

Dinamik Sistem

Önce lineer dinamik sistemleri durum denklemleri ile ifade ettik ...

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

durum değişkeni $\rightarrow$ $x'(t)$ $\leftarrow$ ilk koşul $x(t_0)$
çıkış değişkeni $\rightarrow$ $y(t)$ $\leftarrow$ giriş değişkeni $u(t)$

$$x \in \dots\dots\dots y \in \dots\dots\dots u \in \dots\dots\dots$$

Bu sistemin çözümü.....

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Bir özel hal: $x'(t) = Ax(t)$ ← Otonom sistem

Çözümü bir daha yazarsak

özvektörler

$$x(t) = e^{\lambda_1(t-t_0)} S_1 x_1(t_0) + e^{\lambda_2(t-t_0)} S_2 x_2(t_0) + \dots e^{\lambda_n(t-t_0)} S_n x_n(t_0)$$

özdeğerler

Çözüm, özvektörler ve özdeğerler ile nasıl değişir

.....

Özvektörleri aynı özdeğerleri farklı iki sistem

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

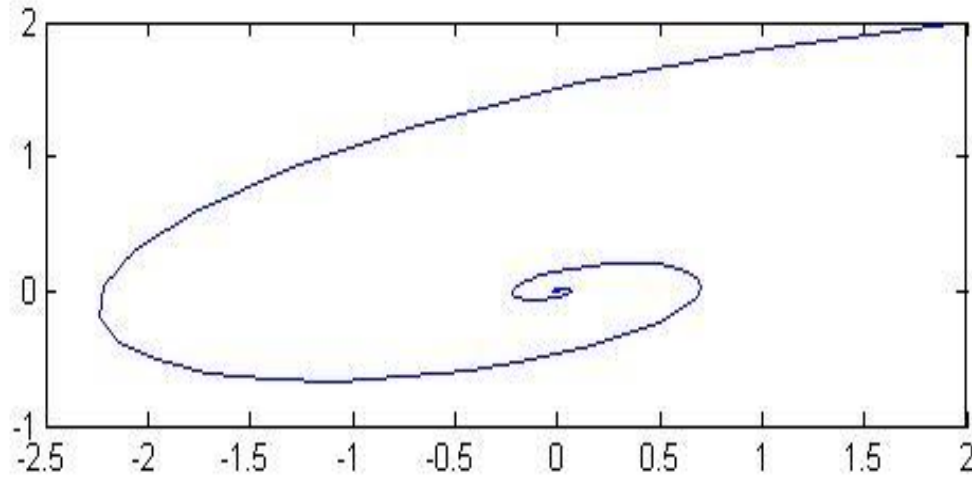
$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= -1 - 2i & \lambda_{21} &= -3 - 2i \\ \lambda_{12} &= -1 + 2i & \lambda_{22} &= -3 + 2i \end{aligned}$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 - 0.3651i \end{bmatrix} \quad S_{21} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 - 0.3651i \end{bmatrix}$$

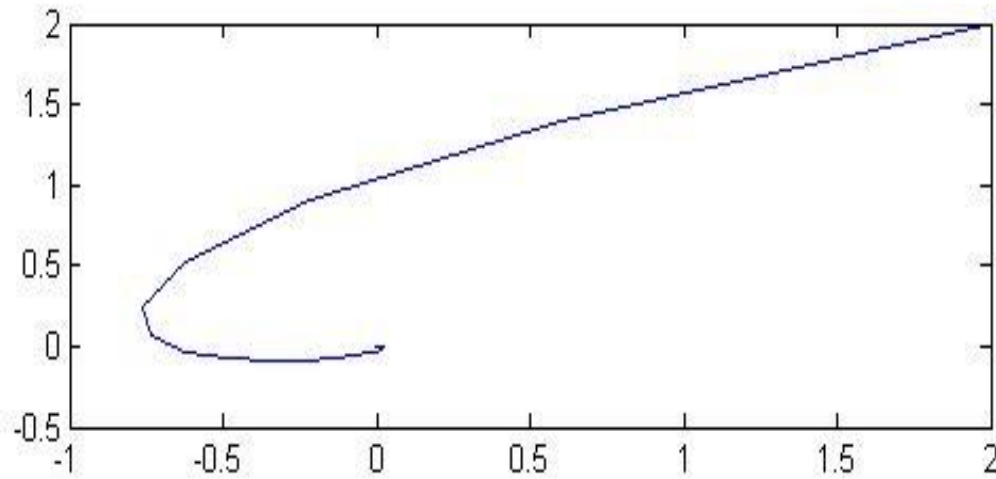
$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 + 0.3651i \end{bmatrix} \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 + 0.3651i \end{bmatrix}$$

Hangisi daha hızlı sıfıra yaklaşıyor ?

A1
sistemi



A2
sistemi



Özdeğerleri aynı özvektörleri farklı iki sistem

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -5 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 \\ 5 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{11} = -0.25 + 2.235i$$

$$\lambda_{21} = -0.25 + 2.235i$$

$$\lambda_{12} = -0.25 - 2.235i$$

$$\lambda_{22} = -0.25 - 2.235i$$

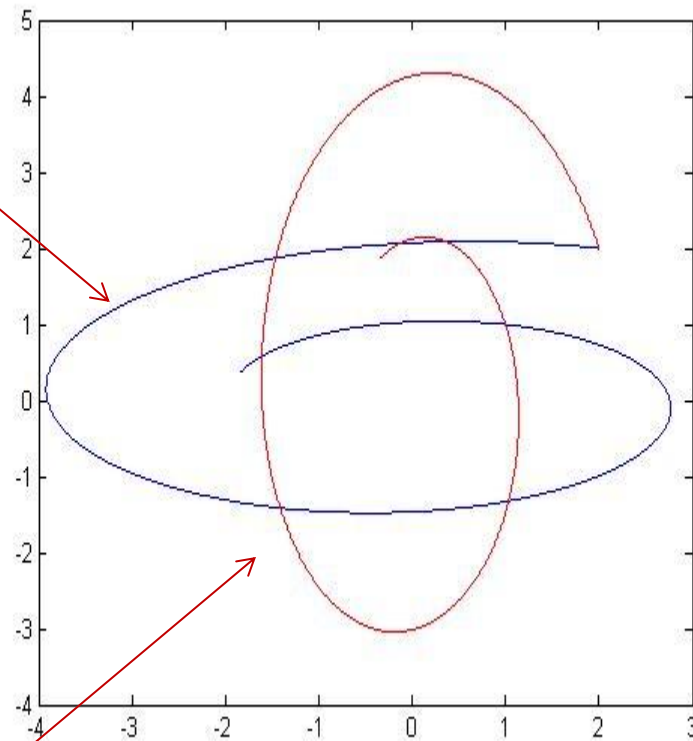
$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.9125 \\ 0.0051 + 0.4081i \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0.0051 + 0.4081i \\ 0.9125 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0.9125 \\ 0.0051 - 0.4081i \end{bmatrix}$$

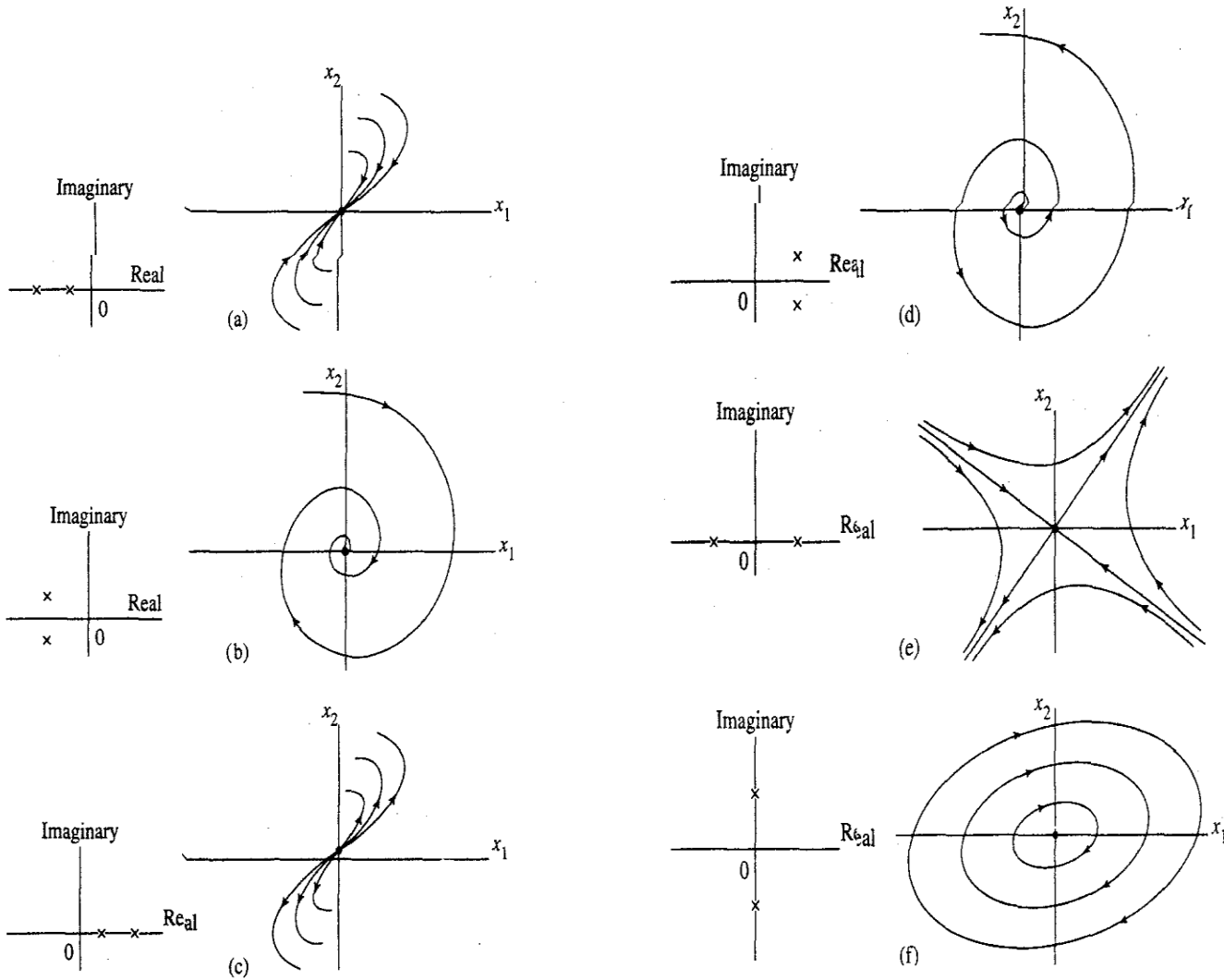
$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0.0051 - 0.4081i \\ 0.9125 \end{bmatrix}$$

B1 sistemi



B2 sistemi

Bu durumda lineer sistemin çözümleri neler olabilir?



Tüm bu durum portrelerinde ortak bir şey var, ne?

Dinamik sistemin özel bir çözümü: Denge noktası

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = Ax(t) \rightarrow & 0 = Ax_d \\ \dot{x}(t) = f(x(t)) \rightarrow & 0 = f(x_d) \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Kaç tane denge} \\ \text{noktası olabilir?} \end{array}$$

Sistemin davranışını incelemenin bir yolu kararlılığını incelemektir.

Tanım: Lyapunov anlamında kararlılık

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemine ilişkin bir denge noktası x_d olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

eşitsizliği

$$\begin{array}{l} \|x(0) - x_d\| < \delta(\varepsilon) \\ \|x(t) - x_d\| < \varepsilon \end{array}$$

eşitsizliğini gerektirecek şekilde bir $\delta(\varepsilon)$ bulunabiliyorsa x_d denge noktası Lyapunov anlamında kararlıdır.

Lineer sistemlerde denge noktasının Lyapunov anlamında kararlılığını incelemek için ne yapılıyor?

Denge noktasının kararlılığı neye denk, neden?

Norm

V vektör uzayı olmak üzere, aşağıdaki dört özelliği sağlayan fonksiyon $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ normdur

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$