

Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

10 Mayıs 2012

Outline

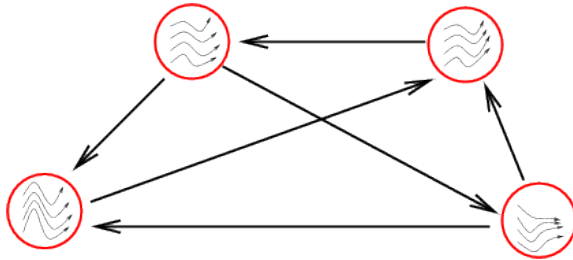
- 1 Bağlantılı Dinamik Sistemler
- 2 Bağlantılı Dinamik Sistemlerde Değişmez Altuzaylar
- 3 Bağlantılı Osilatörler

Bağlantılı Dinamik Sistemler

Dinamik sistemler ağı:

birimlerin dinamiği + bağlantı yapısı =

BÜTÜNSEL DİNAMİK

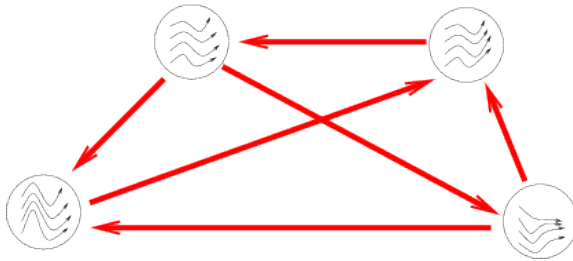


Bağlantılı Dinamik Sistemler

Dinamik sistemler ağı:

birimlerin dinamiği + bağlantı yapısı =

BÜTÜNSEL DİNAMİK



Bağlantılı Dinamik Sistemler

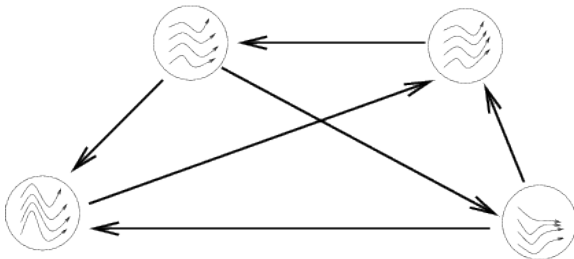
Dinamik sistemler ağı:

birimlerin dinamiği

+

bağlantı yapısı =

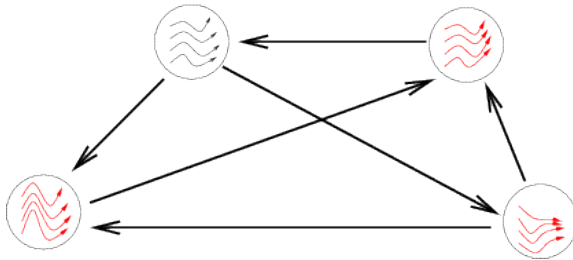
BÜTÜNSEL DİNAMİK



Bağlantılı Dinamik Sistemler

Dinamik sistemler ağı:

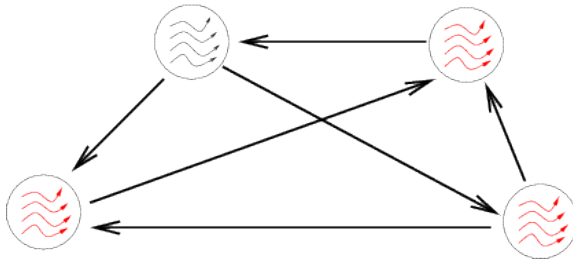
birimlerin dinamiği + bağlantı yapısı =
BÜTÜNSEL DİNAMİK



Bağlantılı Dinamik Sistemler

Dinamik sistemler ağı:

birimlerin dinamiği + bağlantı yapısı =
BÜTÜNSEL DİNAMİK



Değişmez Altuzaylar

- **Ağın simetrileri**
- Ağın dengeli boyamaları

Ağıdaki simetrilerin etkileri

- Düğümlerin bir permütasyonu ağı sabit bırakıyorsa bu permütasyona ağı simetrisi denir.
- Bu permütasyona denk düşen durum uzayındaki koordinat dönüşü bağlantılı sistemin bir simetrisi olur.

Simetrik Dinamik Sistemler

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

sistemini ele alalım. Öyle ki; $x \in \mathbb{R}^n$ ve $F, \mathbb{R}^n$ 'de bir vektör alanı olsun.

Simetrik Dinamik Sistemler

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

sistemini ele alalım. Öyle ki; $x \in \mathbb{R}^n$ ve $F, \mathbb{R}^n$ 'de bir vektör alanı olsun.

$x, (1)$ 'in bir çözümüdür. $\implies \gamma x, (1)$ 'in bir çözümüdür.

koşulunu sağlayan $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir γ ($\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) birebir dönüşümüne (1) 'in simetrisi denir.

Simetrik Dinamik Sistemler

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

sistemini ele alalım. Öyle ki; $x \in \mathbb{R}^n$ ve $F, \mathbb{R}^n$ 'de bir vektör alanı olsun.

$x, (1)$ 'in bir çözümüdür. $\implies \gamma x, (1)$ 'in bir çözümüdür.

koşulunu sağlayan $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir γ ($\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) birebir dönüşümüne (1) 'in simetrisi denir.

$\gamma, (1)$ 'in bir simetrisidir $\Leftrightarrow F, \gamma$ -eşdeğışkendir (equivariant, $\gamma F = F\gamma$).

Simetrik Dinamik Sistemler

- (1)'in simetrisi bir grup (Σ) oluşturur..

Simetrik Dinamik Sistemler

- (1) 'in simetrileri bir grup (Σ) oluşturur..
- Bu durumda, F 'ye Σ -eşdeğişken vektör alanı denir.

Simetrik Dinamik Sistemler

- (1) 'in simetrileri bir grup (Σ) oluşturur..
- Bu durumda, F 'ye Σ -eşdeğişken vektör alanı denir.
- $\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma x = x \ \forall \gamma \in \Sigma\}$ sabit nokta altuzayı F -değişmezdir.

Simetrik Dinamik Sistemler

- (1) 'in simetrileri bir grup (Σ) oluşturur..
- Bu durumda, F 'ye Σ -eşdeğişken vektör alanı denir.
- $\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma x = x \ \forall \gamma \in \Sigma\}$ sabit nokta altuzayı F -değişmezdir.
- (1) 'in bazı dallanmaları Σ simetri grubuyla ilişkilidir.

Simetrik Dinamik Sistemler

- (1) 'in simetrileri bir grup (Σ) oluşturur..
- Bu durumda, F 'ye Σ -eşdeğişken vektör alanı denir.
- $\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma x = x \ \forall \gamma \in \Sigma\}$ sabit nokta altuzayı F -değişmezdir.
- (1) 'in bazı dallanmaları Σ simetri grubuyla ilişkilidir.

Bakınız: “***The Symmetry Perspective***, M. Golubitsky and I. Stewart., Birkhauser Verlag, Basel, 2002”.

Örnekler

Örnekler

- $\dot{x} = x^2$ simetrik mi?

Örnekler

- $\dot{x} = x^2$ simetrik mi?
- $\dot{x} = x^3$ simetrik mi?

Örnekler

- $\dot{x} = x^2$ simetrik mi?
- $\dot{x} = x^3$ simetrik mi?
-

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -y + x\end{aligned}$$

simetrik mi?

Guckenheimer-Holmes Çevrimi

Guckenheimer-Holmes Çevrimi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + (ax^2 + by^2 + cz^2)x \\ \dot{y} &= \mu y + (ay^2 + bz^2 + cx^2)y \\ \dot{z} &= \mu z + (az^2 + bx^2 + cy^2)z\end{aligned}\tag{2}$$

Guckenheimer-Holmes Çevrimi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + (ax^2 + by^2 + cz^2)x \\ \dot{y} &= \mu y + (ay^2 + bz^2 + cx^2)y \\ \dot{z} &= \mu z + (az^2 + bx^2 + cy^2)z\end{aligned}\tag{2}$$

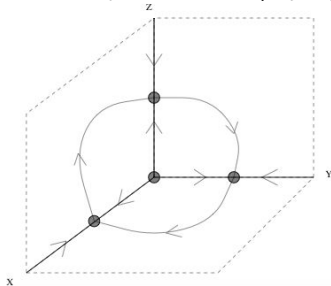
Yansıma simetrileri: $(x, y, z) \rightarrow (\pm x, \pm y, \pm z)$

Guckenheimer-Holmes Çevrimi

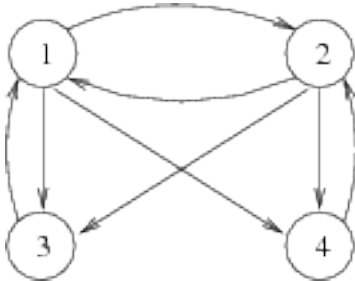
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + (ax^2 + by^2 + cz^2)x \\ \dot{y} &= \mu y + (ay^2 + bz^2 + cx^2)y \\ \dot{z} &= \mu z + (az^2 + bx^2 + cy^2)z\end{aligned}\tag{2}$$

Yansıma simetrileri: $(x, y, z) \rightarrow (\pm x, \pm y, \pm z)$

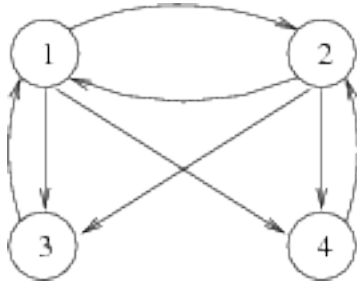
Permutasyon simetrisi: $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$



4 Hücreli bağlantılı sistem



4 Hücreli bağlantılı sistem



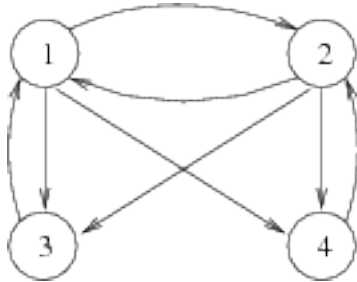
$$\dot{x}_1 = f(x_1; x_2, x_3)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2; x_1, x_4)$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3; x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_4 = f(x_4; x_1, x_2)$$

4 Hücreli bağlantılı sistem



$$\dot{x}_1 = f(x_1; x_2, x_3)$$

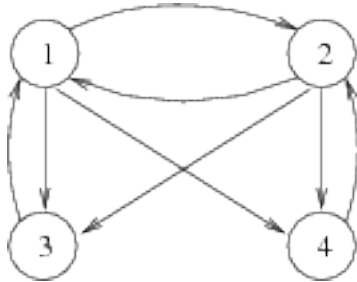
$$\dot{x}_2 = f(x_2; x_1, x_4)$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3; x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_4 = f(x_4; x_1, x_2)$$

$$x_i \in \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

4 Hücreli bağlantılı sistem



$$f(x; y, z) = f(x; z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\dot{x}_1 = f(x_1; x_2, x_3)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2; x_1, x_4)$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3; x_1, x_2)$$

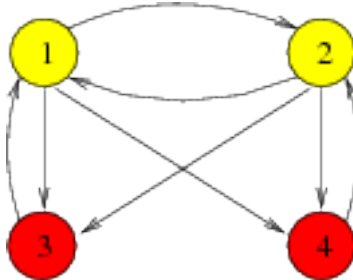
$$\dot{x}_4 = f(x_4; x_1, x_2)$$

$$x_i \in \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Simetrinin Belirlediği Değişmez Altuzay

$$\Sigma = \{1, (12)(34)\}$$

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$$



Değişmez Altuzaylar

- Ağın simetrileri
- **Ağın dengeli boyamaları**

Ağdaki dengeli boyamalar

Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.

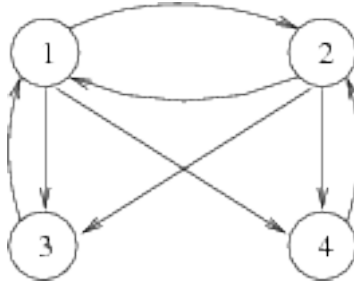
Ağdaki dengeli boyamalar

Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.

Bakınız: “M. Golubitsky and I. Stewart. **Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism**. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 43(3):305â364 (electronic), 2006”.

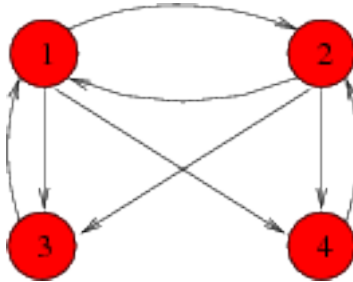
Ağdaki dengeli boyamalar

Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

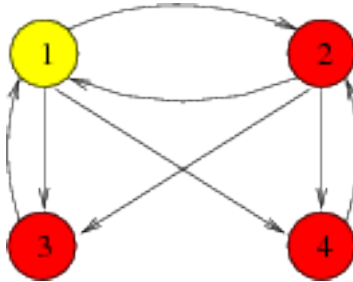
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

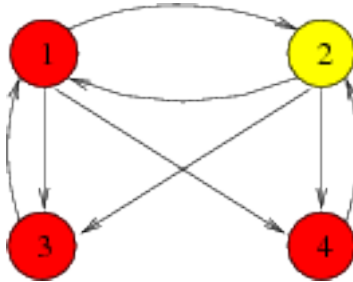
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_2^{s1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

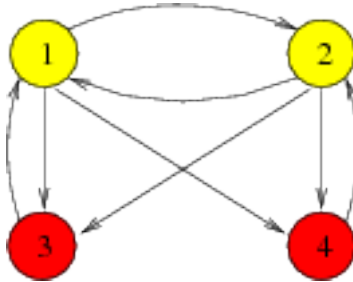
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_2^{s2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

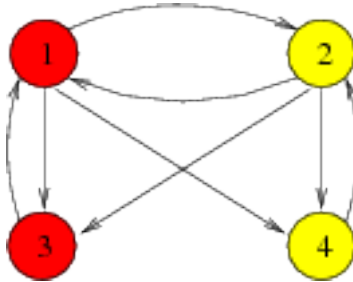
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_2^{s3} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

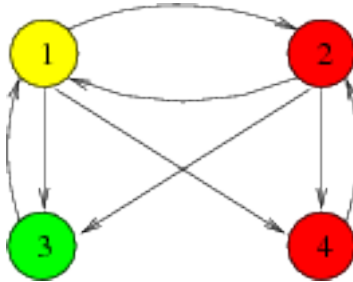
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3, x_2 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

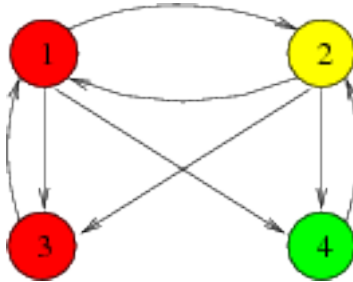
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_3^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

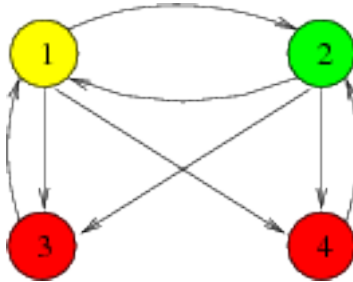
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_3^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

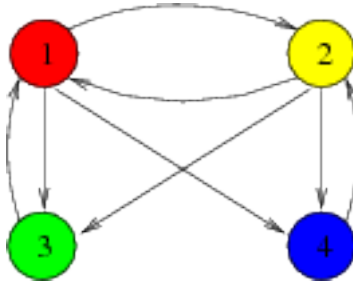
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_3^s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4\}$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

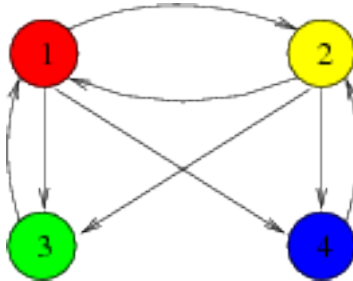
Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.



$$V_4 = \mathbb{R}^4$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

Dengeli Boyama: Aynı renkli hücrelerin verilen bir renk grubundan aldıkları giriş sayısı eşit olmalı.

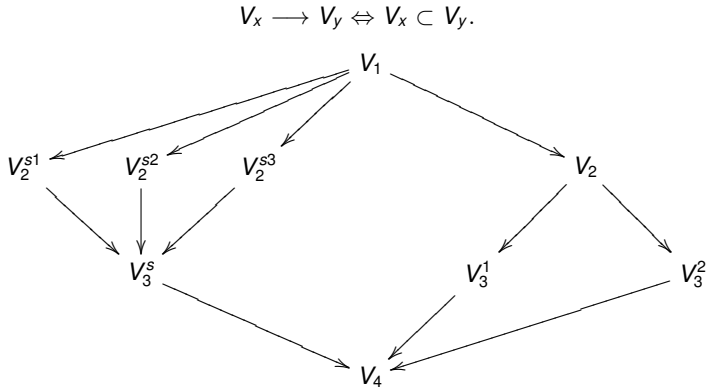


$$V_4 = \mathbb{R}^4$$

Bağlantı Yapısının Belirlediği Değişmez Altuzaylar

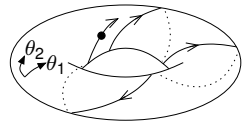
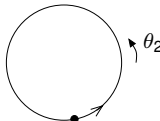
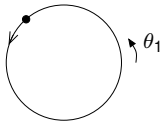
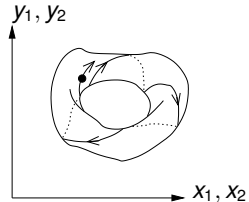
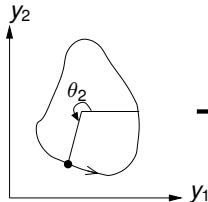
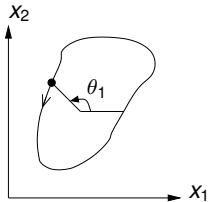
Boyut	Değişmez Altuzay
4	$V_4 = \mathbb{R}^4$
3	$V_3^s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4\}$
3	$V_3^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_4\}$
3	$V_3^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3\}$
2	$V_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3, x_2 = x_4\}$
2	$V_2^{s1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3 = x_4\}$
2	$V_2^{s2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3 = x_4\}$
2	$V_2^{s3} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$
1	$V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$

Değişmez Altuzayların Kapsama İlişkisi



Bağlantılı Osilatörler

Bağlanacak her sistemin bir kararlı limit çevrimi olsun.



Bağlantılı osilatörlerin $(\omega_{ij}, |\Omega_{ij}|)$ -karakteristiği

Bağlantılı osilatörlerin $(\omega_{ij}, |\Omega_{ij}|)$ -karakteristiği

Osilatörlerin bağlanmadan önceki frekansları: ω_i

Bağlantılı osilatörlerin $(\omega_{ij}, |\Omega_{ij}|)$ -karakteristiği

Osilatörlerin bağlanmadan önceki frekansları: ω_i

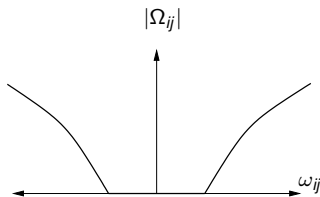
Osilatörlerin bağlantı sonrası gözlenen frekansları: Ω_i

Bağlantılı osilatörlerin $(\omega_{ij}, |\Omega_{ij}|)$ -karakteristiği

Osilatörlerin bağlanmadan önceki frekansları: ω_i

Osilatörlerin bağlantı sonrası gözlenen frekansları: Ω_i

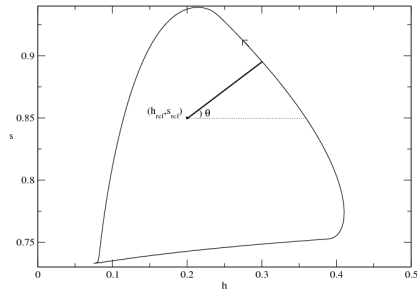
Genel durum: Osilatörlerin doğal frekansları yakınsa senkronizasyon gerçekleşir.



(a)

Hodgkin-Huxley Nöronu

$$\begin{aligned}
 c \dot{v}_i(t) &= I_i + -g_L(v_i(t) - v_L) - g_K n^4(h_i(t))(v_i(t) - v_K) \\
 &\quad - g_{Na} m_\infty^3(v_i(t)) h_i(v_i(t) - v_{Na}) - g_{syn} \sum_{j \neq i} s_j(v_i(t) - v_{syn}) \\
 \tau_h \dot{h}_i(t) &= h_\infty(v_i(t)) - h_i(t) \\
 \dot{s}_i(t) &= a(v_i(t - \tau_d))(1 - s_i(t)) - s_i(t)/\tau_{syn}
 \end{aligned}$$



Hodgkin-Huxley Nöronları

Senkronizasyon İndeksi(Synchronization index): $\rho_{ij} = \left| \frac{e^{i\theta_i} + e^{i\theta_j}}{2} \right| \leq 1$

Hodgkin-Huxley Nöronları

Senkronizasyon İndeksi(Synchronization index): $\rho_{ij} = \left| \frac{e^{i\theta_i} + e^{i\theta_j}}{2} \right| \leq 1$

