Devre ve Sistem Analizi

Özkan Karabacak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
İstanbul Teknik Üniversitesi

5 Mayıs 2012

Outline

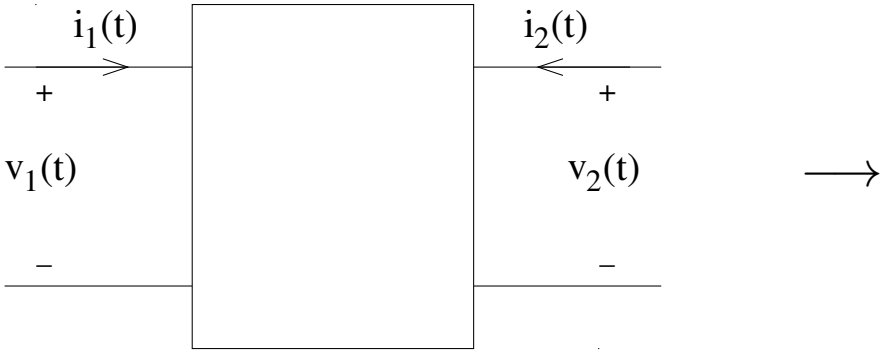
1. İki Kapılılar
   - Devre Parametreleri
   - Bağlantı Biçimleri
   - Resiprokluk Teoremi

Outline

1. İki Kapılılar
   - Devre Parametreleri
   - Bağlantı Biçimleri
   - Resiprokluk Teoremi

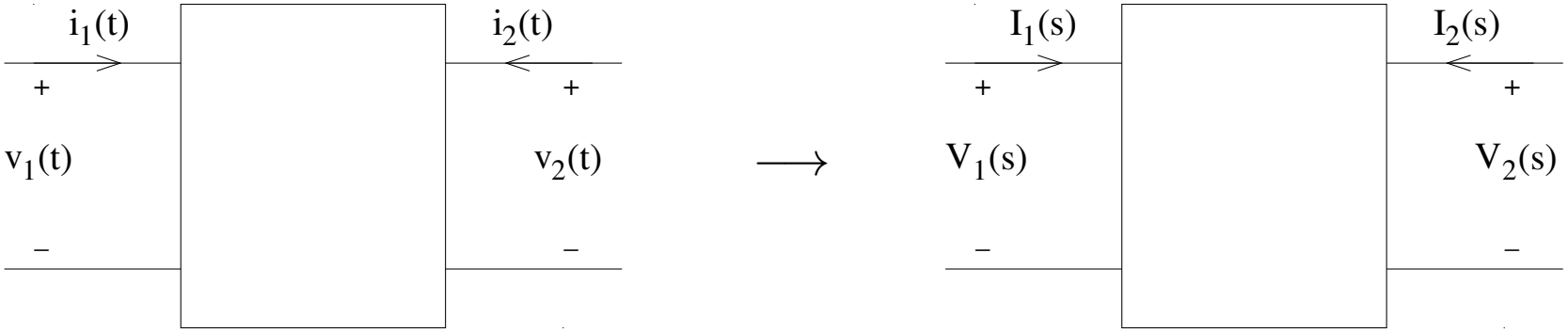
İki Kapılılar: Empedans ve Admitans Matrisleri

Lineer, zamanla değişmeyen ve kaynak içermeyen iki kapılı bir devre:



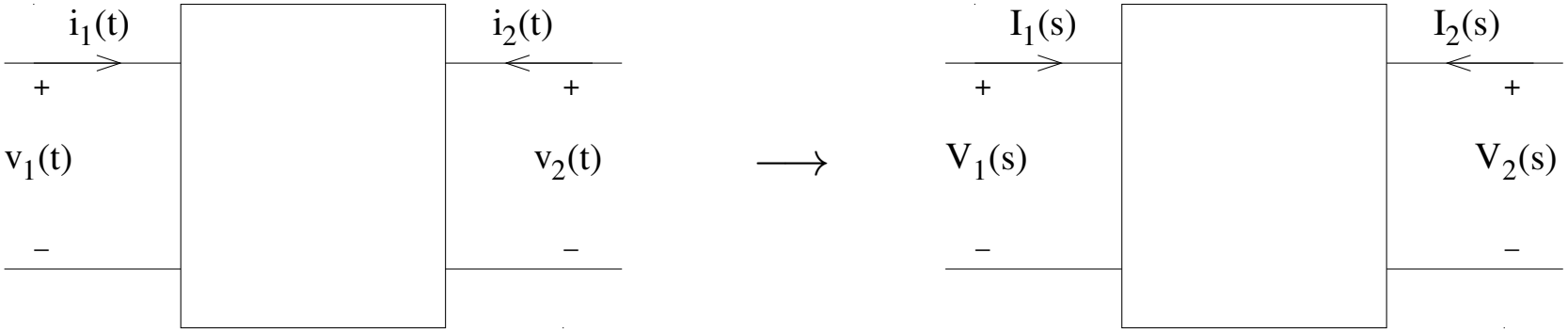
İki Kapılılar: Empedans ve Admitans Matrisleri

Lineer, zamanla değişmeyen ve kaynak içermeyen iki kapılı bir devre:



İki Kapılılar: Empedans ve Admitans Matrisleri

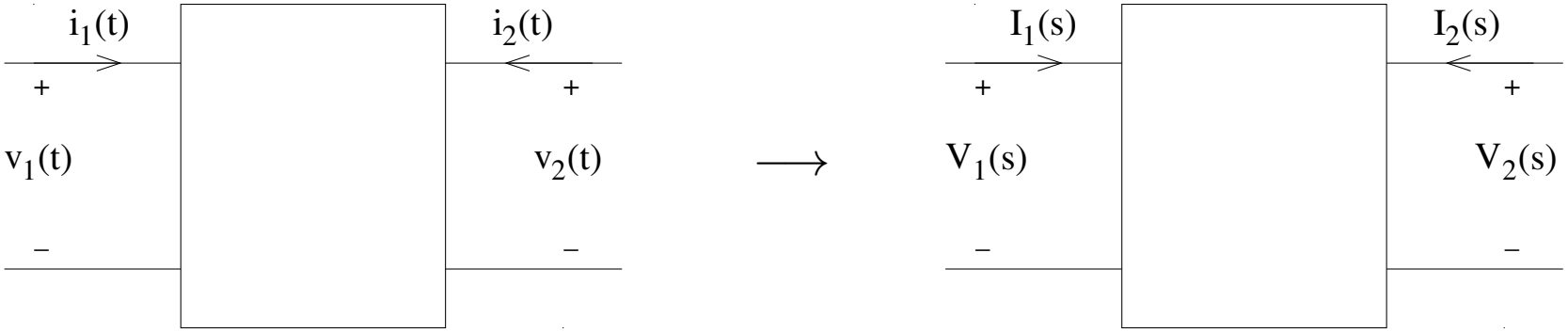
Lineer, zamanla değişmeyen ve kaynak içermeyen iki kapılı bir devre:



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İki Kapılılar: Empedans ve Admitans Matrisleri

Lineer, zamanla değişmeyen ve kaynak içermeyen iki kapılı bir devre:

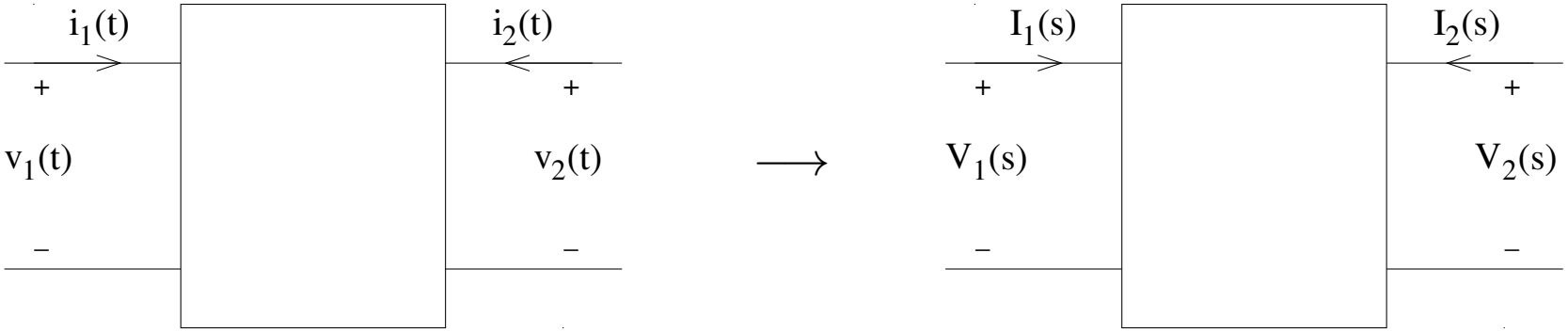


$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

İki Kapılılar: Empedans ve Admitans Matrisleri

Lineer, zamanla değişmeyen ve kaynak içermeyen iki kapılı bir devre:



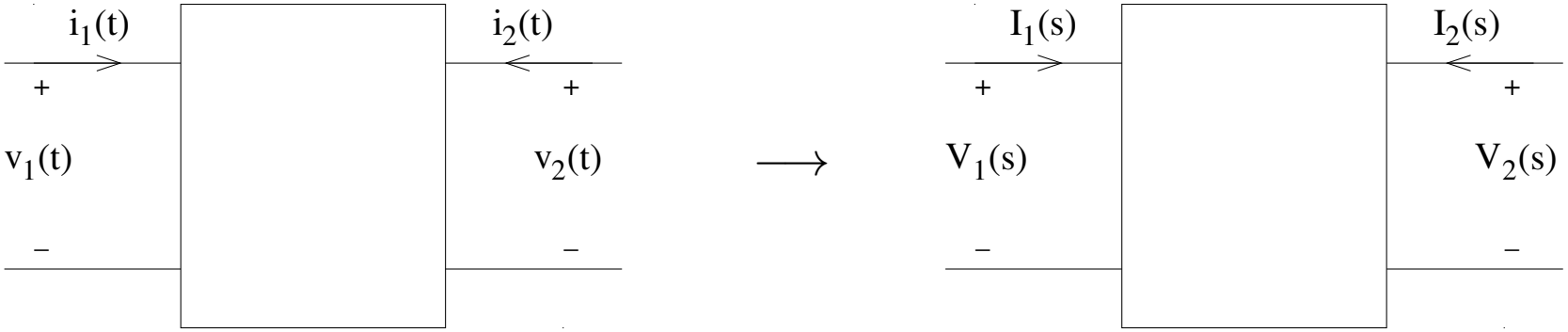
$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

- $\mathbf{M}$ tersinir ise $\mathbf{V} = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{I}$, yani $\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ şeklinde yazılabilir ve $\mathbf{Z} = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}$ matrisine açık devre empedans matrisi denir.

İki Kapılılar: Empedans ve Admitans Matrisleri

Lineer, zamanla değişmeyen ve kaynak içermeyen iki kapılı bir devre:



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

- $\mathbf{M}$ tersinir ise $\mathbf{V} = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{I}$, yani $\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ şeklinde yazılabilir ve $\mathbf{Z} = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N}$ matrisine açık devre empedans matrisi denir.
- $\mathbf{N}$ tersinir ise $\mathbf{I} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$, yani $\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V}$ şeklinde yazılabilir ve $\mathbf{Y} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{M}$ matrisine kısa devre admitans matrisi denir.

İki Kapılılar: Hibrid Matrisler

İki Kapılılar: Hibrid Matrisler

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

İki Kapılılar: Hibrid Matrisler

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İki Kapılılar: Hibrid Matrisler

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ tersinir ise $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$, yani $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir ve $H_1 = -\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ matrisine hibrit-1 matrisi denir.

İki Kapılılar: Hibrid Matrisler

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ tersinir ise $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$, yani $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir ve $H_1 = -\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ matrisine hibrit-1 matrisi denir.
- $\begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ tersinir ise $\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$, yani $\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = H_2 \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir ve $H_2 = -\begin{bmatrix} n_{11} & m_{12} \\ n_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ matrisine hibrit-2 matrisi denir.

İki Kapılılar: Hibrid Matrisleri

İki Kapılılar: Hibrid Matrisleri

$$H_2 = H_1^{-1}$$

İki Kapılılar: Hibrid Matrisleri

$$H_2 = H_1^{-1}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

İki Kapılılar: Hibrid Matrisleri

$$H_2 = H_1^{-1}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

İki kapılılar: Zincir(Transmisyon) Matrisleri

İki kapılılar: Zincir(Transmisyon) Matrisleri

Hibrit matrislerine benzer şekilde tanımlanır:

İki kapılılar: Zincir(Transmisyon) Matrisleri

Hibrit matrislerine benzer şekilde tanımlanır: Zincir-1 Matrisi:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

İki kapılılar: Zincir(Transmisyon) Matrisleri

Hibrit matrislerine benzer şekilde tanımlanır: Zincir-1 Matrisi:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Zincir-2 Matrisi:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{t}_{11} & \tilde{t}_{12} \\ \tilde{t}_{21} & \tilde{t}_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

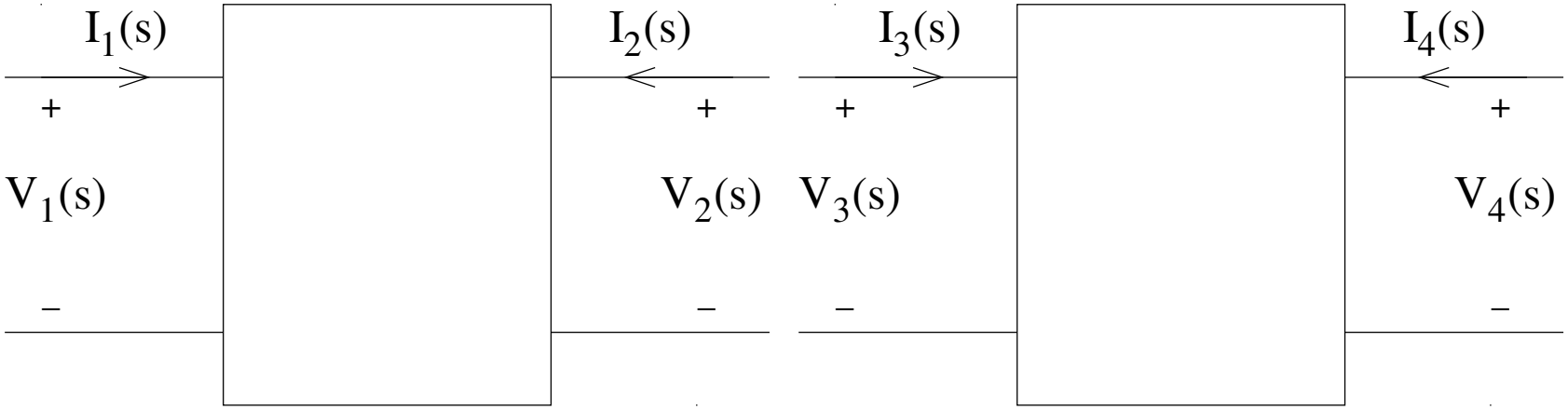
İki kapılılar: Zincir(Transmisyon) Matrisleri

Hibrit matrislerine benzer şekilde tanımlanır: Zincir-1 Matrisi:

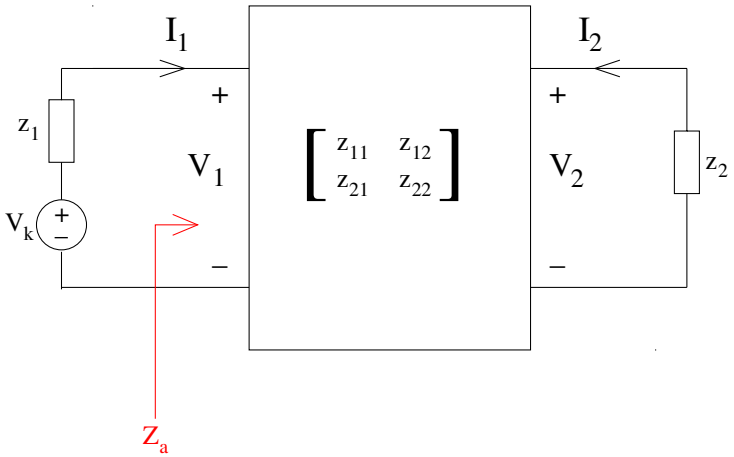
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Zincir-2 Matrisi:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{t}_{11} & \tilde{t}_{12} \\ \tilde{t}_{21} & \tilde{t}_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

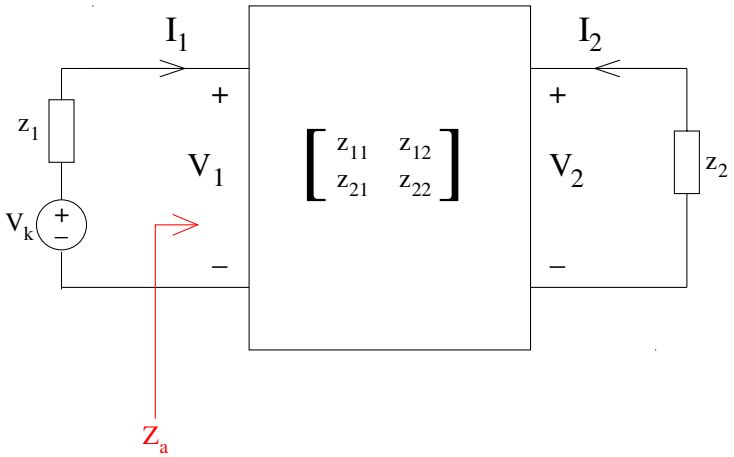


İki Kapılılar: Örnek



$H_{2k} = \frac{V_2}{V_k}$ gerilim transfer fonksiyonunu ve $Z_a = \frac{V_1}{I_1}$ empedans fonksiyonunu z_1, z_2 ve iki kapılıların z parametreleri cinsinden bulunuz.

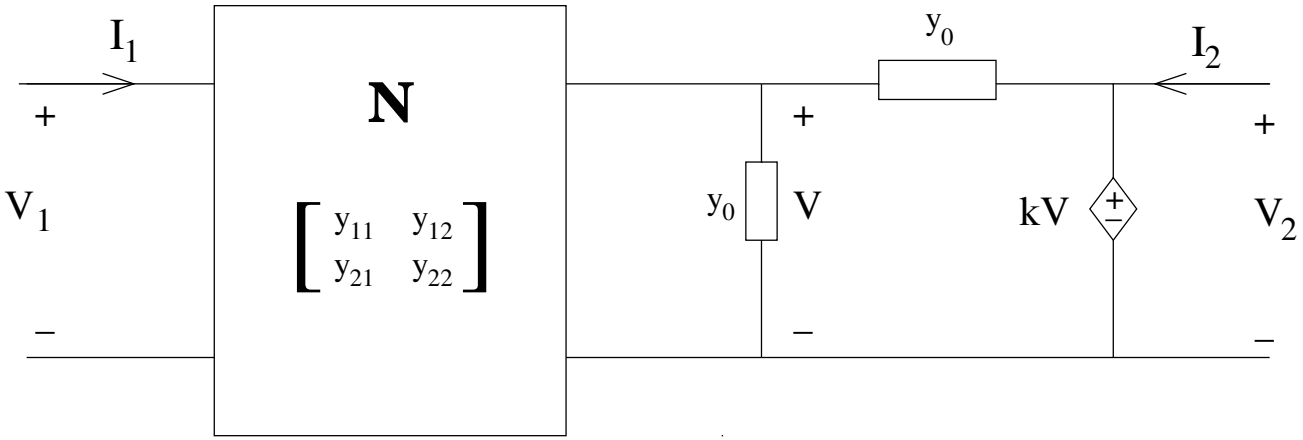
İki Kapılılar: Örnek



$H_{2k} = \frac{V_2}{V_k}$ gerilim transfer fonksiyonunu ve $Z_a = \frac{V_1}{I_1}$ empedans fonksiyonunu z_1, z_2 ve iki kapılıların z parametreleri cinsinden bulunuz.

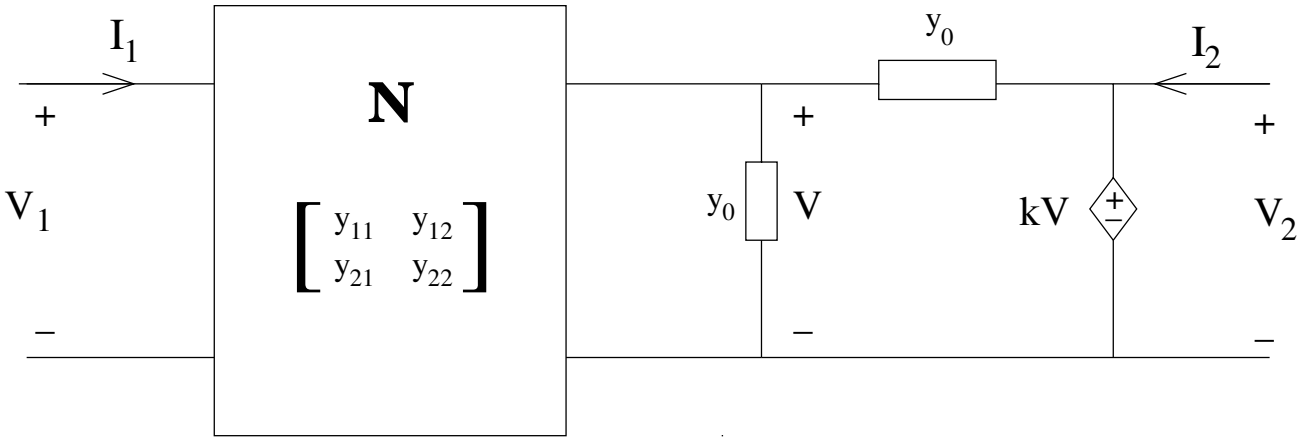
Cevap:
$Z_a = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}+z_2}$, $H_{2k} = \frac{z_{21}z_2}{(z_{11}+z_1)(z_{22}+z_2)-z_{12}z_{21}}$

İki Kapılılar: Örnek



Yukarıdaki iki kapılı için $H = \frac{V_2}{V_1}$ gerilim transfer fonksiyonunu bulunuz:

İki Kapılılar: Örnek



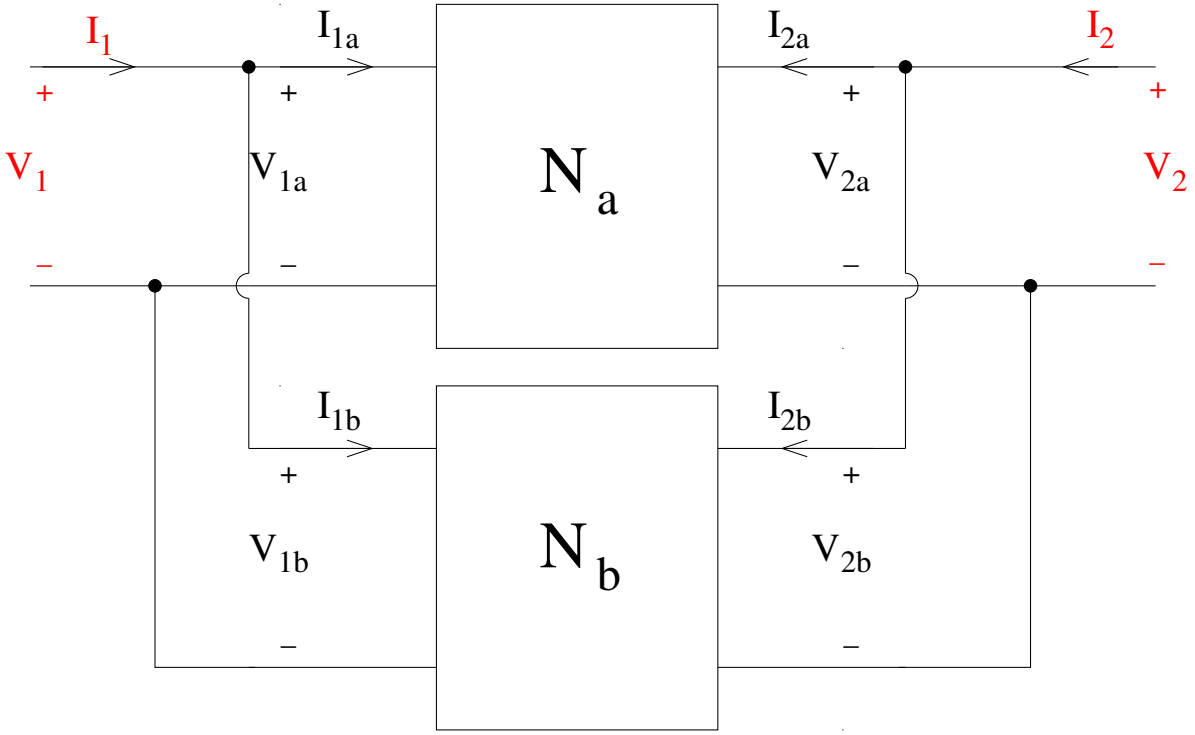
Yukarıdaki iki kapılı için $H = \frac{V_2}{V_1}$ gerilim transfer fonksiyonunu bulunuz:

Cevap: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{-ky_{21}}{y_{22}+y_0(2-k)}$

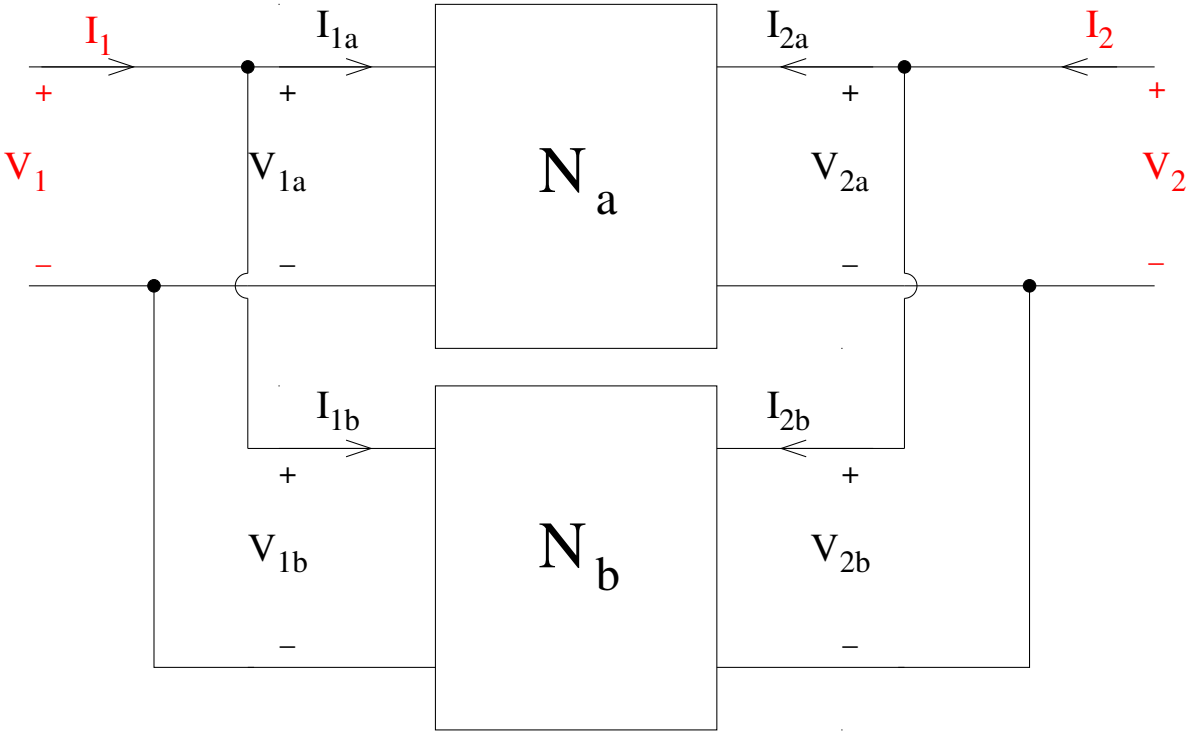
Outline

1. İki Kapılılar
   - Devre Parametreleri
   - Bağlantı Biçimleri
   - Resiprokluk Teoremi

İki Kapılılar: Paralel-Paralel Bağlantı



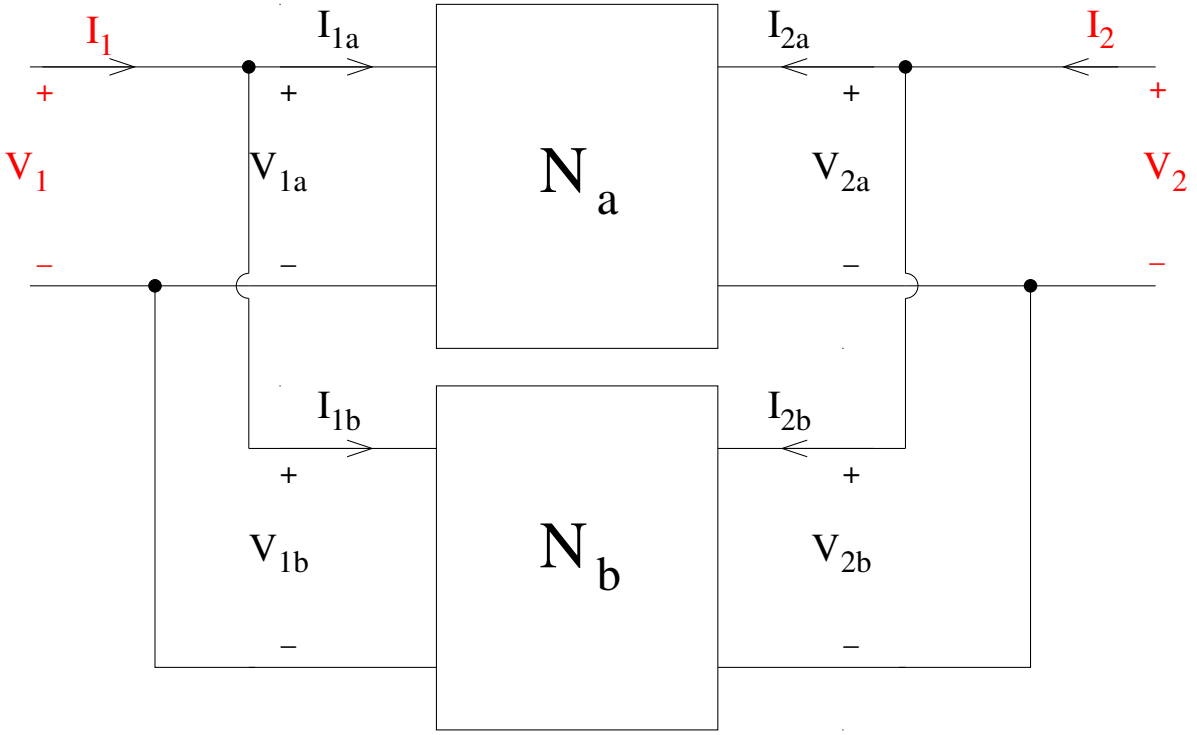
İki Kapılılar: Paralel-Paralel Bağlantı



$$V_1 = V_{1a} = V_{1b}$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$

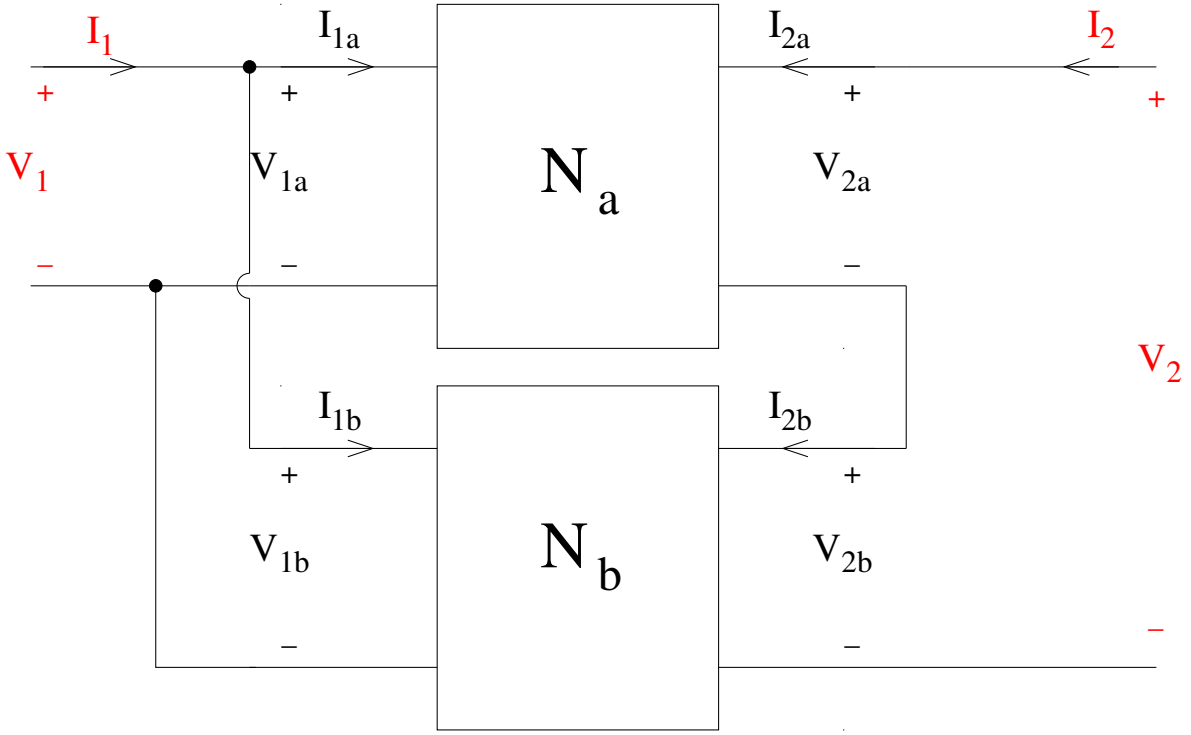
İki Kapılılar: Paralel-Paralel Bağlantı



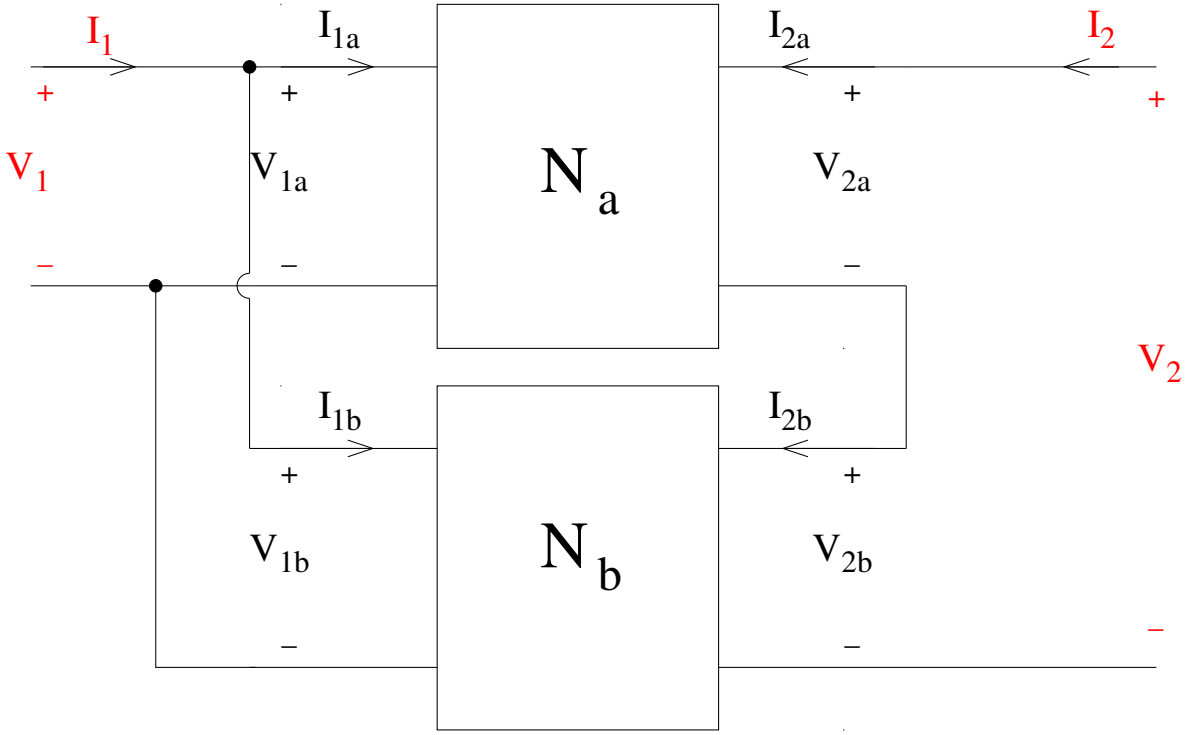
$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \qquad V_2 = V_{2a} = V_{2b}$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} \qquad I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

İki Kapılılar: Paralel-Seri Bağlantı



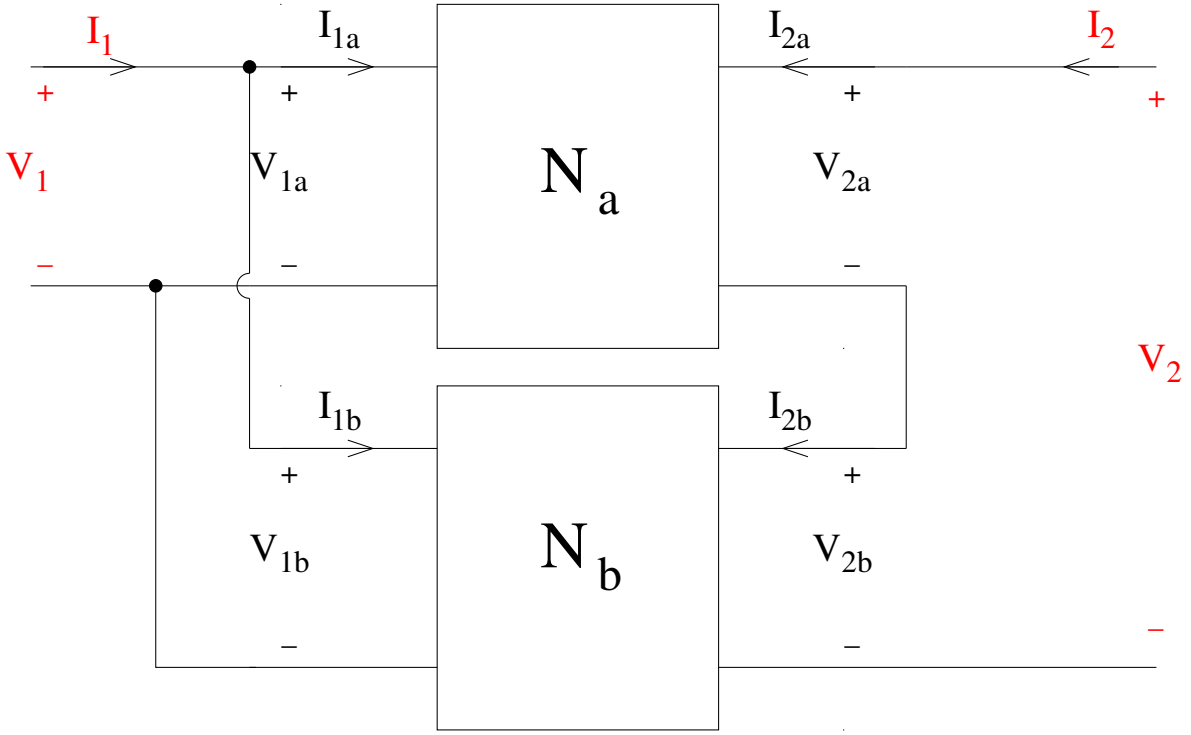
İki Kapılılar: Paralel-Seri Bağlantı



$$V_1 = V_{1a} = V_{1b}$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$

İki Kapılılar: Paralel-Seri Bağlantı



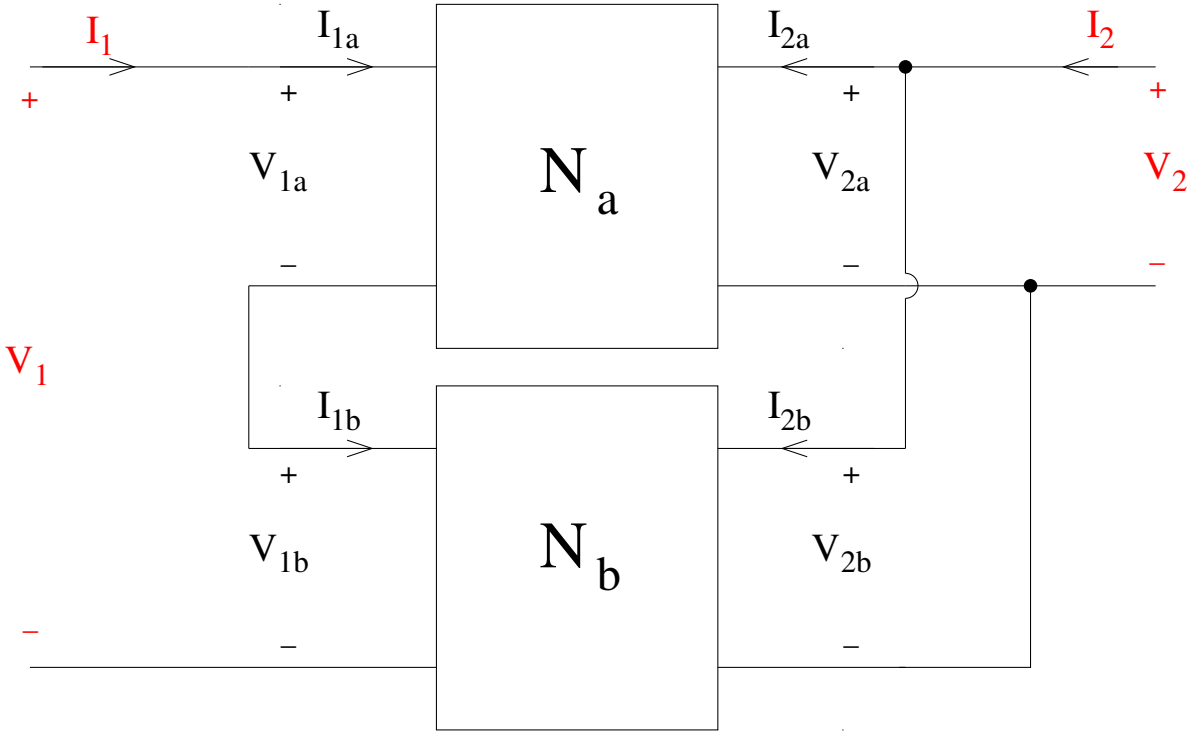
$$V_1 = V_{1a} = V_{1b}$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$

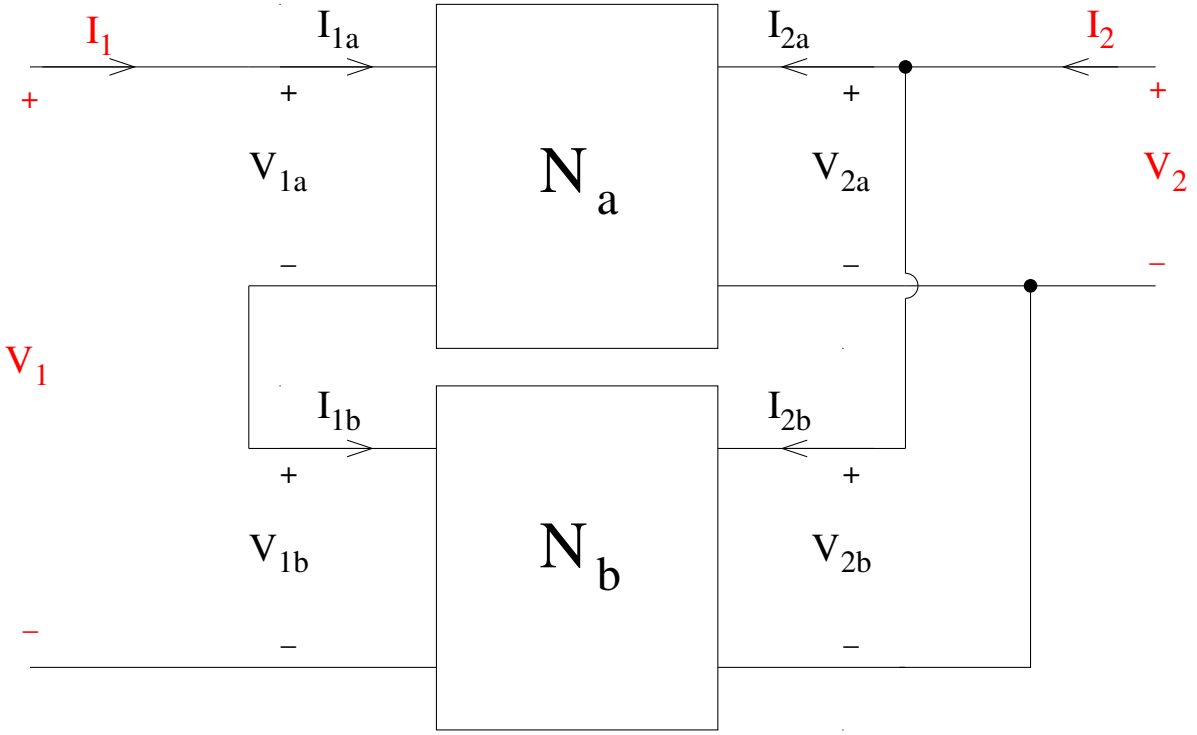
$$V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

$$I_2 = I_{2a} = I_{2b}$$

İki Kapılılar: Seri-Paralel Bağlantı



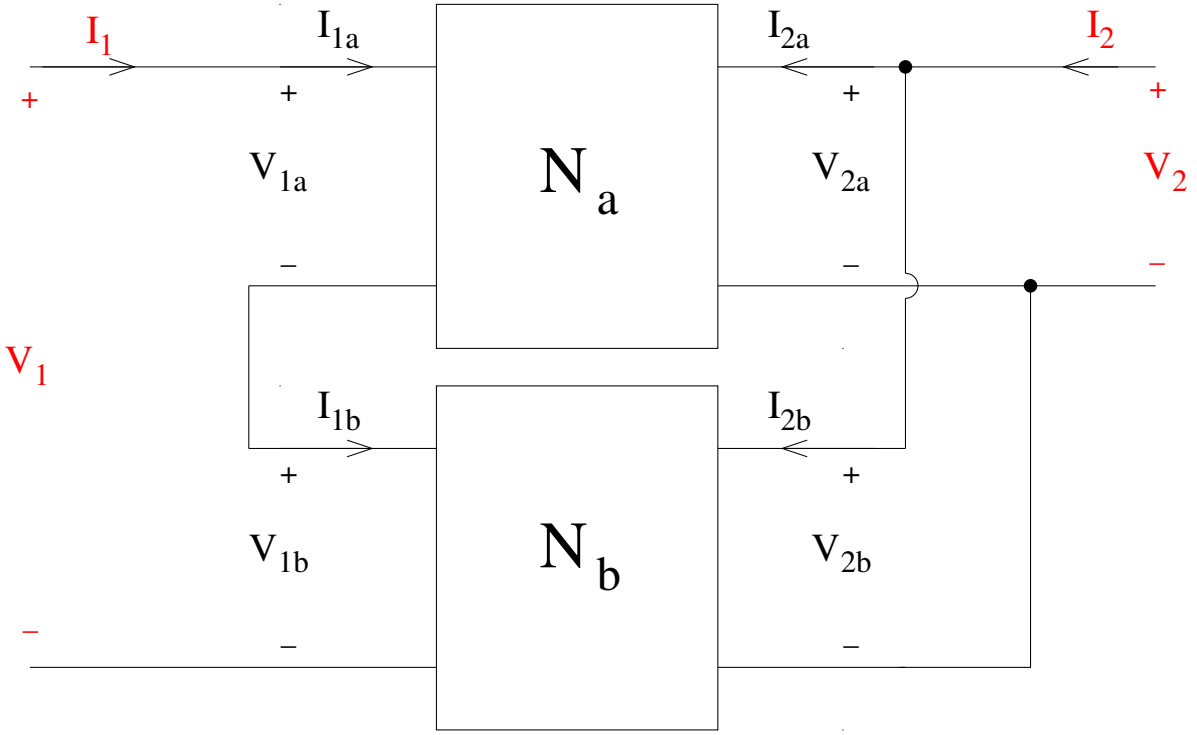
İki Kapılılar: Seri-Paralel Bağlantı



$$V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}$$

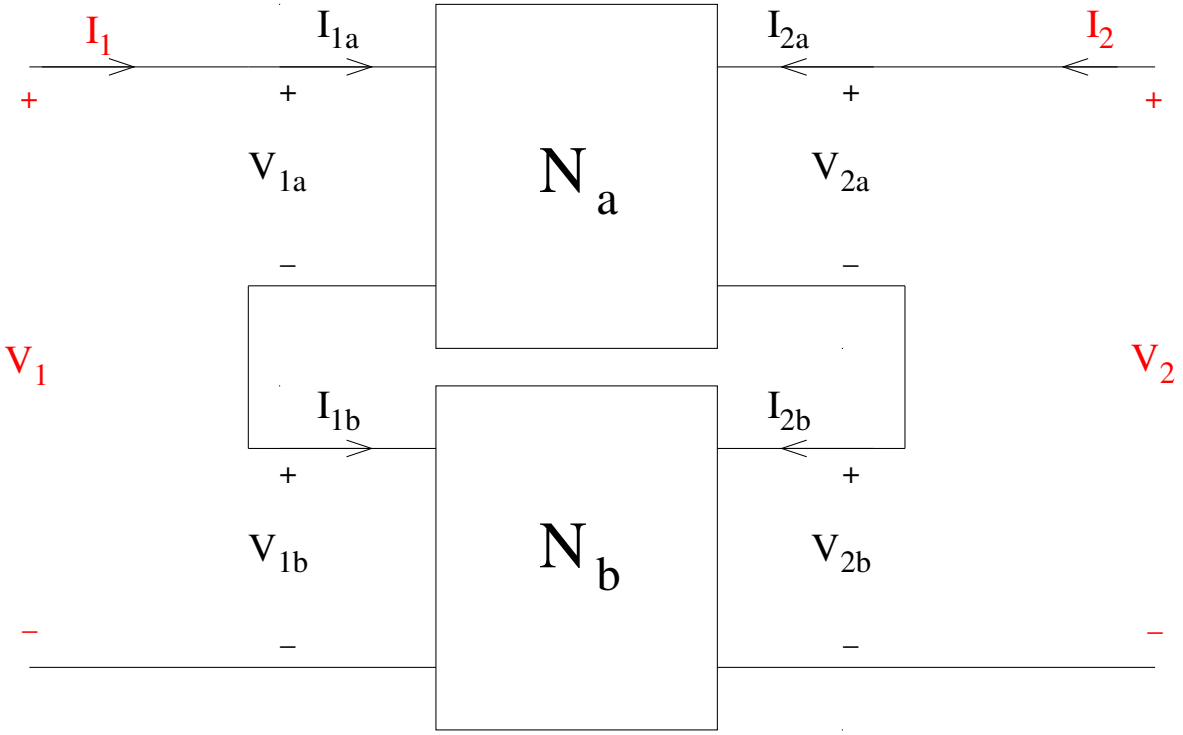
İki Kapılılar: Seri-Paralel Bağlantı



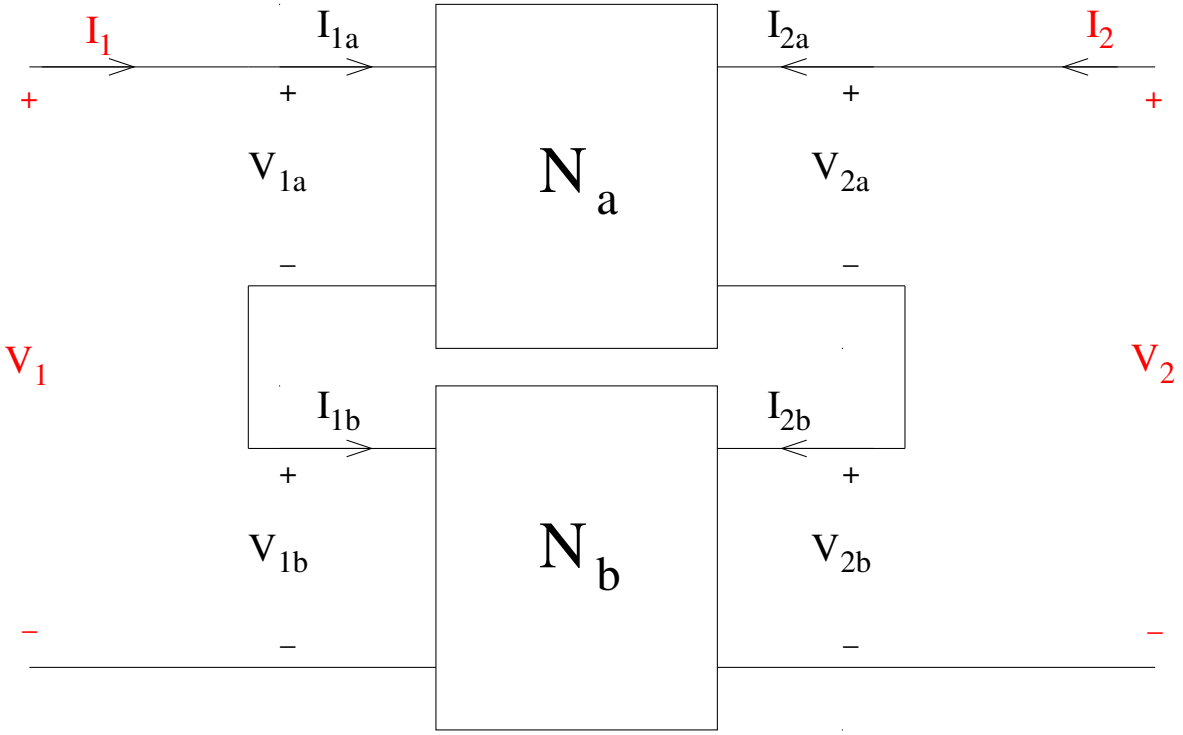
$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} \qquad V_2 = V_{2a} = V_{2b}$$

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \qquad I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

İki Kapılılar: Seri-Seri Bağlantı



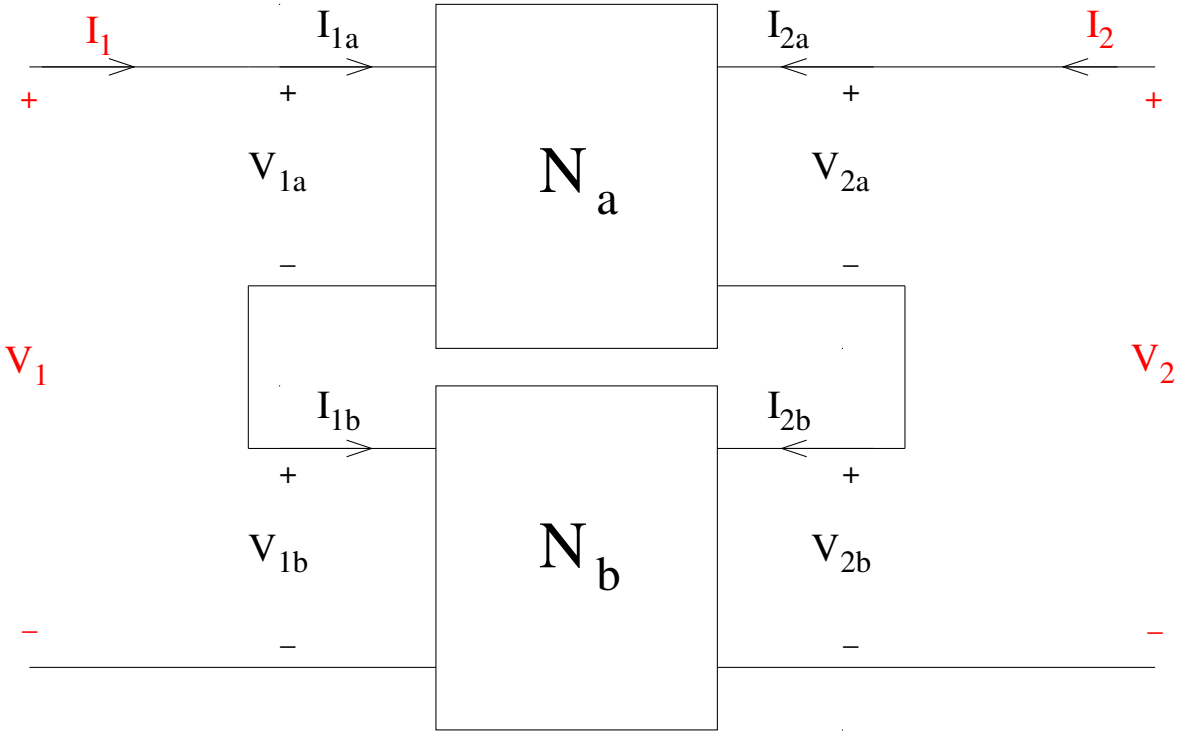
İki Kapılılar: Seri-Seri Bağlantı



$$V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}$$

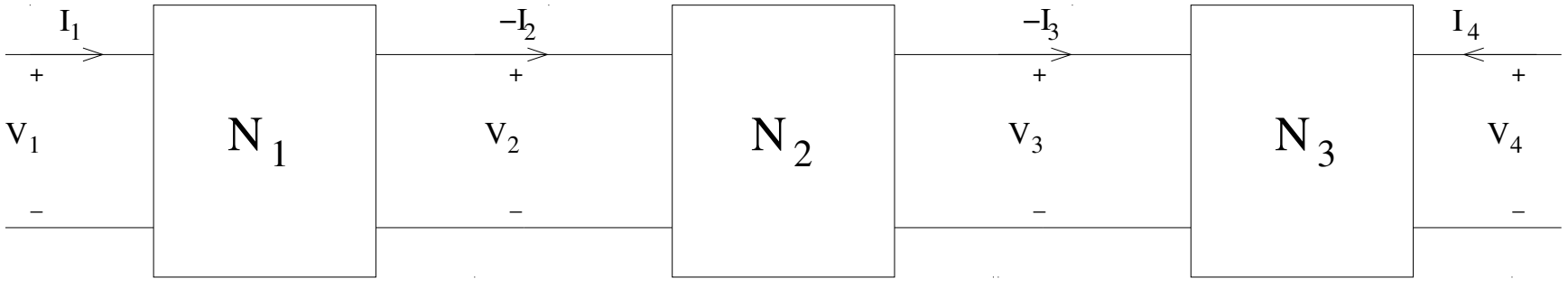
İki Kapılılar: Seri-Seri Bağlantı



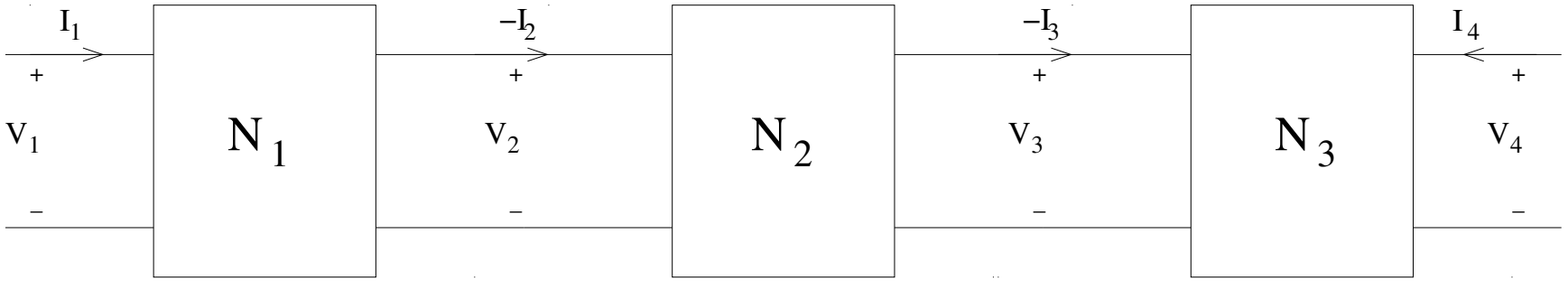
$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} \qquad V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \qquad I_2 = I_{2a} = I_{2b}$$

İki Kapılılar: Kaskad Bağlantı

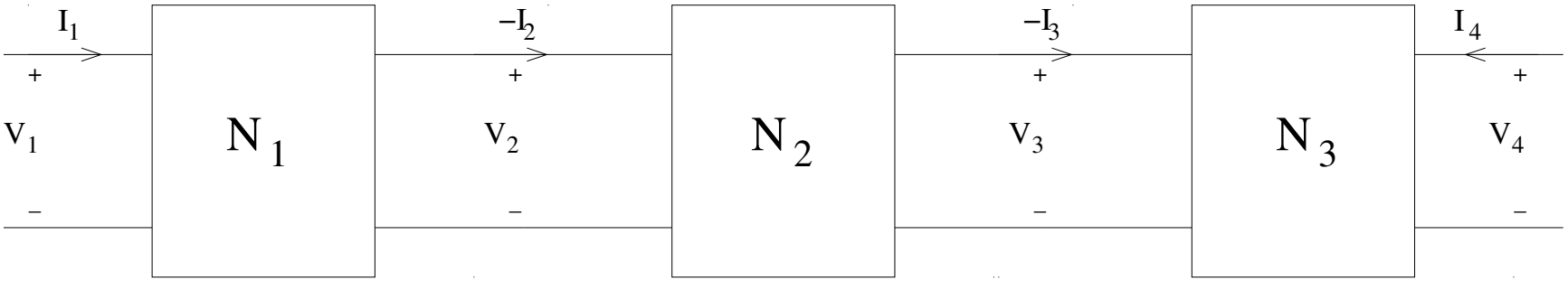


İki Kapılılar: Kaskad Bağlantı



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T_1} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T_1 T_2} \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T_1 T_2 T_3} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

İki Kapılılar: Kaskad Bağlantı



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T_1} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T_1 T_2} \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T_1 T_2 T_3} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{T_1 T_2 T_3}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

Outline

1. İki Kapılılar
   - Devre Parametreleri
   - Bağlantı Biçimleri
   - Resiprokluk Teoremi

İki Kapılılar: Resiprokluk Teoremi

İki Kapılılar: Resiprokluk Teoremi

Tanım (Resiprok iki kapılı)

SSH'de incelenen (yani ilk koşullar sıfır) lineer ve zamanla değişmeyen bir devre yalnızca direnç, kapasite, endüktans iki uçlularını ve ortak endüktans, ideal transformatör iki kapılılarını içeriyorsa, devreye resiprok devre denir.

İki Kapılılar: Resiprokluk Teoremi

Tanım (Resiprok iki kapılı)

SSH'de incelenen (yani ilk koşullar sıfır) lineer ve zamanla değişmeyen bir devre yalnızca direnç, kapasite, endüktans iki uçlularını ve ortak endüktans, ideal transformatör iki kapılılarını içeriyorsa, devreye resiprok devre denir.

Teorem (Resiprokluk Teoremi)

Resiprok bir iki kapılının devre parametreleri aşağıdaki koşulları sağlar:

İki Kapılılar: Resiprokluk Teoremi

Tanım (Resiprok iki kapılı)

SSH'de incelenen (yani ilk koşullar sıfır) lineer ve zamanla değişmeyen bir devre yalnızca direnç, kapasite, endüktans iki uçlularını ve ortak endüktans, ideal transformatör iki kapılılarını içeriyorsa, devreye resiprok devre denir.

Teorem (Resiprokluk Teoremi)

Resiprok bir iki kapılının devre parametreleri aşağıdaki koşulları sağlar:

$$z_{12} = z_{21} \qquad h_{12} = -h_{21}$$
$$y_{12} = y_{21} \qquad \tilde{h}_{12} = \tilde{h}_{21}$$

$$\det(T) = \det(\tilde{T}) = 1$$

İki Kapılılar: Resiprokluk Teoremi

Tanım (Resiprok iki kapılı)

SSH'de incelenen (yani ilk koşullar sıfır) lineer ve zamanla değişmeyen bir devre yalnızca direnç, kapasite, endüktans iki uçlularını ve ortak endüktans, ideal transformatör iki kapılılarını içeriyorsa, devreye resiprok devre denir.

Teorem (Resiprokluk Teoremi)

Resiprok bir iki kapılının devre parametreleri aşağıdaki koşulları sağlar:

$$z_{12} = z_{21} \qquad h_{12} = -h_{21}$$
$$y_{12} = y_{21} \qquad \tilde{h}_{12} = \tilde{h}_{21}$$

$$\det(T) = \det(\tilde{T}) = 1$$

Zaman tanım bölgesindeki anlamı nedir?