

# Doğrusal Olmayan Devreler, Sistemler ve Kaos

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği  
İstanbul Teknik Üniversitesi

2 Mayıs 2013

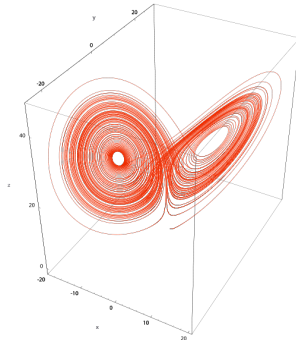
# Outline

- 1 Devaney Tipi Kaos
- 2 Sembolik Dinamik Sistemler
- 3 Lyapunov Üsteli

## Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık

- Kelebek etkisi
- Lorenz çekicisi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



Başka bir çok sürekli zaman kaotik sistemi var. (Elegant Chaos, Sprott.)

## Devaney Tipi Kaos

### Tanım (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık)

$f : J \rightarrow J$  fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan bir  $\delta > 0$  bulunabiliyorsa,  $f$  başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir:

$$\forall x \in J, \text{ açık } N \ni x \exists y \in N, n \geq 0 \text{ öyleki } |f^n(x) - f^n(y)| > \delta.$$

### Tanım (Topolojik Geçişlilik)

$J \subset \mathbb{R}$  olmak üzere bir  $f : J \rightarrow J$  fonksiyonunu ele alalım. Her  $U, V \subset J$  açık kümeleri için  $f^k(U) \cap V$  koşulunu sağlayan bir  $k > 0$  sayısı varsa  $f$  topolojik geçişlidir denir.

$f$ 'in  $J$  de yoğun bir yörüngesi varsa,  $f$  topolojik geçişlidir.

Tersi de doğru, ama ispatı kolay değil.

### Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $f : V \rightarrow V$  fonksiyonuna kaotik denir:

- $f$  başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.
- $f$  topolojik geçişlidir.
- periyodik noktalar  $V$ 'de yoğundur.

## Tanımda fazlalık

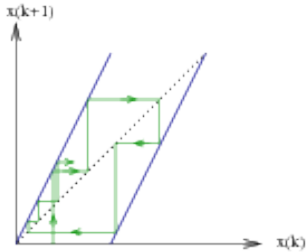
J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, On Devaney's Definition of Chaos, 1992.

### Teorem

*$X$ , sonlu olmayan metrik uzay,  $f : X \rightarrow X$  sürekli olsun.*

*$f$  topolojik geçişli ve periyodik yörüngeler yoğun ise  $f$  başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.*

## İkiye katlama dönüşümü



$$\theta(n+1) = 2 \cdot \theta(n) \bmod 1$$

$$\theta(n+1) = K_2(\theta(n))$$

Bu dönüşümün kaotik olduğunu göstereceğiz.

## Sembolik Dinamik Sistemler

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1\}$$

$$\Sigma_n = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

$\Sigma_n$ 'e dizi uzayı denir.

$\Sigma_2$ 'de  $d(s, t) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2}$  metriğini tanımlayalım.

### Önerme

$s, t \in \Sigma_2$  için

$$s_i = t_i, i = 0, 1, \dots, n \iff d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}.$$

İki dizinin ne kadar çok ilk terimi eşitse, diziler o kadar birbirine yakındır.

# Kaydırma Dönüşümü

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$$

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma)$ 'nin  $\Sigma_2$ 'de yoğun olduğunu gösterelim.
  - $Y$ 'deki her noktaya keyfi yakın  $X$ 'den bir eleman varsa  $X$ ,  $Y$ 'de yoğundur.
  - $\Sigma_2$ 'deki bir  $(s_0, s_1, s_2, \dots)$  dizisine keyfi yakın bir periyodik noktayı nasıl elde ederim.
  - Gerekli kadar büyük bir  $N$  sayısı için ilk  $N$  terimi sabit tutarak... Yani;  
 $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, \dots)$ .
- $\sigma$ 'nin  $\Sigma_2$ 'de yoğun bir yörüngesini bulalım.
  - Periyodik dizilerin tekrar eden kısımlarını sırayla yazalım:  
 $(0), (1), (00), (01), (10), (11), (000), (001), (010), \dots$
  - Bunları ardarda ekleyerek yeni bir dizi oluşturalım:  
 $\bar{s} = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ \dots)$ .
  - Bu dizi sağa kaydırılarak herhangi bir  $(s_0, s_1, s_2, \dots)$  dizisine istenildiği kadar yakın bir dizi elde edilebilir.
- Başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı gösterelim.
  - Birbirine çok yakın iki dizi sağa kaydırıldığında aralarındaki mesafe iki katına çıkar.



# Kaydırma Dönüşümü

## SONUÇ:

- $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  kaotiktir.
- $\overline{\Sigma}_2 := \Sigma_2 \setminus \{\text{Sonu } (0, 1, 1, 1, \dots) \text{ ile biten diziler.}\}$  ile biten diziler.  $h : [0, 1] \rightarrow \overline{\Sigma}_2$ ,  
 $h : x \rightarrow x$ 'in 2 tabanındaki açılımı.
- $h$ , bir homeomorfizmdir.  $\sigma h = hK_2$  dir. Yani,  $K_2$  ile  $\sigma$  topolojik eşdeğerdir.

# Lyapunov Üsteli

