

Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

21 Nisan 2011

Outline

1 Homoklinik Dallanmaya Örnek

2 Ayrık Zamanlı Sistemler

Homoklinik Dallanma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y - x^2 \\ \dot{y} &= (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

Homoklinik Dallanma

$$\dot{x} = -x + 2y - x^2$$

$$\dot{y} = (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy$$

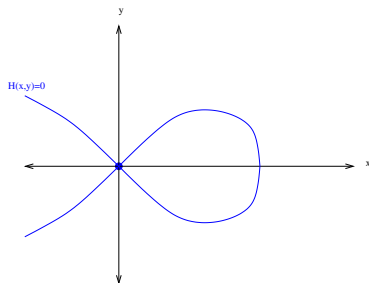
$\alpha = 0$ için $H(x, y) = x^2(1 - x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.

Homoklinik Dallanma

$$\dot{x} = -x + 2y - x^2$$

$$\dot{y} = (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy$$

$\alpha = 0$ için $H(x,y) = x^2(1-x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.

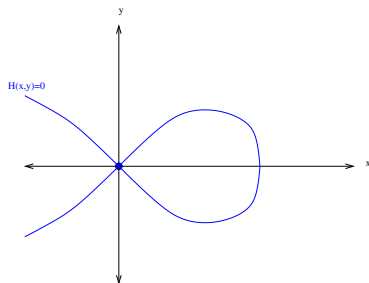


Homoklinik Dallanma

$$\dot{x} = -x + 2y - x^2$$

$$\dot{y} = (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy$$

$\alpha = 0$ için $H(x, y) = x^2(1 - x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



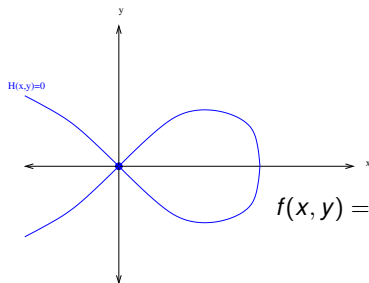
$$\nabla H(x, y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

Homoklinik Dallanma

$$\dot{x} = -x + 2y - x^2$$

$$\dot{y} = (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy$$

$\alpha = 0$ için $H(x, y) = x^2(1 - x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



$$\nabla H(x, y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

$$\langle f(x, y), \nabla H(x, y) \rangle = 0$$

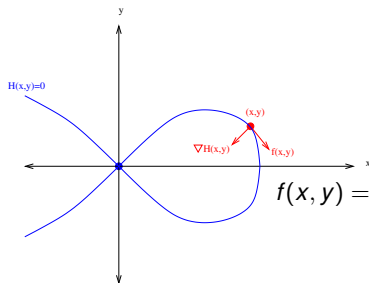
$$f(x, y) = (-x + 2y - x^2, (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy)$$

Homoklinik Dallanma

$$\dot{x} = -x + 2y - x^2$$

$$\dot{y} = (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy$$

$\alpha = 0$ için $H(x, y) = x^2(1 - x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



$$\nabla H(x, y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

$$\langle f(x, y), \nabla H(x, y) \rangle = 0$$

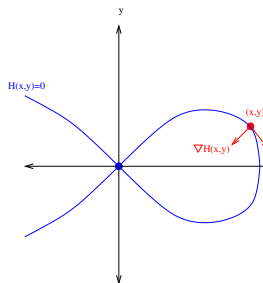
$$f(x, y) = (-x + 2y - x^2, (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy)$$

Homoklinik Dallanma

$$\dot{x} = -x + 2y - x^2$$

$$\dot{y} = (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy$$

$\alpha = 0$ için $H(x, y) = x^2(1 - x) - y^2 = 0$ çözümleri içerir.



$$\nabla H(x, y) = (2x - 3x^2, -2y)$$

$$< f(x, y), \nabla H(x, y) > = 0$$

$$f(x, y) = (-x + 2y - x^2, (2 - \alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy)$$

$H(x, y) = 0$ eğrisinin sağ yarı düzlemde denge noktası içermediğinden emin miyiz?

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k + 1) = f(x(k)) \quad (1)$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0)))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

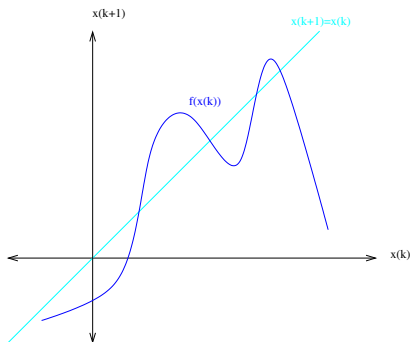
$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow \\ x(3) = f^3(x(0))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

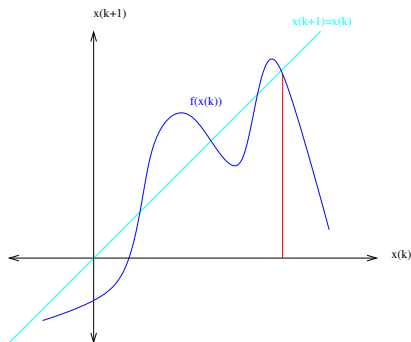


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

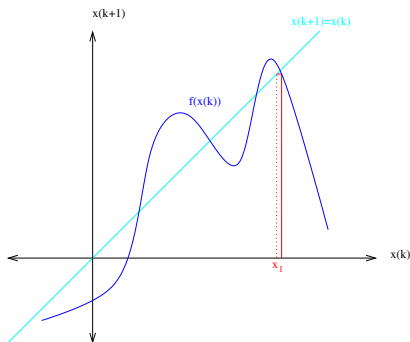


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

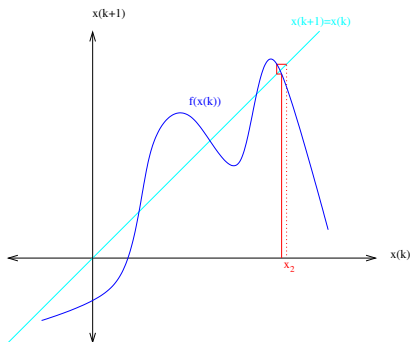


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

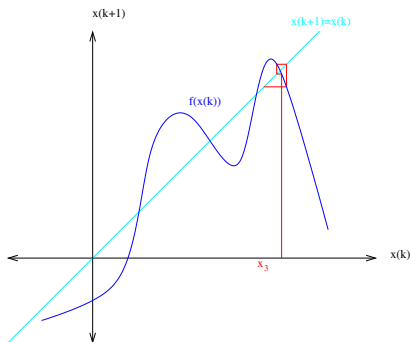


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

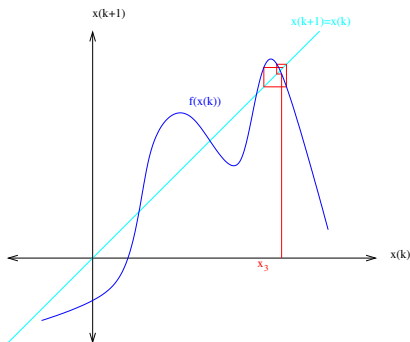


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

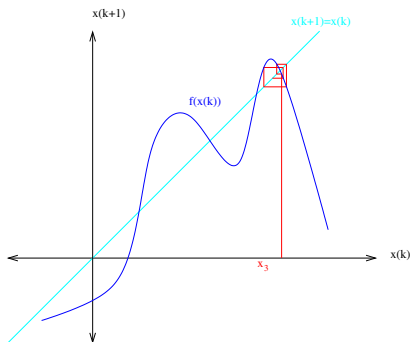


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

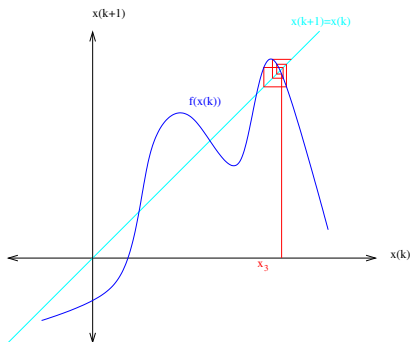


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

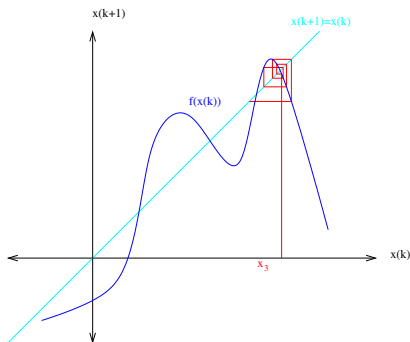


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

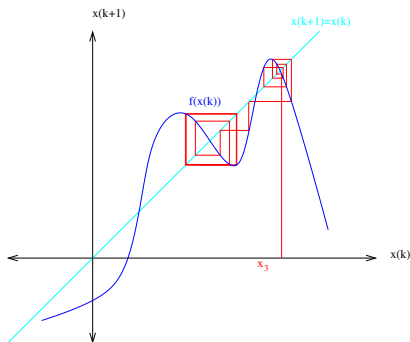


Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \\ \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.



Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k + 1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0)))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow \\ x(3) = f^3(x(0)) \end{aligned}$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow$$

$$x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalardır:

$$\{x^*, x^*, \dots, x^*, \dots\}$$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalar:

$$\{x^*, x^*, \dots, x^*, \dots\}$$

p -periyodik bir çözüm: $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0, x_1 \dots\}$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalar:

$$\{x^*, x^*, \dots, x^*, \dots\}$$

p -periyodik bir çözüm: $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0, x_1, \dots\} \rightarrow x_k = f^p(x_k),$
 $k = 0, 1, \dots, p-1.$

Ayrık zamanlı sistemlerde sabit ve periyodik çözümler

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \rightarrow x(1) = f(x(0)) \rightarrow x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0)) \rightarrow x(3) = f^3(x(0))$$

$\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ dizisi (2) sisteminin (x_0 başlangıç koşulu için) bir çözümüdür.

$x^* = f(x^*)$ koşulunu sağlayan x^* noktaları sabit noktalar:

$$\{x^*, x^*, \dots, x^*, \dots\}$$

p -periyodik bir çözüm: $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0, x_1, \dots\} \rightarrow x_k = f^p(x_k),$
 $k = 0, 1, \dots, p-1.$

$x^* = f^n(x^*)$ koşulunu sağlayan en küçük n sayısına x^* 'ın asal periyodu denir.

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

x^* sabit noktası için $|f'(x^*)| < 1$ ise x^* asimptotik karardır.

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

x^* sabit noktası için $|f'(x^*)| < 1$ ise x^* asimptotik kararlıdır.

$\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$ periyodik çözümü için

$|(f^p)'(x_0)| = |f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| < 1$ ise periyodik çözüm asimptotik kararlıdır.

Sabit ve periyodik çözümlerin kararlılığı

x^* sabit noktası için $|f'(x^*)| < 1$ ise x^* asimptotik kararlıdır.

$\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ periyodik çözümü için

$|(f^p)'(x_0)| = |f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{p-1})| < 1$ ise periyodik çözüm asimptotik kararlıdır.

Başka nasıl çözümler olabilir?

Lojistik Dönüşüm

$$x(k + 1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1 - x)$$

Lojistik Dönüşüm

$$x(k + 1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1 - x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Lojistik Dönüşüm

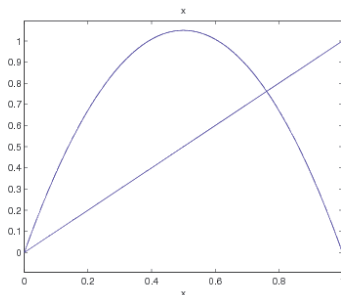
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f



Lojistik Dönüşüm

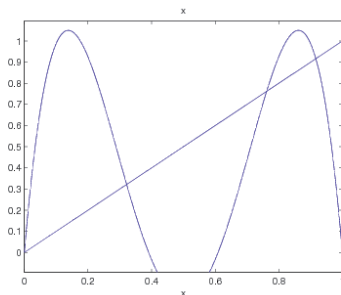
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^2



Lojistik Dönüşüm

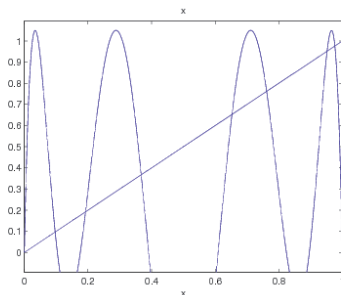
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^3



Lojistik Dönüşüm

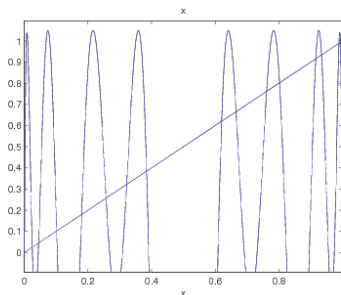
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^4



Lojistik Dönüşüm

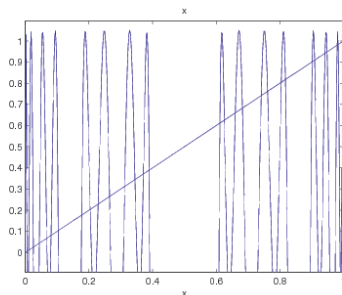
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Periyodik noktaları var mı?

$r = 4.2$ için f^5



Lojistik Dönüşüm

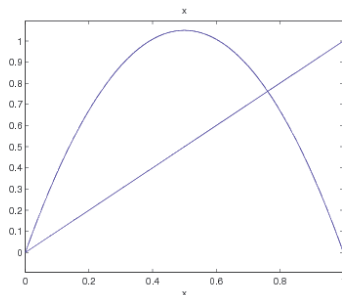
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkütmesi nedir ?

$r = 4.2$ için



Lojistik Dönüşüm

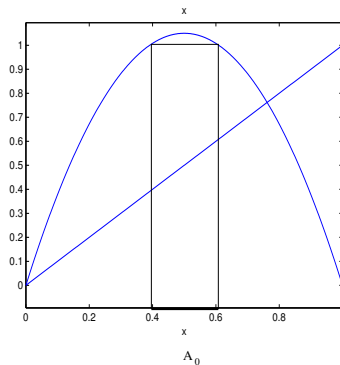
$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

Sabit noktaları: $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için



$$f_r(x) = rx(1 - x)$$

Değişmez altkümesi nedir ?

$r = 4.2$ için

