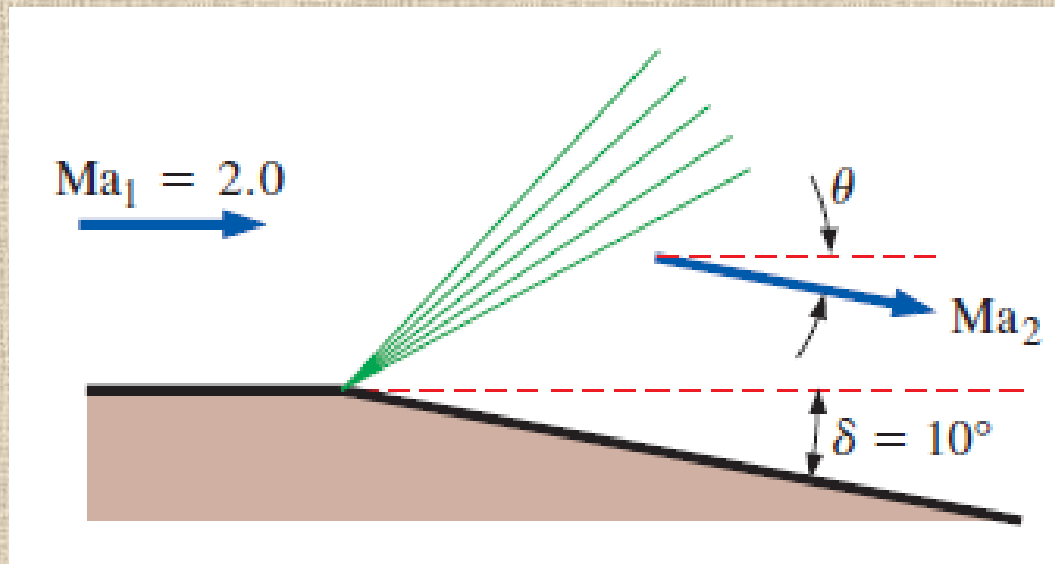
$$\text{Güçlü şok:} \quad \text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,n}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.5794}{\sin(83.7^\circ - 10^\circ)} = \mathbf{0.604}$$

bulunur. *Güçlü şokun önü ile arkası arasındaki Mach sayısı ve basınçtaki değişimler, beklenildiği gibi zayıf şoktaki değişimlerden çok daha büyüktür.*

İrdeleme Denklem 12–46, β için kapalı bir denklem olduğundan ya iterasyonla ya da EES gibi bir denklem çözücü ile çözülebilir. Hem zayıf hem de güçlü şok durumları için $\text{Ma}_{1,n}$ sesüstü, $\text{Ma}_{2,n}$ ise sesaltıdır. Bununla birlikte zayıf eğik şokta Ma_2 sesüstü, güçlü eğik şokta ise sesaltıdır. Denklemlerin yerine normal şok tabloları da kullanılabilirdi, ancak bu durumdaki kesinlik bir miktar azalırdı.

ÖRNEK 12-11 Prandtl-Meyer Genişleme Dalgası Hesaplamaları

$Ma_1 = 2.0$ ve 230 kPa'daki sesüstü hava, aniden $\delta = 10^\circ$ ile genişleyen düz bir duvara paralel olarak akmaktadır (Şekil 12-45). Duvardaki sınır tabakasının yol açtığı etkileri göz ardı ederek aşağıdaki Mach sayısı Ma_2 'yi ve basıncı P_2 'yi hesaplayınız.



Analiz Kabul 2'den dolayı toplam sapma açısını yaklaşık olarak duvarın genişleme açısına eşit alabiliriz, $\theta \cong \delta = 10^\circ$. $Ma_1 = 2.0$ olarak yukarıdaki Prandtl–Meyer fonksiyonu için Denklem 12–49'u çözelim:

$$\begin{aligned}\nu(Ma) &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(Ma^2 - 1)\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{Ma^2 - 1}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1.4+1}{1.4-1}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1.4-1}{1.4+1}}(2.0^2 - 1)\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2.0^2 - 1}\right) = 26.38^\circ\end{aligned}$$

Ardından aşağıdaki Prandtl–Meyer fonksiyonunu hesaplamak için Denklem 12–48'i kullanarak,

$$\theta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1) \rightarrow \nu(Ma_2) = \theta + \nu(Ma_1) = 10^\circ + 26.38^\circ = 36.38^\circ$$

elde ederiz. Ma_2 , Denklem 12–49 kullanılarak bulunur. Bu denklem kapalı bir denklemdir ve denklemin çözümü için bir denklem çözücüsü kullanmak kolaylık sağlar. Sonuç olarak $Ma_2 = 2.38$ elde edilir. Ayrıca internette sıkıştırılabilir akış hesap programları da bulunabilir ve bunlarla bu tür kapalı denklemlerin yanı sıra, normal ve eğik şok denklemleri de çözülebilir. (bkz. www.aoe.vt.edu/~devenpor/aoe3114/calc.html).

Biz aşağıdaki basıncını hesaplamak için izentropik bağıntıları kullanıyoruz:

$$P_2 = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} P_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)Ma_2^2\right]^{-k/(k-1)}}{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)Ma_1^2\right]^{-k/(k-1)}} (230 \text{ kPa}) = \mathbf{126 \text{ kPa}}$$

Bu bir genişleme olduğundan, beklendiği gibi Mach sayısı artar, basınç ise azalır.

İrdeleme Uygun izentropik bağıntıları kullanarak aşağıdaki sıcaklığı ve yoğunluğu gibi özellikler için de çözümler elde edilebilir.

12-5 ■ ISI GEÇİŞİNİN OLDUĞU VE SÜRTÜNMENİN İHMAL EDİLDİĞİ KANAL AKIŞI (RAYLEIGH AKIŞI)

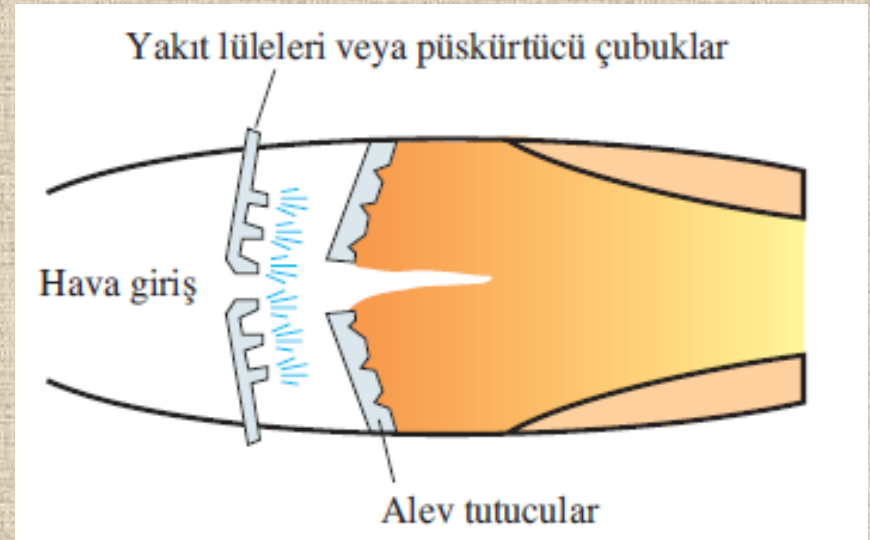
Buraya kadar çoğunlukla izentropik akışlarla ilgilendik. Bu tür akışlarda ısı geçişi ve sürtünme gibi tersinmezlikler yoktur.

Uygulamada karşılaşılan çoğu sıkıştırılabilir akış problemlerinde; yanma gibi kimyasal tepkimeler, nükleer tepkime, buharlaşma ve yoğunlaşmanın yanısıra, kanal çeperinden ısı kaybı veya kazanımı vardır.

Akış sırasında kimyasal bileşimde önemli değişiklikler ve gizli, kimyasal ve nükleer enerjilerin ısı enerjisiye dönüşümü meydana gelebileceğinden, bu tür problemleri tam olarak analiz etmek zordur.

Basitleştirilmiş bir model Rayleigh Akışıdır.

Rayleigh akışlarında: Sabit özgül ısı bir ideal gazın ısı geçişli bir-boyutlu daimi akışında kanalın en-kesit alanı sabit ve sürtünme edilmektedir.



Uygulamadaki çoğu sıkıştırılabilir akış problemleri, kanal çeperinden ısı kazanma olarak modellenebilen yanma olayını içerir.

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \text{Sürekli denkleme}$$

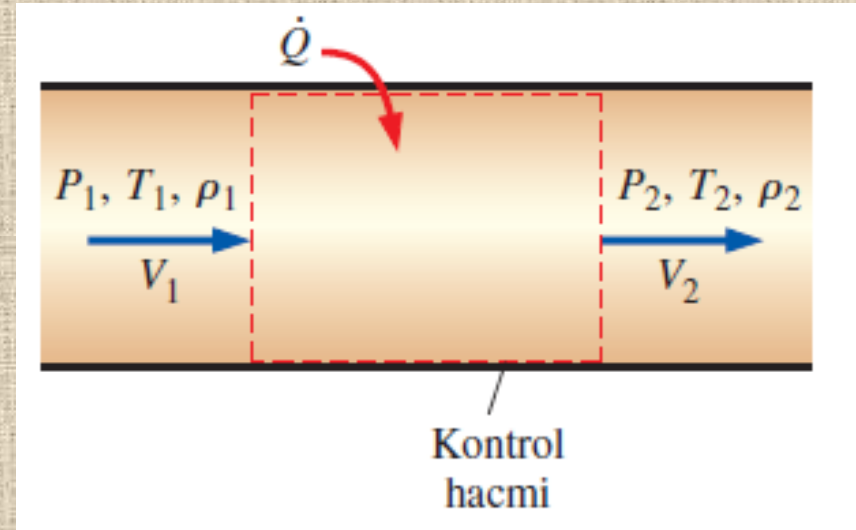
$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad \text{x-Momentum denkleme}$$

$$q = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \quad \text{Enerji denkleme}$$

$$q = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad \text{Entropi değişimi}$$

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \quad \text{Hal denkleme}$$

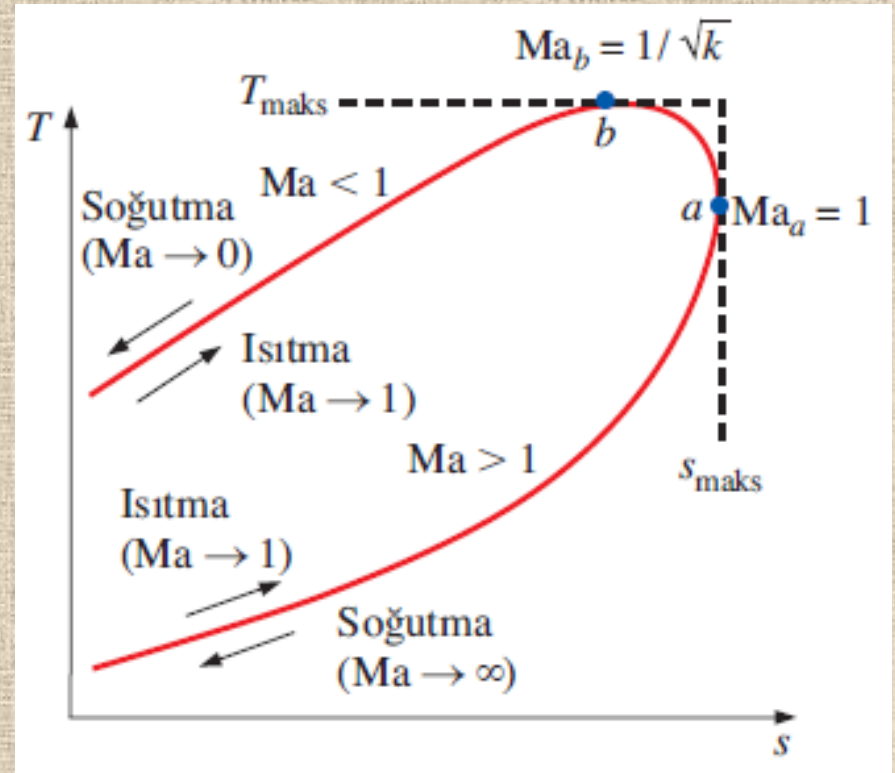


Sabit en-kesitli bir kanalda sirtunmenin ihmal edildiği ancak ısı geğişinin olduğu bir akışa ait kontrol hacmi.

R , k , ve c_p özellikleri bilinen bir gazı ele alalım. Verilen bir giriş hali 1 için giriş özellikleri olan P_1 , T_1 , ρ_1 , V_1 , ve s_1 bilinmektedir. Verilen bir q . Isı geğişi değeri için, 5 çıkış özelliği P_2 , T_2 , ρ_2 , V_2 , ve s_2 5 denklemden belirlenebilir.

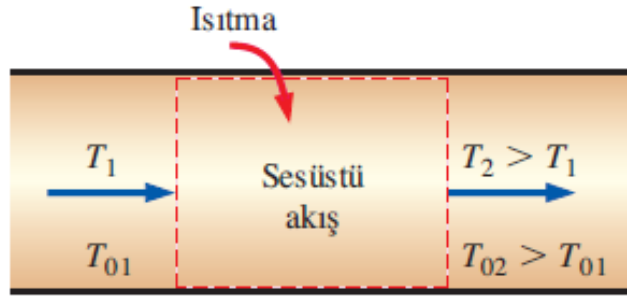
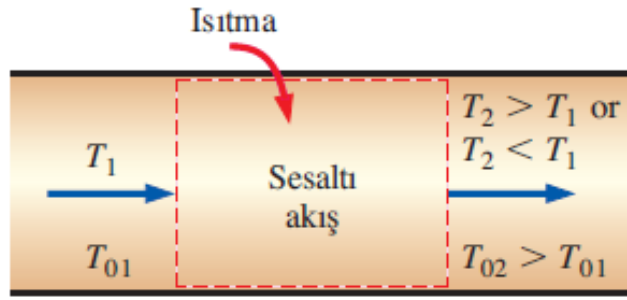
Rayleigh eğrisi ve denklemlerinden

1. Özellik bağıntılarının yanısıra, kütle, momentum ve enerjinin korunumu denklemlerini sağlayan bütün haller Rayleigh eğrisi üzerinde yer alır.
2. Isı kazanımı ile entropi artar ve dolayısıyla akışkana ısı geçtikçe Rayleigh eğrisi üzerinde sağa doğru ilerleriz.
3. Isıtma işlemleri sesaltı akışta Mach sayısını artırırken, sesüstü akışta azaltır.
4. Sesaltı ve sesüstü akışlarda enerji dengesine göre, ısıtmanın T_0 durma sıcaklığını arttıracığı, soğumanın ise azaltacağı ortadadır.
5. Hız ve basınç ters eğilimlere sahiptir.
6. Yoğunluk ve hız ters orantılıdır.



Isı geçişinin olduğu, sürtünmenin ihmal edildiği sabit en-kesit alanlı bir kanaldaki T-s diyagramı (Rayleigh akışı).

7. Sesüstü akışta verilen bir sıcaklık değişimine (ve dolayısı ile verilen ısı geçişine) karşılık gelen entropi değişiminin daha büyük



Rayleigh akışı sesüstü ise, ısıtma işlemiyle akışkan sıcaklığı daima yükselir, ancak akış sesaltı ise sıcaklık düşebilir.

Çoğu özelliklerde ısıtma ve soğutmanın etkileri terstir. Ayrıca, akışın sesaltı veya sesüstü olduğuna bakılmaksızın durma basıncı ısıtma ile azalır, soğutma ile artar.

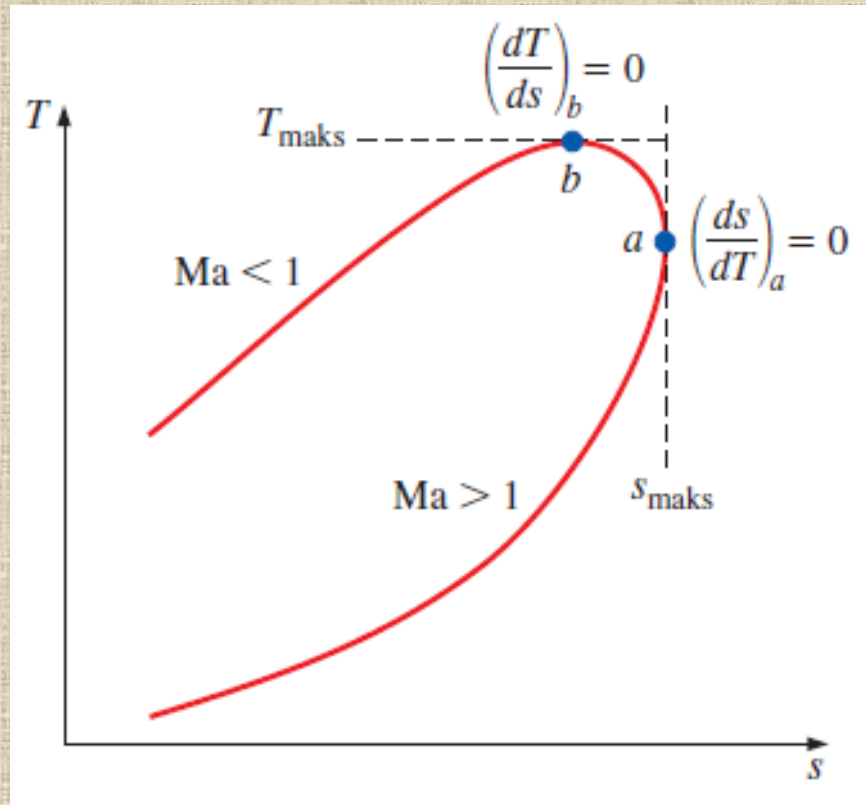
TABLO 12-3

Isıtma ve soğutmanın Rayleigh akışının özellikleri üzerindeki etkileri

Özellik	Isıtma		Soğutma	
	Sesaltı	Sesüstü	Sesaltı	Sesüstü
Hız, V	Artar	Azalır	Azalır	Artar
Mach sayısı, Ma	Artar	Azalır	Azalır	Artar
Durma sıcaklığı, T_0	Artar	Artar	Azalır	Azalır
Sıcaklık, T	Artar $Ma < 1/k^{1/2}$ için Azalır $Ma > 1/k^{1/2}$ için	Artar	Azalır $Ma < 1/k^{1/2}$ için Artar $Ma > 1/k^{1/2}$ için	Azalır
Yoğunluk, ρ	Azalır	Artar	Artar	Azalır
Durma basıncı, P_0	Azalır	Azalır	Artar	Azalır
Basınç, P	Azalır	Artar	Artar	Azalır
Entropi, s	Artar	Artar	Azalır	Azalır

ÖRNEK 12-12 Rayleigh Eğrisinin Maksimum-Minimum Noktaları

Şekil 12-50'de gösterilen Rayleigh akışının T - s diyagramını göz önüne alınız. Korunum denklemlerinin ve özellik bağıntılarının diferansiyel biçimlerini kullanarak, entropinin maksimum olduğu noktada (a noktası) Mach sayısının $Ma_a = 1$ ve sıcaklığın maksimum olduğu noktada (b noktası) Mach sayısının $Ma_b = 1\sqrt{k}$ olduğunu gösteriniz.



Analiz Süreklilik ($\rho V = \text{sabit}$), momentum [$P + (\rho V)V = \text{sabit}$, şeklinde tekrar düzenlenerek], ideal gaz ($P = \rho RT$) ve entalpi değişimi ($\Delta h = c_p \Delta T$) denklemlerinin diferansiyel biçimleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\rho V = \text{sabit} \rightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (1)$$

$$P + (\rho V)V = \text{sabit} \rightarrow dP + (\rho V) dV = 0 \rightarrow \frac{dP}{dV} = -\rho V \quad (2)$$

$$P = \rho RT \rightarrow dP = \rho R dT + RT d\rho \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (3)$$

Sabit özgül ısı bir ideal gazın entropi değişimi bağıntısının (Denklem 12-40) diferansiyel biçimi ise,

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (4)$$

olarak yazılabilir. Denklem 3'ün Denklem 4'te yerine yazılmasıyla,

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \right) = (c_p - R) \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{k-1} \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (5)$$

elde edilir. Burada,

$$c_p - R = c_v \rightarrow kc_v - R = c_v \rightarrow c_v = R/(k-1)$$

olduğuna dikkat ediniz. Denklem 5'in her tarafını dT ile bölüp Denklem 1 ile birleştirecek,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{V} \frac{dV}{dT} \quad (6)$$

sonucuna varılır. Denklem 3'ü dV ile bölüp, Denklem 1 ve Denklem 2 ile birleştirip tekrar düzenlersek,

$$\frac{dT}{dV} = \frac{T}{V} - \frac{V}{R} \quad (7)$$

elde ederiz. Denklem 7, Denklem 6'da yerine yazılırsa,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{T - V^2/R} = \frac{R(kRT - V^2)}{T(k-1)(RT - V^2)} \quad (8)$$

sonucu bulunur. $ds/dT = 0$ alır ve sonuçta çıkan $R(kRT - V^2) = 0$ denkleminde V 'yi çözersek, a noktasındaki hız ve Mach sayısı,

$$V_a = \sqrt{kRT_a} \quad \text{ve} \quad \text{Ma}_a = \frac{V_a}{c_a} = \frac{\sqrt{kRT_a}}{\sqrt{kRT_a}} = 1 \quad (9)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla a noktasında sonik şartlar mevcuttur ve bu yüzden Mach sayısı 1'dir.

$dT/ds = (ds/dT)^{-1} = 0$ alır ve ortaya çıkan $T(k-1) \times (RT - V^2) = 0$ denkleminde b noktasındaki hızı ve buna bağlı olarak Mach sayısını çözersek,

$$V_b = \sqrt{RT_b} \quad \text{ve} \quad \text{Ma}_b = \frac{V_b}{c_b} = \frac{\sqrt{RT_b}}{\sqrt{kRT_b}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (10)$$

elde ederiz. Dolayısıyla b noktasındaki Mach sayısı $\text{Ma}_b = 1/\sqrt{k}$ 'dir. Hava için $k=1.4$ olduğundan $\text{Ma}_b = 0.845$ elde edilir.

İrdeleme Rayleigh akışında entropi maksimum değerine doğru çıkarken, sonik şartlara ulaşıldığına ve maksimum sıcaklığın sesaltı akışta oluştuğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 12–13 Isı Geçişinin Akış Hızı Üzerindeki Etkisi

Enerji denkleminin diferansiyel biçiminden yola çıkarak, ısı ilavesi ile akış hızının sesaltı Rayleigh akışında artacağını, buna karşın sesüstü Rayleigh akışında ise azalacağını gösteriniz.

Analiz Akışkana olan diferansiyel ısı geçişini δq olarak düşünelim. Enerji denklemlerinin diferansiyel biçimi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\delta q = dh_0 = d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = c_p dT + V dV \quad (1)$$

Bu denklemi $c_p T$ ile bölüp dV/V ortak parantezine alırsak,

$$\frac{\delta q}{c_p T} = \frac{dT}{T} + \frac{V dV}{c_p T} = \frac{dV}{V} \left(\frac{V}{dV} \frac{dT}{T} + \frac{(k-1)V^2}{kRT} \right) \quad (2)$$

elde ederiz. Burada $c_p = kR/(k-1)$ bağıntısını da kullandık. $Ma^2 = V^2/c^2 = V^2/kRT$ olduğunu dikkate almak ve Örnek 12–12'de dT/dV için bulunan Denklem 7'yi kullanmak suretiyle,

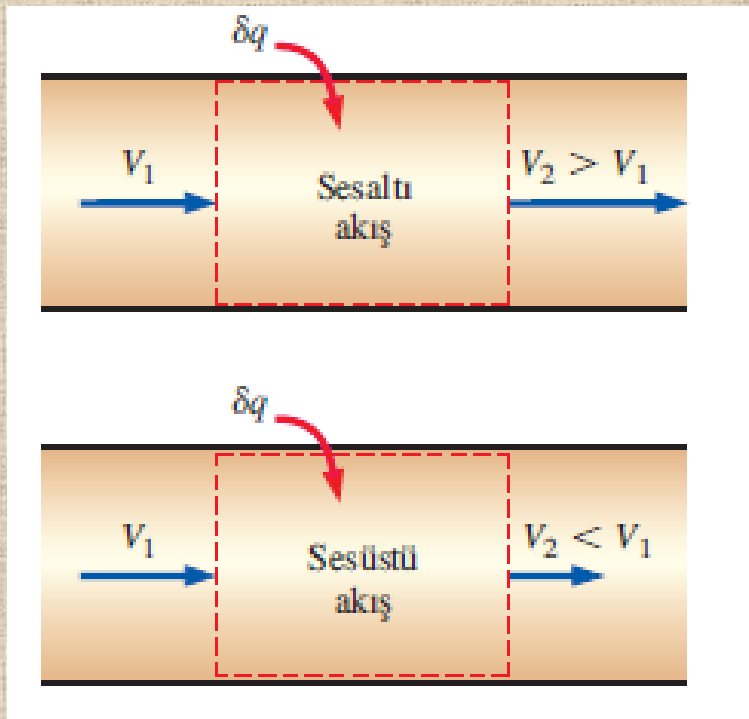
$$\frac{\delta q}{c_p T} = \frac{dV}{V} \left(\frac{V}{T} \left(\frac{T}{V} - \frac{V}{R} \right) + (k-1)Ma^2 \right) = \frac{dV}{V} \left(1 - \frac{V^2}{TR} + k Ma^2 - Ma^2 \right) \quad (3)$$

sonucu elde edilir. $V^2/TR = k Ma^2$ olduğundan, Denklem 3'ün sağ tarafında parantez içerisindeki iki terim (2. ve 3. terimler) sadeleşecektir. Buna göre istenen bağıntı,

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T (1 - Ma^2)} \quad (4)$$

olarak elde edilir. Sesaltı akışta $1 - Ma^2 > 0$ 'dır ve dolayısıyla ısı geçişi ve hız değişiminin işareti aynıdır. Sonuçta, akışkanı ısıtmak ($\delta q > 0$) akış hızını artırır, soğutmak ise azaltır. Bununla beraber sesüstü akışta $1 - Ma^2 < 0$ 'dır ve ısı geçişi ile hız değişimi ters işaretlere sahiptir. **Sonuçta, akışkanı ısıtmak ($\delta q > 0$) akış hızını azaltır, soğutmak ise artırır** (Şekil 12-51).

İrdeleme Sesaltı ve sesüstü Rayleigh akışında akışkanı ısıtmak, akış hızı üzerinde ters etki oluşturur.



Sesaltı akışta akışkanın ısıtılması akış hızını artırır, sesüstü akışta ise azaltır.

Rayleigh Akışı için özellik bağıntıları

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + kMa_1^2}{1 + kMa_2^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{Ma_2(1 + kMa_1^2)}{Ma_1(1 + kMa_2^2)} \right]^2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{Ma_1^2(1 + kMa_2^2)}{Ma_2^2(1 + kMa_1^2)}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k}{1 + kMa^2}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[\frac{Ma(1 + k)}{1 + kMa^2} \right]^2$$

$$\text{and } \frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1 + k)Ma^2}{1 + kMa^2}$$

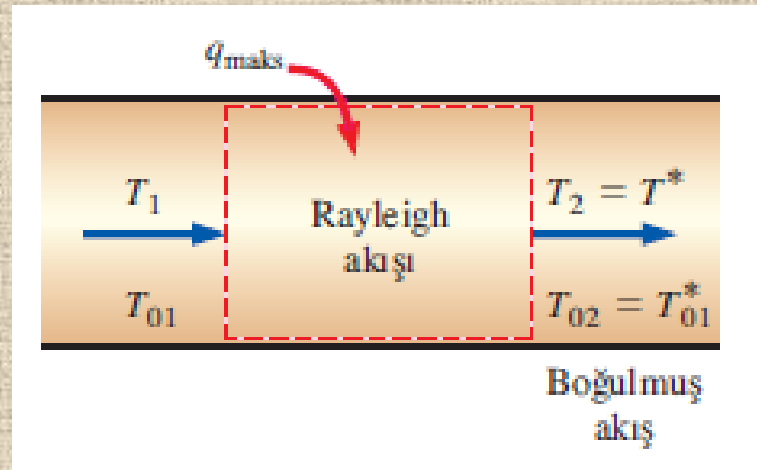
$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k + 1)Ma^2[2 + (k - 1)Ma^2]}{(1 + kMa^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k + 1}{1 + kMa^2} \left[\frac{2 + (k - 1)Ma^2}{k + 1} \right]^{k/(k-1)}$$

Bazı örnek sonuçlar Tablo A-15'de verilmiştir.

Boğulmuş Rayleigh Akışı

Ma =1 kritik halindeki akışkan ısıtma yoluyla sesüstü hızlara çıkarılamaz. Dolayısıyla akış **boğulmuştur**. Daimi akışta mümkün olabilecek maksimum ısı geçişi, verilen bir giriş haline karşılık gelen kritik hal ile sınırlıdır.



$$q_{\max} = h_0^* - h_{01} = c_p(T_0^* - T_{01})$$

Verilen bir giriş hali için mümkün olabilecek maksimum ısı geçişi, çıkış halinde sonik şartlara ulaştığında oluşur.

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)Ma^2[2 + (k-1)Ma^2]}{(1+kMa^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+kMa^2} \left(\frac{2 + (k-1)Ma^2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{Ma(1+k)}{1+kMa^2} \right)^2$$

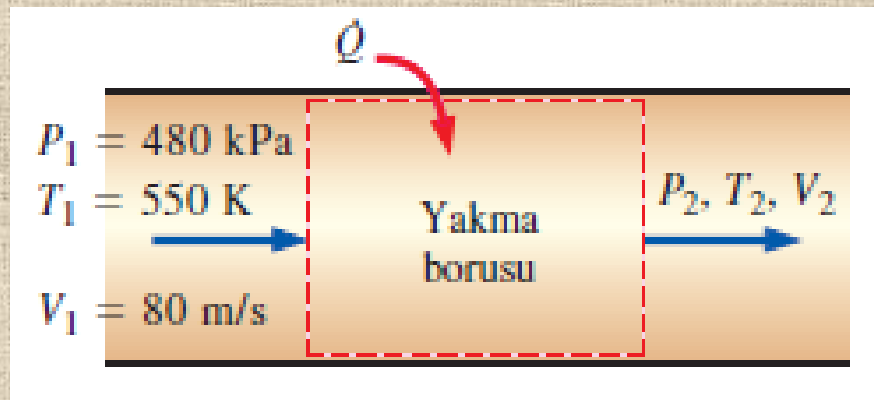
$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+kMa^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+k)Ma^2}{1+kMa^2}$$

Rayleigh akışındaki bağıntıların özeti.

ÖRNEK 12-14 Boru Tipi Bir Yanma Odasında Rayleigh Akışı

Bir yanma odası, 15 cm çapında yakma borularından oluşmaktadır. Sıkışmış hava borulara 550 K, 480 kPa ve 80 m/s'de girmektedir. (Şekil 12-54). Isıl değeri (ID) 42000 kJ/kg olan bir yakıt hava içerisine, kütleli hava-yakıt oranı (HY) 40 olacak şekilde enjekte edilmekte ve yakılmaktadır. Yanma olayını havaya bir ısı geçişi gibi düşünerek, yanma odasının çıkışındaki sıcaklık, basınç, hız ve Mach sayısı değerlerini bulunuz.



Özellikler Havanın özellikleri $k = 1.4$, $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$, ve $R = 0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ olarak alınabilir.

Analiz Havanın giriş yoğunluğu ve kütleli debisi,

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{480 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(550 \text{ K})} = 3.041 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{\text{hava}} = \rho_1 A_1 V_1 = (3.041 \text{ kg/m}^3) [\pi(0.15 \text{ m})^2/4](80 \text{ m/s}) = 4.299 \text{ kg/s}$$

olarak hesaplanır. Yakıtın kütleli debisi ve ısı geçişi miktarı ise,

$$\dot{m}_{\text{yakıt}} = \frac{\dot{m}_{\text{hava}}}{AF} = \frac{4.299 \text{ kg/s}}{40} = 0.1075 \text{ kg/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{yakıt}} HV = (0.1075 \text{ kg/s})(42,000 \text{ kJ/kg}) = 4514 \text{ kW}$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{\text{hava}}} = \frac{4514 \text{ kJ/s}}{4.299 \text{ kg/s}} = 1050 \text{ kJ/kg}$$

olarak elde edilir. Bu durumda girişteki durma sıcaklığı ve Mach sayısı,

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 550 \text{ K} + \frac{(80 \text{ m/s})^2}{2(1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})} \left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) = 553.2 \text{ K}$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(550 \text{ K})} \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right) = 470.1 \text{ m/s}$$

$$Ma_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{80 \text{ m/s}}{470.1 \text{ m/s}} = 0.1702$$

olacaktır. Enerji denklemi, $q = c_p(T_{02} - T_{01})$ 'den çıkıştaki durma sıcaklığı,

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 553.2 \text{ K} + \frac{1050 \text{ kJ/kg}}{1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}} = 1598 \text{ K}$$

olarak hesaplanır. Durma sıcaklığının maksimum değeri T_0^* , $Ma = 1$ 'de ortaya çıkar ve değeri Tablo A-15 veya Denklem 12-65'ten bulunabilir. $Ma_1=0.1702$ için $T_0/T_0^* = 0.1291$ olarak okunur. Buna göre,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.1291} = \frac{553.2 \text{ K}}{0.1291} = 4284 \text{ K}$$

olur. Çıkış halindeki durma sıcaklığı oranı ve buna karşılık gelen Mach sayısı Tablo A- 15'ten,

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1598 \text{ K}}{4284 \text{ K}} = 0.3730 \rightarrow Ma_2 = 0.3142 > \mathbf{0.314}$$

olarak elde edilir. Giriş ve çıkış Mach sayılarına karşılık gelen Rayleigh akış fonksiyonları ise şöyledir (Tablo A- 15):

$$Ma_1 = 0.1702: \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.1541 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2.3065 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0.0668$$

$$Ma_2 = 0.3142: \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.4389 \quad \frac{P_2}{P^*} = 2.1086 \quad \frac{V_2}{V^*} = 0.2082$$

Buna göre çıkıştaki sıcaklık, basınç ve hız,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.4389}{0.1541} = 2.848 \rightarrow T_2 = 2.848T_1 = 2.848(550 \text{ K}) = \mathbf{1570 \text{ K}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P^*}{P_1/P^*} = \frac{2.1086}{2.3065} = 0.9142 \rightarrow P_2 = 0.9142P_1 = 0.9142(480 \text{ kPa}) = \mathbf{439 \text{ kPa}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{0.2082}{0.0668} = 3.117 \rightarrow V_2 = 3.117V_1 = 3.117(80 \text{ m/s}) = \mathbf{249 \text{ m/s}}$$

olarak elde edilir.

12–6 ■ SÜRTÜNME Lİ ADYABATİK KANAL AKIŞI (FANNO AKIŞI)

Büyük lülelerde olduğu gibi, en-kesit alanı büyük ancak boyları kısa sistem-lerde yüksek hızlı akışlarla ilgili çeper sürtünmesi çoğunlukla ihmal edilebi- düzeyde kalır ve bu tür sistemlerdeki akışlar sürtünmesiz olarak ele alınabilir.

Ancak uzun kanallar gibi akış bölümlerindeki akışlar incelenirken, özellikle en-kesit alanı küçük olduğunda, çeper sürtünmesi önemlidir ve hesaba katılmalıdır.

Bu kısımda en-kesit alanı sabit olan bir kanalda, çeper sürtünmesinin önemli olduğu ancak ısı geçişinin ihmal edildiği sıkıştırılabilir akışı ele alacağız.

Sabit özgül ısı bir ideal gazın en-kesit alanlı bir kanaldaki daimi, bir-boyutlu, adyabatik ancak sürtünme etkilerinin önemli olduğu akışını ele alalım. Bu tür akışlar **Fanno akışları** olarak adlandırılır.

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \rightarrow \rho V = \text{sabit}$$

Süreklilik denklemi

$$P_1 A - P_2 A - F_{\text{sürtünme}} = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \rightarrow P_1 - P_2 - \frac{F_{\text{sürtünme}}}{A}$$

$$= (\rho_2 V_2) V_2 - (\rho_1 V_1) V_1$$

x-Momentum denklemi

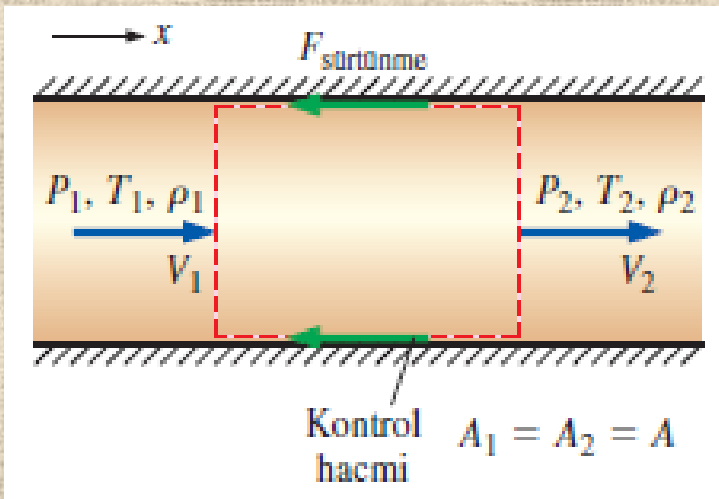
$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 + \frac{F_{\text{sürtünme}}}{A}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} > 0$$

Entropi değişimi

$$T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \rightarrow T_{01} = T_{02} \rightarrow T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = \text{sabit}$$

Enerji denklemi



$$\Delta h = c_p \Delta T$$

$$T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \rightarrow T_{01} = T_{02}$$

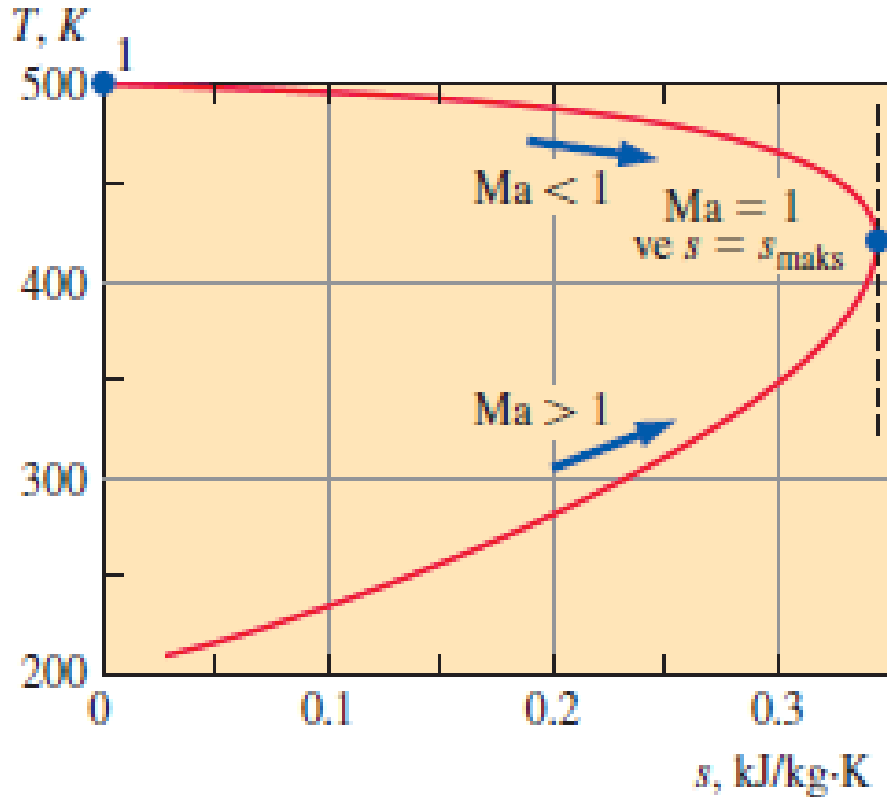
$$\rightarrow T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = \text{sabit}$$

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

Hal denklemi

Sabit en-kesit alanlı kanalda sürtülmeli adyabatik akış ait kontrol hacmi.

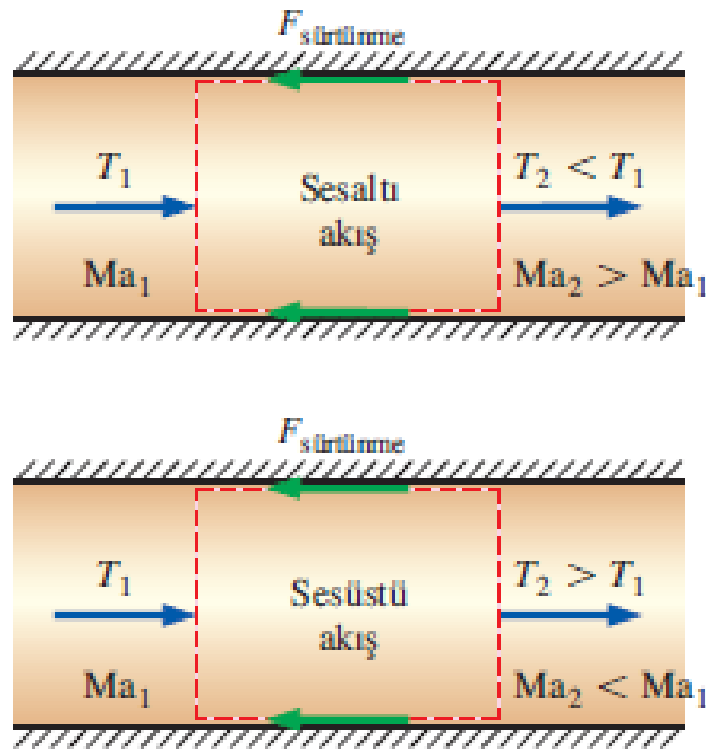
En-kesit alanı A olan sabit bir kanal içerisinde akan ve R , k ve c_p özellikleri bilinen bir gazı dikkate alalım. Verilen bir 1 giriş hali için giriş özellikleri P_1 , T_1 , ρ_1 , V_1 , ve s_1 bilinmektedir. Öngörülen bir sürtünme kuvveti $F_{\text{sürtünme}}$ değeri için çıkıştaki beş özellik P_2 , T_2 , ρ_2 , V_2 ve s_2 yukarıdaki beş denklemden bulunabilir.



Sabit en-kesit alanına sahip bir kanalda sürtünmeli akışın T - s diyagramı (Fanno akışı) Gösterilen sayısal değerler $k = 1.4$ olan hava ve $T_1 = 500$ K, $P_1 = 600$ kPa, $V_1 = 80$ m/s giriş şartları için olup $s_1 = 0$ alınmıştır.

Fanno eğrisi ve denklemlerinden

1. Özellik bağıntılarının yanısıra, kütle, momentum ve enerji denklemlerini sağlayan
2. Sürtünme, entropinin artmasına neden olur ve böylelikle bir proses Fanno eğrisi üzerinde hep sağa doğru ilerler. Entropinin maksimum olduğu noktada $Ma=1$ 'dir. Fanno eğrisinin üst kısmındaki bütün haller sesaltı, alt kısmındaki bütün haller ise sesüstüdür.
3. Sesaltı Fanno akışında sürtünme Mach sayısını artırır, sesüstü Fanno akışında ise azaltır.
4. Enerji dengesi, durma sıcaklığının Fanno akışında sabit kalmasını gerektirir. Ancak gerçek sıcaklık değişebilir. Hız artar ve böylece sesaltı akışta sıcaklık azalır, ancak sesüstü akışta bunun tersi gerçekleşir.
5. Süreklilik denklemi, yoğunluk ve hızın birbirleri ile ters orantılı olduğunu göstermektedir. Buna göre, sesaltı akışta sürtünmenin etkisi yoğunluğu düşürme şeklindedir (çünkü hız ve Mach sayısı artar). Buna karşın sesüstü akışta ise yoğunluğu artırma şeklindedir (çünkü hız ve Mach sayısı azalır).



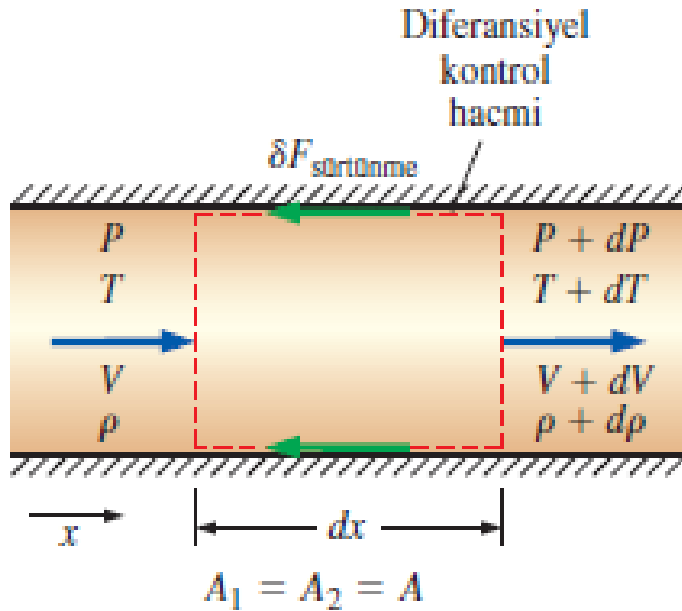
Sesaltı Fanno akışında sürtünme; Mach sayısının artmasına, sıcaklığın ise azalmasına yol açar, ancak sesüstü Fanno akışında bunun tersi olur.

TABLO 12-4

Sürtünmenin Fanno akışının özellikleri üzerindeki etkileri

Özellik	Sesaltı	Sesüstü
Hız, V	Artar	Azalır
Mach sayısı, Ma	Artar	Azalır
Durma sıcaklığı, T_0	Sabit	Sabit
Sıcaklık, T	Azalır	Artar
Yoğunluk, ρ	Azalır	Artar
Durma basıncı, P_0	Azalır	Azalır
Basınç, P	Azalır	Artar
Entropi, s	Artar	Artar

Fanno akışına ait özellik bağıntıları



Sabit en-kesit alanlı kanaldaki sürtülmeli adyabatik akış için diferansiyel kontrol hacmi.

Süreklilik denklemi Süreklilik denkleminin diferansiyel biçimi, süreklilik denklemi olan $\rho V = \text{sabit}$ 'in türevini alıp düzenleyerek elde edilir:

$$\rho dV + V d\rho = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (12-76)$$

x-Momentum denklemi $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho AV$ ve $A_1 = A_2 = A$ olduğu göz önüne alınarak momentum denklemi $\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}$, Şekil 12-58'deki diferansiyel kontrol hacmine uygulanırsa,

$$PA_c - (P + dP)A - \delta F_{\text{sürtünme}} = \dot{m}(V + dV) - \dot{m}V$$

elde edilir. Burada yine momentum akısı düzeltme faktörü β' 'yı yaklaşık olarak 1 aldık. Bu denklem,

$$-dPA - \delta F_{\text{sürtünme}} = \rho A V dV \text{ veya } dP + \frac{\delta F_{\text{sürtünme}}}{A} + \rho V dV = 0 \quad (12-77)$$

şeklinde daha basite indirgenebilir. Sürtünme kuvveti; çeper kayma gerilmesi τ_w ve yerel sürtünme faktörü f_x ile,

$$\delta F_{\text{sürtünme}} = \tau_w dA_s = \tau_w p dx = \left(\frac{f_x}{8} \rho V^2 \right) \frac{4A}{D_h} dx = \frac{f_x}{2} \frac{A dx}{D_h} \rho V^2 \quad (12-78)$$

uyarınca ilişkilidir. Burada dx akış bölümünün uzunluğu, p çevre uzunluğu ve $D_h = 4A/p$ kanalın hidrolik çapıdır (daireysel en-kesitli kanalda D_h hidrolik çapının D' ye eşit olacağına dikkat ediniz). Yerine konursa,

$$dP + \frac{\rho V^2 f_x}{2D_h} dx + \rho V dV = 0 \quad (12-79)$$

elde edilir. $V = Ma\sqrt{kRT}$ ve $P = \rho RT$ olduğundan $\rho V^2 = \rho kRT Ma^2 = kP Ma^2$ ve $\rho V = kP Ma^2/V$ yazılabilir. Bu ifadeler Denklem 12-79'da yerine konursa,

$$\frac{1}{kMa^2} \frac{dP}{P} + \frac{f_x}{2D_h} dx + \frac{dV}{V} = 0 \quad (12-80)$$

sonucuna varılır.

Enerji denklemi $c_p = kR/(k - 1)$ ve $V^2 = Ma^2kRT$ olduğu dikkate alınarak enerji denklemi, $T_0 =$ sabit veya $T + V^2/2$ $c_p =$ sabit,

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right) = \text{sabit} \quad (12-81)$$

şeklinde ifade edilebilir. Türevi alınır ve yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2(k-1)Ma^2}{2 + (k-1)Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad (12-82)$$

sonucu bulunur. Bu denklem, sıcaklıktaki diferansiyel değişimin Mach sayısındaki diferansiyel değişim cinsinden ifadesidir.

Mach sayısı İdeal gazlar için Mach sayısı bağıntısı $V^2 = Ma^2kRT$ olarak ifade edilebilir. Türevi alınır ve yeniden düzenlenirse,

$$2V dV = 2Ma^2kRT dMa + kRMa^2 dT \rightarrow \quad (12-83)$$

$$2V dV = 2\frac{V^2}{Ma} dMa + \frac{V^2}{T} dT$$

elde edilir. Her bir terim $2V^2$ ile bölünüp ifade yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dV}{V} = \frac{dMa}{Ma} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (12-84)$$

bulunur. Denklem 12-84'ün Denklem 12-82 ile birleştirilmesiyle hız değişimi Mach sayısı cinsinden,

$$\frac{dV}{V} = \frac{dMa}{Ma} - \frac{(k-1)Ma^2}{2 + (k-1)Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad \text{veya} \quad \frac{dV}{V} = \frac{2}{2 + (k-1)Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad (12-85)$$

olarak elde edilir.

İdeal gaz İdeal gaz denkleminin diferansiyel biçimi $P = \rho RT$ denkleminin diferansiyelinin alınması ile elde edilir:

$$dP = \rho R dT + RT d\rho \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (12-86)$$

Bunu süreklilik denklemini (Denklem 12-76) ile birleştirirsek,

$$\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \quad (12-87)$$

olur. Şimdi de Denklem 12-82 ve 12-84'ü birleştirirsek,

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2 + 2(k-1)Ma^2}{2 + (k-1)Ma^2} \frac{dMa}{Ma} \quad (12-88)$$

sonucu elde edilir. Bu denklem, P ile Ma arasındaki diferansiyel değişiminin bir ifadesidir.

Denklem 12-85 ve Denklem 12-88'in Denklem 12-80'de yerine yazılıp gerekli sadeleştirilmelerin yapılması halinde, Mach sayısının x ile değişiminin diferansiyel denklemini elde edilir:

$$\frac{f_x}{D_h} dx = \frac{4(1 - Ma^2)}{kMa^3 [2 + (k-1)Ma^2]} dMa \quad (12-89)$$

$$\frac{fL^*}{D_h} = \frac{1 - \text{Ma}^2}{k\text{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}$$

$$\frac{fL}{D_h} = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2$$

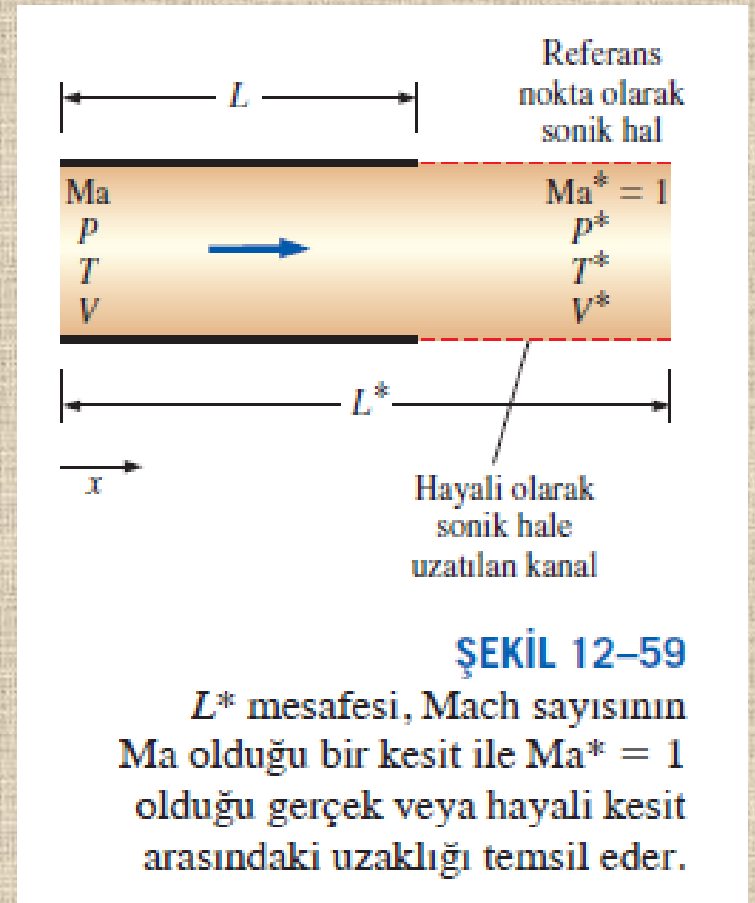
$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8 \log \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\text{Ma}^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \text{Ma} \left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\text{Ma}^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left(\frac{2 + (k-1)\text{Ma}^2}{k+1} \right)^{(k+1)/[2(k-1)]}$$



$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left(\frac{2 + (k-1)\text{Ma}^2}{k+1} \right)^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\text{Ma}^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \text{Ma} \left(\frac{k+1}{2 + (k-1)\text{Ma}^2} \right)^{1/2}$$

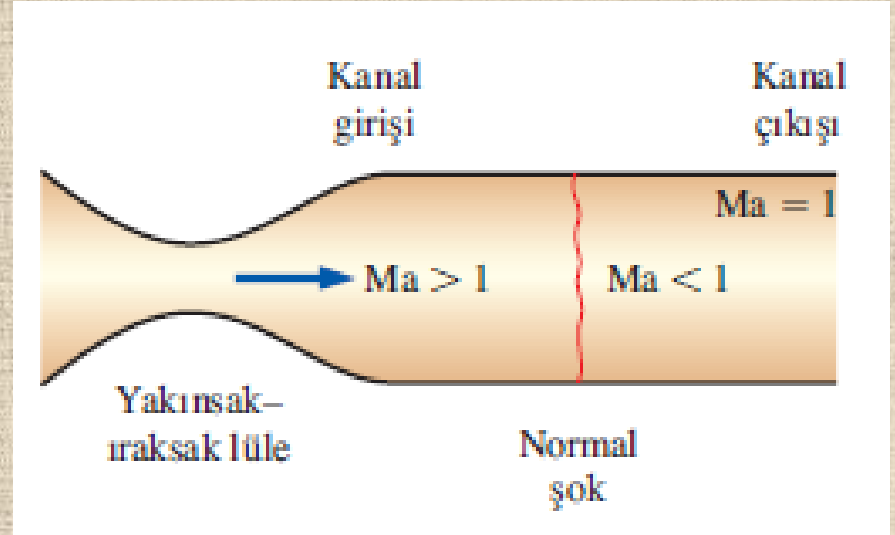
$$\frac{fL^*}{D_h} = \frac{1 - \text{Ma}^2}{k\text{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\text{Ma}^2}{2 + (k-1)\text{Ma}^2}$$

Fanno akışına ait bağıntıların özeti.

Boğulmuş Fanno Akışı

Sesaltı Fanno akışındaki sürtünmenin, hızın sonik hıza artmasına neden olduğu ve belirli bir uzunluktaki kanalın çıkışında Mach sayısının tam olarak 1 olacağı anlaşılmaktadır.

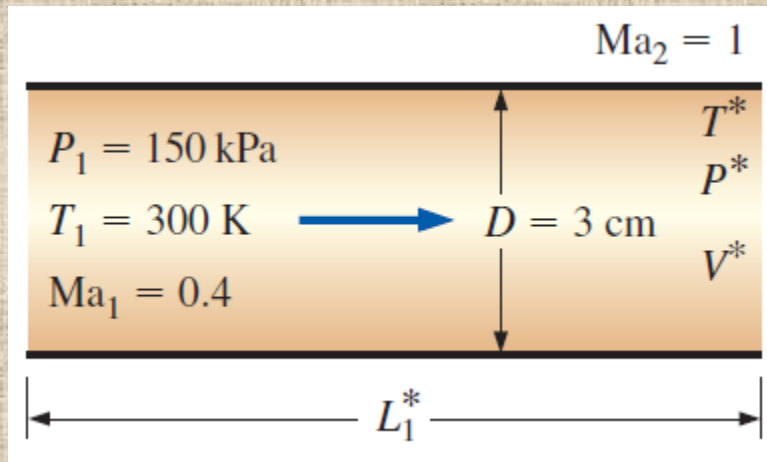
Bu kanal uzunluğuna **maksimum uzunluk**, **sonik uzunluk** veya **kritik uzunluk**, denir ve L^* ile gösterilir.



Kanal uzunluğu L , L^* 'den büyük olduğunda, sesüstü Fanno akışı kanal çıkışında her zaman sonik olur. Kanalın uzatılması, sadece normal şoku yukarıakımda ileri hareket ettirir.

ÖRNEK 12-15 Bir Kanaldaki Boğulmuş Fanno Akışı

Hava, 3 cm çapındaki pürüzsüz adyabatik bir kanala $Ma_1 = 0.4$, $T_1 = 300$ K ve $P_1 = 150$ kPa'da girmektedir (Şekil 12-62). Kanal çıkışındaki Mach sayısı 1 olduğuna göre, kanal uzunluğunu ve kanal çıkışındaki sıcaklık, basınç ve hızı bulunuz. Ayrıca kanaldaki durma basıncının kayıp yüzdesini hesaplayınız.



Özellikler Havanın özelliklerini $k = 1.4$, $c_p = 1.005$ kJ/kg·K, $R = 0.287$ kJ/kg·K ve $\nu = 1.58 \times 10^{-5}$ m²/s olarak alıyoruz.

Analiz İlk olarak giriş hızını ve giriş Reynolds sayısını bulalım:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(300 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} = 347 \text{ m/s}$$

$$V_1 = Ma_1 c_1 = 0.4(347 \text{ m/s}) = 139 \text{ m/s}$$

$$Re_1 = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{(139 \text{ m/s})(0.03 \text{ m})}{1.58 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 2.637 \times 10^5$$

Sürtünme faktörü ise Colebrook denkleminde bulunur:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{0}{3.7} + \frac{2.51}{2.637 \times 10^5 \sqrt{f}}\right)$$

Buradan,

$$f = 0.0148$$

elde edilir. Giriş Mach sayısı olan 0.4'e karşılık gelen Fanno akışı fonksiyonları Tablo A-16'dan aşağıdaki gibi okunur:

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = 1.5901 \quad \frac{T_1}{T^*} = 1.1628 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2.6958 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0.4313 \quad \frac{fL_1^*}{D} = 2.3085$$

Bu ifadelerdeki * sembolü çıkış halinde bulunan sonik şartları göstermektedir. Buna göre kanal uzunluğu, çıkış sıcaklığı, basıncı ve hızı,

$$L_1^* = \frac{2.3085D}{f} = \frac{2.3085(0.03 \text{ m})}{0.0148} = \mathbf{4.68 \text{ m}}$$

$$T^* = \frac{T_1}{1.1628} = \frac{300 \text{ K}}{1.1628} = \mathbf{258 \text{ K}}$$

$$P^* = \frac{P_1}{2.6958} = \frac{150 \text{ kPa}}{2.6958} = \mathbf{55.6 \text{ kPa}}$$

$$V^* = \frac{V_1}{0.4313} = \frac{139 \text{ m/s}}{0.4313} = \mathbf{322 \text{ m/s}}$$

olarak belirlenir. Buna göre, verilen sürtünme faktörü için Mach sayısının kanal çıkışında $Ma = 1$ 'e ulaşması için kanal uzunluğu 4.68 m olmalıdır. Kanalda sürtünmeden dolayı giriş durma basıncı P_{01} 'deki kayıp,

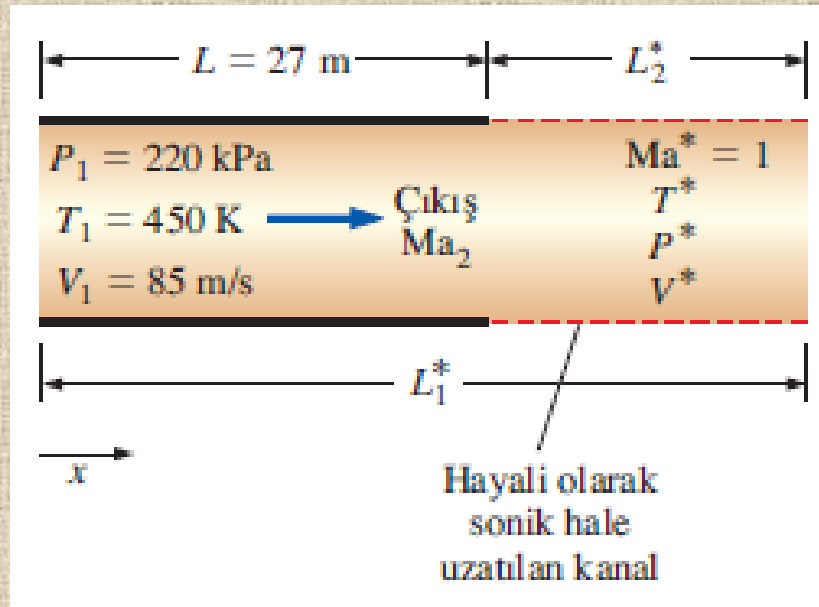
$$\frac{P_{01} - P_0^*}{P_{01}} = 1 - \frac{P_0^*}{P_{01}} = 1 - \frac{1}{1.5901} = 0.371 \text{ veya } \%37.1$$

olacaktır.

İrdeleme Bu problem, Fanno fonksiyonları için tablo halinde verilen değerleri kullanmak yerine, uygun bağıntılar kullanılarak da çözülebilir. Ayrıca, giriş şartlarındaki sürtünme faktörünü bulduk ve kanal boyunca bunun sabit kaldığını kabul ettik. Bu kabulün geçerliliğini doğrulamak için çıkış şartlarındaki sürtünme faktörünün değeri hesaplanırsa bunun 0.0121 olduğu görülür. Sürtünme faktöründeki %18'lik bir azalmanın önemli olduğunu dikkate alarak, sürtünme faktörünün ortalama değerini, $(0.0148 + 0.0121)/2 = 0.0135$, kullanarak yeniden hesap yapmalıyız. Bu ise kanal uzunluğunu $L_1^* = 2.3085 (0.03 \text{ m})/0.0135 = 5.13 \text{ m}$ olarak verir ve bunu gerekli olan kanal uzunluğu olarak alırız.

ÖRNEK 12-16 Bir Kanaldaki Fanno Akışının Çıkış Şartları

Hava, 27 m uzunluğunda ve 5 cm çapındaki adyabatik kanala $V_1 = 85$ m/s, $T_1 = 450$ K ve $P_1 = 220$ kPa'da girmektedir (Şekil 12-63). Kanalın ortalama sürtünme faktörü 0.023 olarak tahmin edilmektedir. Kanal çıkışındaki Mach sayısını ve havanın kütesel debisini bulunuz.



Özellikler Havanın özelliklerini $k = 1.4$, $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ve $R = 0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ olarak alıyoruz.

Analiz Bilmemiz gereken ilk şey akışın çıkışta boğulmuş olup olmadığıdır. Bu nedenle ilk önce giriş Mach sayısını ve fL^*/D_h fonksiyonunun buna karşılık gelen değerini bulalım:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(450 \text{ K})\left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}}\right)} = 425 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{85 \text{ m/s}}{425 \text{ m/s}} = 0.200$$

Tablo A-16'dan bu Mach sayısına karşılık olarak $(fL^*/D_h)_1 = 14.5333$ değeri okunur. Ayrıca gerçek kanal uzunluğu L 'yi kullanarak,

$$\frac{fL}{D_h} = \frac{(0.023)(27 \text{ m})}{0.05 \text{ m}} = 12.42 < 14.5333$$

sonucunu elde ederiz. Bundan dolayı akış *boğulmamıştır* ve çıkış Mach sayısı 1'den düşüktür. Çıkış halindeki fL^*/D_h fonksiyonu Denklem 12-91'den hesaplanır:

$$\left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_2 = \left(\frac{fL^*}{D_h}\right)_1 - \frac{fL}{D_h} = 14.5333 - 12.42 = 2.1133$$

fL^*/D_h 'nin bu değerine karşılık gelen Mach sayısı Tablo A-16'dan 0.42 olarak elde edilir. Buna göre kanal çıkışındaki Mach sayısı,

$$\text{Ma}_2 = \mathbf{0.420}$$

olacaktır. Giriş şartları kullanılarak havanın kütleli debisi,

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{220 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(450 \text{ K})} \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa}\cdot\text{m}^3} \right) = 1.703 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{\text{hava}} = \rho_1 A_1 V_1 = (1.703 \text{ kg/m}^3) [\pi(0.05 \text{ m})^2/4] (85 \text{ m/s}) = \mathbf{0.284 \text{ kg/s}}$$

olarak elde edilir.

İrdeleme 27 m'lik kanal uzunluğunun, Mach sayısını 0.20'den 0.42'ye çıkardığına ve Mach sayısını 0.42'den 1'e çıkarmanın sadece 4.6 m aldığına dikkat ediniz. Buna göre sonik şartlara yaklaştıkça Mach sayısı daha yüksek oranda artmaktadır.

Problemi daha iyi kavramak için, giriş ve çıkış şartlarında fL^*/D_h değerlerine karşılık gelen uzunlukları bulalım. Kanalin tamamında f 'nin sabit olduğunu dikkate alarak, giriş ve çıkış hallerindeki maksimum (veya sonik) kanal uzunlukları,

$$L_{\text{maks},1} = L_1^* = 14.5333 \frac{D_h}{f} = 14.5333 \frac{0.05 \text{ m}}{0.023} = 31.6 \text{ m}$$

$$L_{\text{maks},2} = L_2^* = 2.1133 \frac{D_h}{f} = 2.1133 \frac{0.05 \text{ m}}{0.023} = 4.59 \text{ m}$$

(veya $L_{\text{maks},2} = L_{\text{maks},1} - L = 31.6 - 27 = 4.6 \text{ m}$) olarak elde edilir. Dolayısıyla, mevcut kanala 4.6 m uzunluğunda bir kısım eklenirse akış sonik şartlara ulaşır.

- Durma özellikleri
- Bir-boyutlu izentropik akış
 - ✓ Akışkan hızının akış alanı ile değişimi
 - ✓ İdeal gazların izentropik akışı için özellik bağıntıları
- Lülelerde izentropik akış
 - ✓ Yakınsak lüleler
 - ✓ Yakınsak-ıraksak lüleler
- Şok dalgaları ve genişleme dalgaları
 - ✓ Normal şoklar
 - ✓ Eğik şoklar
 - ✓ Prandtl–Meyer genişleme dalgaları
- Isı geçişinin olduğu ve sürtünmenin ihmal edildiği kanal akışı (Rayleigh akışı)
 - ✓ Rayleigh akışı için özellik bağıntıları
 - ✓ Boğulmuş Rayleigh akışı
- Sürtünmeli adyabatik kanal akışı (Fanno akışı)
 - ✓ Fanno akışı için özellik bağıntıları
 - ✓ Boğulmuş Fanno akışı