10 Kayan Noktalı Sayılar (*Floating Point Numbers*)

10 Tabanı:

$(12.34)_{10} = 12 + \frac{34}{100}$ ya da $(12.34)_{10} = 12 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} = 1\cdot10^{1} + 2\cdot10^{0} + 3\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2}$

2 Tabanı:

$(101.11)_2 = 5 + \frac{3}{4}$ ya da $(101.11)_2 = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $(0.1111)_2 = \frac{15}{16}$, $(0.1)_2 = \frac{1}{2}$

Gerçek (*real numbers*) sayıları (çok küçük ve çok büyük sayıları da) bilgisayar belleğinde tutmak için üstel gösterilim (bilimsel gösterilim) kullanılır.

10.1 Üstel gösterilim (*Scientific notation, exponential notation*)

$\pm F \times B^{\pm E}$

F: *Fraction* (Kesir, Mantis)
E: *Exponent* (Üs)
B: *Base* (Taban)

Bellekte ± , **F** ve **E** tutulur.
Taban **B**'nin bellekte tutulmasına gerek yoktur.
Tüm sayılar için aynıdır (bilgisayarlarda B=2).

Örnekler (10 tabanı):

a)
976,000,000,000,000 = **+0.976**x10^15
+976 ve +15 bellekte tutulur.

b)
0.000 000 000 000 976 = **+0.976**x10^-12
+976 ve -12 bellekte tutulur.

Normalize Sayı:
Bir sayı üstel notasyonda farklı şekillerde yazılabilir.
Örneğin; 3.14 = 314x10^-2 = 3.14x10^0 = 0.314x10^1

Normalize gösterilimde noktanın yerine önceden karar.
Örneğin, noktanın her zaman sıfırdan farklı en yüksek anlamlı sayının solunda olduğu kabul edilir ve üs E ona göre ayarlanır.

Örnek:

3.14 normalizasyon → 0.314x10^1

Bu sayı bellekte şöyle tutulur: ±F ±E → +314 +01

Taban B'yi (bu örnekte 10) ve noktanın yerini bellekte tutmaya gerek yoktur.

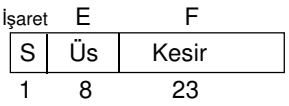
Başka normalizasyon yöntemleri de vardır.
Örneğin nokta en yüksek anlamlı sayının sağına da yerleştirilebilir.

Yükseltilmiş Üs (*Biased Exponenet*):
Üs değeri işaretli bir sayıdır.
İşaretli sayıları karşılaştırmak (2'ye tümleyen yöntemi) zordur.
Üs değerinin negatif olmaması için üs değeri bellekte saklanmadan önce belli bir değer "ökçe" (*bias*) ile toplanır (üs yükseltilir).
Böylece üssün işaretinin saklanmasına gerek kalmaz ve aritmetik işlemlerde (karşılaştırmada) kolaylık sağlanır.

10.2 IEEE 754 Standardı (1985, güncelleme 2008)

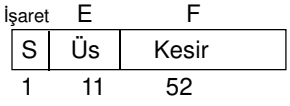
IEEE "Standard for Floating-Point Arithmetic" (IEEE 754) 1985'te IEEE (the Institute of Electrical and Electronics Engineers) tarafından oluşturulmuştur ve günümüzde de bilgisayar sistemlerinde kullanılmaktadır.

Single (32 bit)



Üs 127 yükseltilmiştir.

Double (64 bit)



Üs 1023 yükseltilmiştir.

E'deki bit sayısı k olmak üzere üs $(2^{k-1} -1)$ kadar yükseltilir.

Güncel standartta 16 bitlik (*half*) ve 128 bitlik (*quadruple*) sayılar da bulunmaktadır.

Normalize Sayı (IEEE 754):

Noktanın her zaman sıfırdan farklı en yüksek anlamlı sayının sağında olduğu kabul edilir.

İkili düzende çalışıldığına göre "0"dan farklı sayı "1"dir.

Örnek:

(normalizasyon)

$(10110.101)_2 \longrightarrow$ **1.**0110101x 2^4

Noktadan önce her zaman 1 olduğu bilindiğinden bu 1 değeri de bellekte tutulmaz.

Buna **gizli 1** (*hidden one*) denir.

Örnek:

$(+22.625)_{10}$ sayısı IEEE 754 32 bit formatında nasıl bellekte tutulur?

$(22)_{10} = (10110)_2$

.625'in 2 tabanındaki karşılığının bulunması:

2 x 0.625 = **1** + 0.25
2 x 0.25 = **0** + 0.5 ← Yüksek anlamlı bit
2 x 0.5 = **1** + 0

5/8

$\Rightarrow (0.625)_{10} = (0.101)_2$

Gizli 1. Bellekte tutulmaz.

Taban 2, bellekte tutulmaz.

$(+22.625)_{10} = (+10110.101)_2 = +1.0110101 \times 2^4$ (Normalize)

IEEE Single:

0	10000011	0110101...000

İşaret: + | Yükseltilmiş üs: 4 + 127 = 131 | Kesir (Mantis)

Mantisin düşük anlamlı bitleri "0" ile doldurulduu. Çünkü solunda nokta (.) var.

1 bit 8 bit 23 bit

Sayının 10 tabanındaki değeri (N):

Single: $N = (-1)^S (1.F) 2^{E-127}$ $\quad N = (-1)^S (1 + \frac{F}{2^{23}}) 2^{E-127}$

Double: $N = (-1)^S (1.F) 2^{E-1023}$ $\quad N = (-1)^S (1 + \frac{F}{2^{52}}) 2^{E-1023}$

Sıfır için özel bir gösterilim kullanılır: E=0 ve F=0 → N=0

Örnekler (*Single*):

S	E	F	Değer (Anlamı):
0	10010011	10100010000000000000000	= +1.1010001 x 2^{10100} = +1.6328125 x 2^{20}
1	10010011	10100010000000000000000	= - 1.1010001 x 2^{10100} = -1.6328125 x 2^{20}
0	01101011	10100010000000000000000	= +1.1010001 x 2^{-10100} = +1.6328125 x 2^{-20}
1	01101011	10100010000000000000000	= - 1.1010001 x 2^{-10100} = -1.6328125 x 2^{-20}

81/128

E (üs) ve F(mantis) özel değerleri:

1. E = 0 ve F = 0 → N = 0 İki tane sıfır var (+,-)
2. E = 255 , F = 0 → N = ±∞
3. E = 255, F ≠ 0 → NaN (*Not a Number*) 0/0 , ∞/∞
4. E = 0, F ≠ 0 → Normalize olmayan sayı

Son durum normalize olarak gösterilemeyen mutlak değeri çok küçük sayılar için kullanılır.

Normalize olmayan sayılar:

Normalize yapı ile mutlak değeri çok küçük olan sayıları göstermek mümkün değildir.

Normalize olarak gösterilebilecek en küçük sayı S =0, E = 0000 0001 , F = 000.... 0

$N = +(1+0)2^{1-127} = 2^{-126}$

0 ile 2^{-126} arasındaki sayılar normalize olarak gösterilemez.

Normalize olmayan biçim (E = 0, F ≠ 0) kullanılırsa sayının 10 tabanındaki değeri öncekinden farklı olarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

Single: $N = (-1)^S (\frac{F}{2^{23}}) 2^{-126}$ *Double*: $N = (-1)^S (\frac{F}{2^{52}}) 2^{-1022}$

Normalize olmayan en küçük sayı: S =0, E = 0000 0000 , F = 000.... 01

$N = +(1/2^{23})2^{-126} = 2^{-149}$

0 ile 2^{-149} arasındaki sayılar gösterilemez (*underflow*).

Sınır değerleri:

Mutlak değeri en küçük sayı:

Single: 2^{-149} (Denormalize) , Double: 2^{-1074} (Denormalize)

Mutlak değeri en büyük sayı:

Single: 0 11111110 11111111111111111111111 = $(2-2^{-23})x2^{127} \approx 10^{38.53}$ (Normalize)

Double: $(2-2^{-52})x2^{1023} \approx 10^{308.3}$ (Normalize)

Örnek: Kayan Noktalı Sayıların Toplanması ve Çıkartılması

Aritmetik İş Hattı

X= $A*2^a$

Y= $B*2^b$