İleri Yöneylem Araştırması Uygulamaları
Doğrusal Programlama

Dr. Özgür Kabak

2020-2021 Güz

Matematiksel Programlama

- Matematiksel programlama:
  - Karar vermeye destek olmak için matematiksel –optimizasyon– modelleri kullanmaktır.

- Matematiksel program aşağıdaki gibi bir optimizasyon problemidir:
- Maks $\{ f(x): x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0 \}$
  - X; R^n ‘nin alt kümesi ve *f*, *g*, ve *h* fonksiyonlarının reel uzaya eşleşen tanım kümesidir.
  - $x \in X, g(x) \leq 0$ ve $h(x) = 0$ ilişkileri kısıtlardır
  - *f*; amaç fonksiyonudur.

- Kaynak: http://glossary.computing.society.informs.org/

Doğrusal Programlama (DP)

- $c_1x_1 + c_2x_2 +,\ldots,+ c_nx_n$, amaç fonksiyonu
- $c_1, c_2,\ldots, c_n$, amaç fonksiyonu katsayıları – maliyet katsayıları
- $x_1, x_2,\ldots, x_n$, karar değişkenleri

b_i , sağ taraf değerleri

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Min} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & \\
\text{Öyle ki;} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & +\cdots+ & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
 & x_1, & & x_2, & \ldots, & x_n & \geq & 0.
\end{array}
$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, i ’nci kısıt

negatif olmama kısıtları (işaret kısıtlamaları)

a_{ij} , teknoloji katsayıları

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.
$$

- Tüm kısıtları sağlayan x_1 , $x_2, \ldots, x_n$, noktasına olurlu nokta veya olurlu çözüm denir.
- Kısıtları sağlayan tüm noktaların birleşimine olurlu bölge veya olurlu uzay denir.

Doğrusal Programlama Örneği

- Bir otomotiv firması 5 farklı karoseri üretmektedir.
- Ürünlerin üretiminde 4 farklı kaynak kullanılmaktadır: İşçilik (her vardiyada 50 işçi), Kaynak (2 atölye), boru imalatı (2 atölye), sac imalatı (3 atölye).
- Ürünlerin birim kar değerleri ve üretimlerinde kullanılan kaynak miktarları tabloda verilmiştir.
- Buna göre bir aylık dönem (8 saatlik 2 vardiyada 22 işgünü) için üretim planını çıkarmak üzere DP modelini kurunuz.

	İşçilik (saat)	Kaynak (saat)	Boru iml.(saat)	Sac iml. (saat)	Kar (TL)
Karoser 1	1700	50	60	105	**5000**
Karoser 2	2000	80	75	140	**6000**
Karoser 3	2100	90	85	110	**6300**
Karoser 4	1500	60	65	85	**4600**
Karoser 5	1850	80	90	100	**5200**

- Maks $5x_1 + 6x_2 + 6.3x_3 + 4.6x_4 + 5.2x_5$
- Öyle ki;
- $1.7x_1 + 2x_2 + 2.1x_3 + 1.5x_4 + 1.85x_5 \leq 17.6$
- $50x_1 + 80x_2 + 90x_3 + 60x_4 + 80x_5 \leq 704$
- $60x_1 + 75x_2 + 85x_3 + 65x_4 + 90x_5 \leq 704$
- $105x_1 + 140x_2 + 110x_3 + 85x_4 + 100x_5 \leq 1056$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Doğrusal Programlama

- Tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- Tek bir amaç vardır
  - enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize)
- Amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir (örneğin 24, 0, $4x$, $6y$ *doğrusal* terimlerdir fakat xy, x^2 *doğrusal değildir*).

- Bu üç koşulu sağlayan herhangi bir formülasyon bir "Doğrusal Program"dır (DP; linear program - LP).

DP’nin varsayımları

- Oransallık - *Proportionality*
- Toplanabilirlik - *Additivity*
- Bölünebilirlik - *Divisibility*
- Kesinlik - *Deterministic*

Doğrusal Programlama

- DP'ler önemlidir çünkü:
  - çok sayıda sorun DP olarak formüle edilebilir
  - "Simpleks algoritması" kullanılarak DP'ler çözülebilir ve en iyi çözüm bulunabilir

Doğrusal Programlama Modellerinin Kurulması

- Amaç fonksiyonunun tanımlanması
  - Bir kısıtlar kümesi verildiğinde (olurlu bölge) farklı amaçların çoğu zaman farklı en iyi çözümleri vardır.
- Amaç fonksiyonu tanımları
  - Kar enbüyükleme
  - Maliyet enküçükleme
  - Fayda enbüyükleme
  - Ciro enbüyükleme
  - Yatırım geri dönüş oranı enbüyükleme
  - Net şimdiki değer enbüyükleme
  - Çalışan sayısı enbüyükleme (enküçükleme)
  - Fazlalıkları enküçükleme
  - Müşteri memnuniyetini enbüyükleme
  - Hayatta kalma olasılığını enbüyükleme
  - Üretim planı gürbüzlüğünü (robustness) enbüyükleme

Amaç fonksiyonu

- Tek amaç
- Birden çok ve çelişen amaçlar
- MiniMaks amaçlar

$$Min\ (\max_i \sum_j a_{ij} x_j)$$

- Oransal amaçlar

$$\max_{(veya\ \mathrm{Min})} \frac{\sum_j a_j x_j}{\sum_j b_j x_j}$$

- Bulunmayan veya eniyilenmeyecek amaçlar

Kısıtlar

- Üretim kapasitesi kısıtları
- Hammadde bulunabilirliği
- Talep ve pazar sınırlamaları
- Malzeme dengeleme (üretim sürecindeki devamlılık) kısıtları
- Kalite şartları
- Kesin ve esnek kısıtlar
- Birbiriyle çelişen kısıtlar
- Gereksiz kısıtlar
- Olağan dışı kısıtlar

İyi bir model nasıl kurulur?

- Modelin anlaşılma kolaylığı (Örnek: Klasik stok/fazla mesai problemi)
- Modeldeki hataların tespit edilmesi
- Çözme kolaylığı

- Model formülasyonu
- Birim kullanımı

Örnek: Klasik stok/fazla mesai problemi

- Talepler: 40, 60, 75, 35
- Normal mesai üretim maliyeti: 400 TL
- Fazla mesai üretim maliyeti: 450 TL
- Normal mesai kapasite: 50 adet/ay
- Stok bulundurma maliyeti: 20 TL/ay

Yapısal Matematiksel Programlama Modelleri

- **Çok tesisli üretim modeli**
- Bir firmanın iki fabrikası vardır: A ve B. Her fabrikada iki ürün üretilir: Standart ve Lüks. Bir birim standart üründen 10 TL, bir birim lüks üründen 15 TL kar elde edilir.
- Ürünlerin imalatında taşlama ve cilalama işlemleri yapılmalıdır. A fabrikasının haftalık 80 saat taşlama, 60 saat cilalama kapasitesi mevcuttur. B fabrikası için bu değerler 60 ve 75 saattir.
- Ayrı her bir ürün 4 kg. hammadde kullanılarak imal edilir. Firmanın haftalık 120 kg. hammadde kapasitesi vardır.
- Başlangıç olarak, bu kapasiteden A fabrikasına 75 kg., B fabrikasına 45 kg. ayrıldığını varsayalım.
- Ürünlerin imalatında kullanılan taşlama ve cilalama saatleri tabloda verilmiştir.

	A Fabrikası		B Fabrikası	
	Standart	Lüks	Standart	Lüks
Taşlama	4	2	5	3
Cilalama	2	5	5	6

Çok tesisli üretim modeli

Factory A's Model

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & \text{Profit A} & 10x_1 + 15x_2 \\ \text{subject to} & \text{Raw A} & 4x_1 + 4x_2 \le 75, \\ & \text{Grinding A} & 4x_1 + 2x_2 \le 80, \\ & \text{Polishing A} & 2x_1 + 5x_2 \le 60, \\ & & x_1, x_2 \ge 0, \end{array}$$

Factory B's Model

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & \text{Profit B} & 10x_3 + 15x_4, \\ \text{subject to} & \text{Raw B} & 4x_3 + 4x_4 \le 45, \\ & \text{Grinding B} & 5x_3 + 3x_4 \le 60, \\ & \text{Polishing B} & 5x_3 + 6x_4 \le 75, \\ & & x_3, x_4 \ge 0, \end{array}$$

- A Fabrikası modeli en iyi çözümü:
  - Z = 225 TL, x1 = 11,25, x2= 7,5 , taşlama kapasitesi 20 birim kullanılmıyor.
- B Fabrikası modeli en iyi çözümü:
  - Z= 168,75, x3= 0, x4 = 11,25. taşlama kapasitesi 26,25, cilalama kapasitesi 7,5 artmıştır.

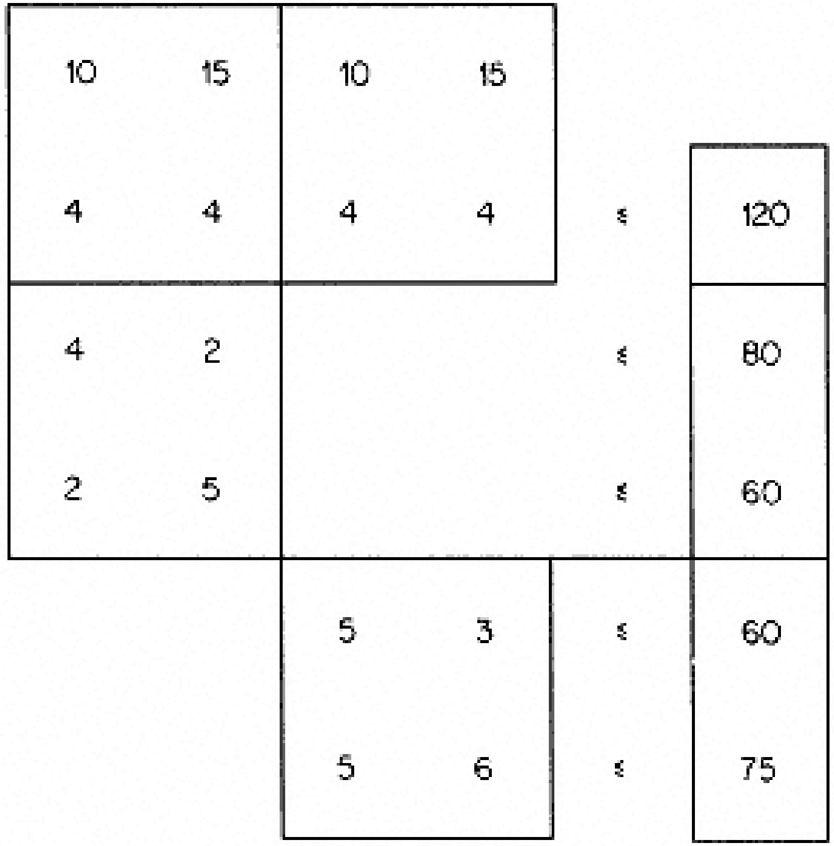
Çok tesisli üretim modeli

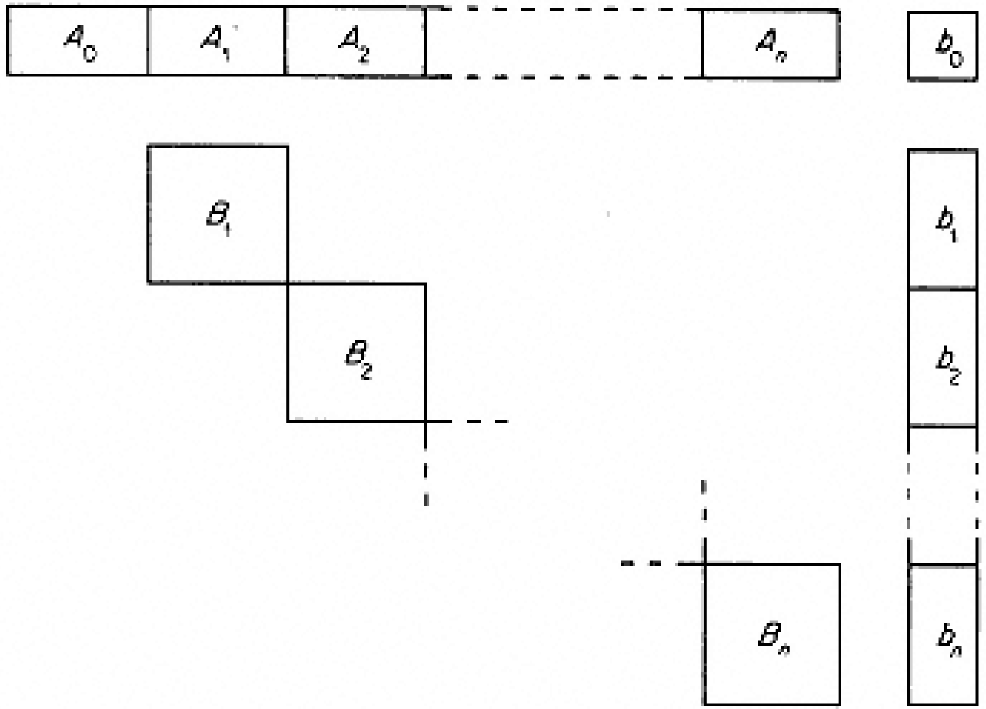
- Fabrikanın toplam karını en büyüklemek amaçlanırsa;
  - Toplam kullanılabilir hammadde miktarı 120 kg. olarak alınırsa;

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \text{Profit} & 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4 \\
\quad \text{subject to} & \text{Raw} & 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 120, \\
 & \text{Grinding A} & 4x_1 + 2x_2 \le 80, \\
 & \text{Polishing A} & 2x_1 + 5x_2 \le 60, \\
 & \text{Grinding B} & 5x_3 + 3x_4 \le 60, \\
 & \text{Polishing B} & 5x_3 + 6x_4 \le 75, \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{array}
$$

- Fabrika modeli en iyi çözümü:
  - Toplam kar, $Z = 404,17$, $x1= 9,17$, $x2= 8,33$, $x3=0$, $x4=12,5$
  - A fabrikası kara katkısı = 216,65, kaynak kullanımı = 70
  - B fabrikası kara katkısı = 187,5, kaynak kullanımı = 50

- İki fabrika ayrı modellendiğinde elde edilen kar toplamı: 393,75
  - A Fabrikası modeli en iyi çözümü:
    - $Z = 225$ TL, $x1 = 11,25$, $x2= 7,5$, taşlama kapasitesi 20 birim kullanılmıyor.
  - B Fabrikası modeli en iyi çözümü:
    - $Z= 168,75$, $x3= 0$, $x4 = 11,25$. taşlama kapasitesi 26,25, cilalama kapasitesi 7,5 artmıştır.





Ayrıştırma (Decomposition)

Doğrusal Programlama modeli sonuçlarının yorumlanması ve kullanımı

- Modelin doğrulanması
  - Model çözüldüğünde ortaya çıkabilecek üç durum
    - Model olurlu değil (infeasible)
    - Model sınırlı değil (unbounded)
    - Model çözülebilir
- Ekonomik yorum
  - Sonuçların gerçek hayatla karşılaştırılması
  - Dual model
  - Gölge fiyat (shadow price – dual price)
  - İndirgenmiş maliyet (reduced cost)
- Otomotiv Örneği

Otomotive Örneği – Lindo Sonuç Raporu

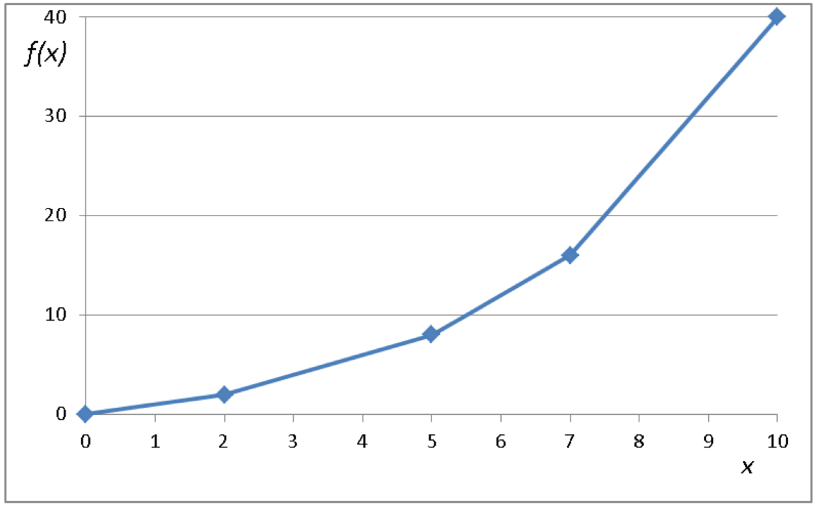
```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      53.11190
 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1          3.341772          0.000000
       X2          1.113924          0.000000
       X3          0.000000          0.013924
       X4          6.460760          0.000000
       X5          0.000000          0.630380

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)          0.000000          2.177215
       3)         60.151897          0.000000
       4)          0.000000          0.017215
       5)          0.000000          0.002532
NO. ITERATIONS=       3
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF         INCREASE         DECREASE
      X1         5.000000        0.057143         0.013836
      X2         6.000000        0.020952         0.048780
      X3         6.300000        0.013924         INFINITY
      X4         4.600000        0.133333         0.012154
      X5         5.200000        0.630380         INFINITY
                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
       2        17.600000        0.255072         0.484404
       3       704.000000        INFINITY        60.151897
       4       704.000000       33.000000        33.846153
       5      1056.000000       75.428566        21.463415
```

Doğrusal Programlama modeli sonuçlarının yorumlanması ve kullanımı

- Duyarlılık analizi
  - Sağ taraf değerleri için aralık
  - Amaç fonksiyonu katsayıları için aralık

Parçalı doğrusal Konveks fonksiyonların DP'ye eklenmesi

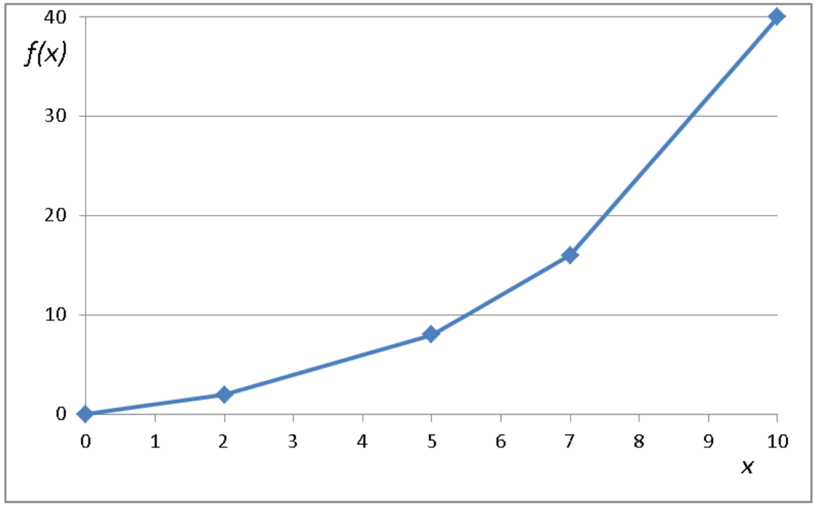


$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 2 + 2(x-2) & 2 \leq x < 5 \\ 8 + 4(x-5) & 5 \leq x < 7 \\ 16 + 8(x-7) & 7 \leq x < 10 \end{cases}$$

- **Yöntem 1.**
- Modelde *f*(*x*) yerine $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$,
- *x* yerine $\sum_{i=1}^{n} y_i$ yazılır,
- kısıtlara $y_i \leq d_{i+1} - d_i, i = 1, \dots, n-1$ ilave edilir.

- $y_i, i = 1, \dots, n-1$ karar değişkenleri,
- $c_i, i = 1, \dots, n-1$ ise *i*'nci parçalı fonksiyonun eğimidir.

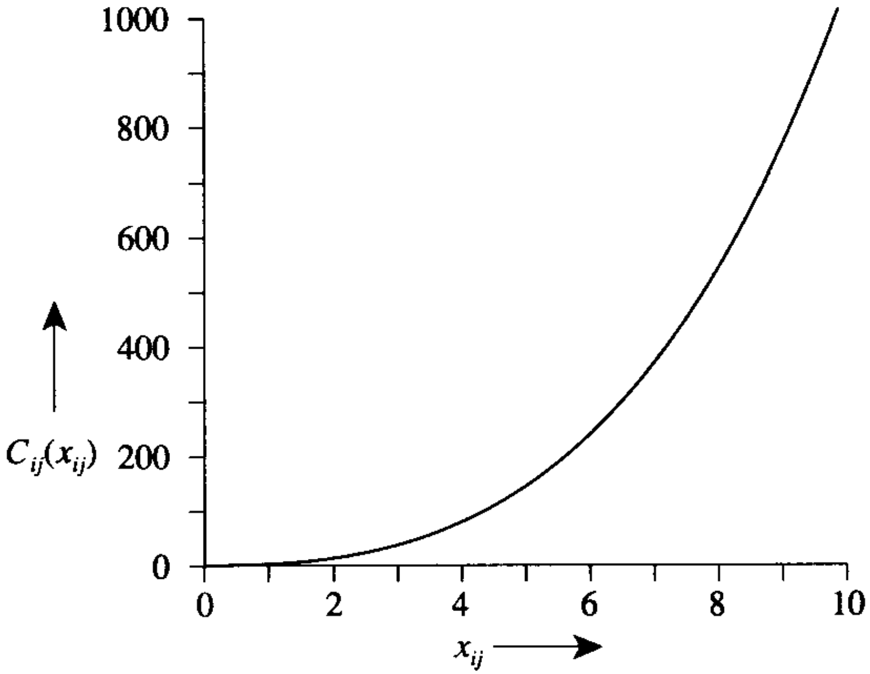
Parçalı doğrusal Konveks fonksiyonların DP'ye eklenmesi

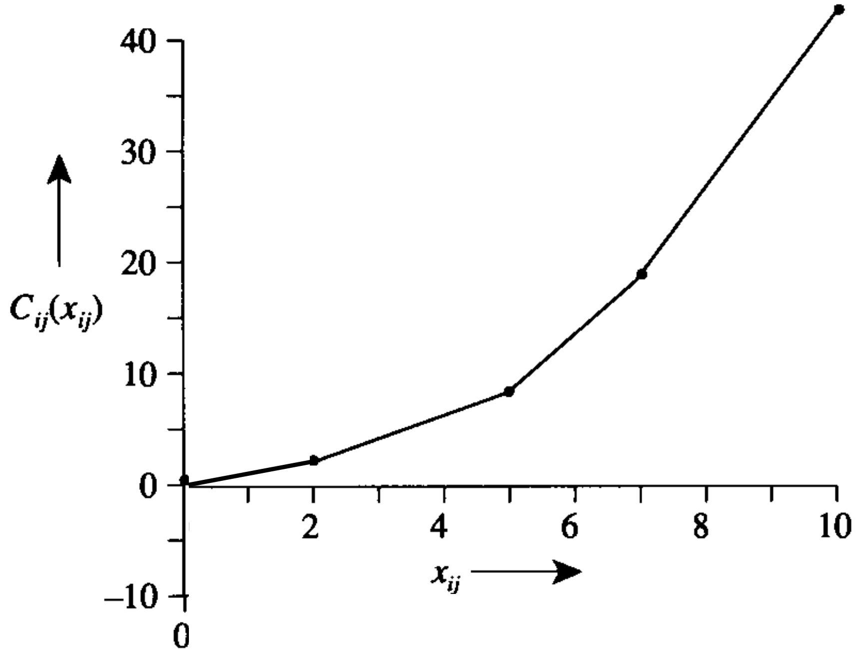


$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ 2 + 2(x-2) & 2 \le x < 5 \\ 8 + 4(x-5) & 5 \le x < 7 \\ 16 + 8(x-7) & 7 \le x < 10 \end{cases}$$

- **Yöntem 2.**
- Modelde *f*(*x*) yerine $\sum_{i=1}^{n} z_i f(d_i)$,
- *x* yerine $\sum_{i=1}^{n} z_i d_i$ yazılır,
- kısıtlara $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$ ilave edilir.
- $z_i, i = 1, \ldots, n$ karar değişkenleri,
- $f(d_i)$: *i*'nci kesme noktasının fonksiyon değeri

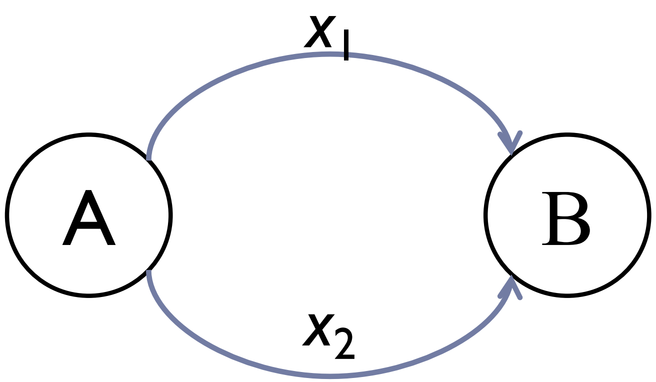
Doğrusal olmayan konveks maliyet fonksiyonları





Petrol taşıma – konveks maliyet fonksiyonu

- A noktasında bulunan 10.000 varil petrol 1 ve 2 boru hatlarından B noktasına taşınacaktır. Borular üzerinden taşıma süresi o hattan taşınan petrol miktarına bağlıdır.
- Birinci borudan taşınan petrol miktarı x_1 bin varil ise ,
  - birinci borudan taşıma süresi x_1^2 saat
- İkinci borudan taşınan petrol miktarı x_2 bin varil ise;
  - ikinci borudan taşıma süresi ise $x_2^{1,5}$ saat
- İki borudan aynı anda petrol verildikten B'ye en son petrol ulaşıncaya kadar olan süreyi enküçüleyecek DP modelini kurunuz.



x_1^2 saat

$x_2^{1,5}$ saat

Petrol taşıma - DP

x	f(x$_1$)=x_1^2	f(x$_2$)=$x_2^{1,5}$
0	0,000	0,000
2,5	6,250	3,953
5	25,000	11,180
7,5	56,250	20,540
10	100,000	31,623

- $x_1 = 0z_{11} + 2,5\ z_{12} + 5\ z_{13} + 7,5\ z_{14} + 10\ z_{15}$
- $f_1 = 0z_{11} + 6,25\ z_{12} + 25\ z_{13} + 56,25\ z_{14} + 100\ z_{15}$
- $z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} = 1$

- $x_2 = 0z_{21} + 2,5\ z_{22} + 5\ z_{23} + 7,5\ z_{24} + 10\ z_{25}$
- $f_2 = 0z_{21} + 3,953\ z_{22} + 11,18\ z_{23} + 20,54\ z_{24} + 31,623\ z_{25}$
- $z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25} = 1$

Petrol taşıma - DP

Karar değişkenleri

x_1 : Birinci borudan taşınan petrol miktarı (bin varil),

x_2 : İkinci borudan taşınan petrol miktarı (bin varil),

f_1 : Birinci boruda taşıma süresi (saat),

f_2 : İkinci borudan taşıma süresi (saat),

y_{ij} : parçalı fonksiyonlar için yardımcı değişkenler, i =1,2; j=1,…,5.

λ : en uzun taşıma süresi

Amaç fonksiyonu Min λ

Kısıtlar

En uzun taşıma süresi iki borudan taşıma sürelerinden büyük olmalı

$\lambda \geq f_1$, $\lambda \geq f_2$,

Birinci ve ikinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi

$x_1 = 0z_{11} + 2{,}5\, z_{12} + 5\, z_{13} + 7{,}5\, z_{14} + 10\, z_{15}$

$f_1 = 0z_{11} + 6{,}25\, z_{12} + 25\, z_{13} + 56{,}25\, z_{14} + 100\, z_{15}$

$z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} = 1$

$x_2 = 0z_{21} + 2{,}5\, z_{22} + 5\, z_{23} + 7{,}5\, z_{24} + 10\, z_{25}$

$f_2 = 0z_{21} + 3{,}953\, z_{22} + 11{,}18\, z_{23} + 20{,}54\, z_{24} + 31{,}623\, z_{25}$

$z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25} = 1$

toplam taşınacak miktar 10,000 varil olmalı: $x_1 + x_2 = 10$

işaret kısıtları; tüm değişkenler ≥ 0.

Petrol taşıma – DP performans

- DP Çözümü
- λ = 15,781
- x_1 = 3,771 f_1 = 14,220
- x_2 = 6,229 f_2 = 15,546

- Doğrusal olmayan programlama çözümü
- x_1 = 3,887 $f_1 = f_2$ = 15,112
- x_2 =6,113

DP çözümü - Yazılımlar

- GAMS - (Ninovada ders kaynaklarındaki dosyayı inceleyiniz)
- Gurobi
- IBM – ILOG
- Excel solver
- Open solver
- Lindo
- Lingo
- ….

- https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_optimization_software
- https://en.0wikipedia.org/wiki/List_of_optimization_software