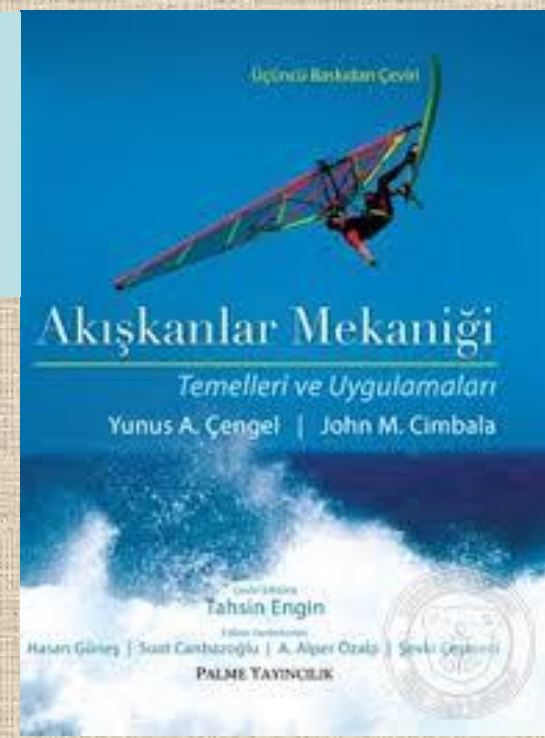


Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları
3'üncü Baskıdan Çeviri
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala
McGraw-Hill, 2014



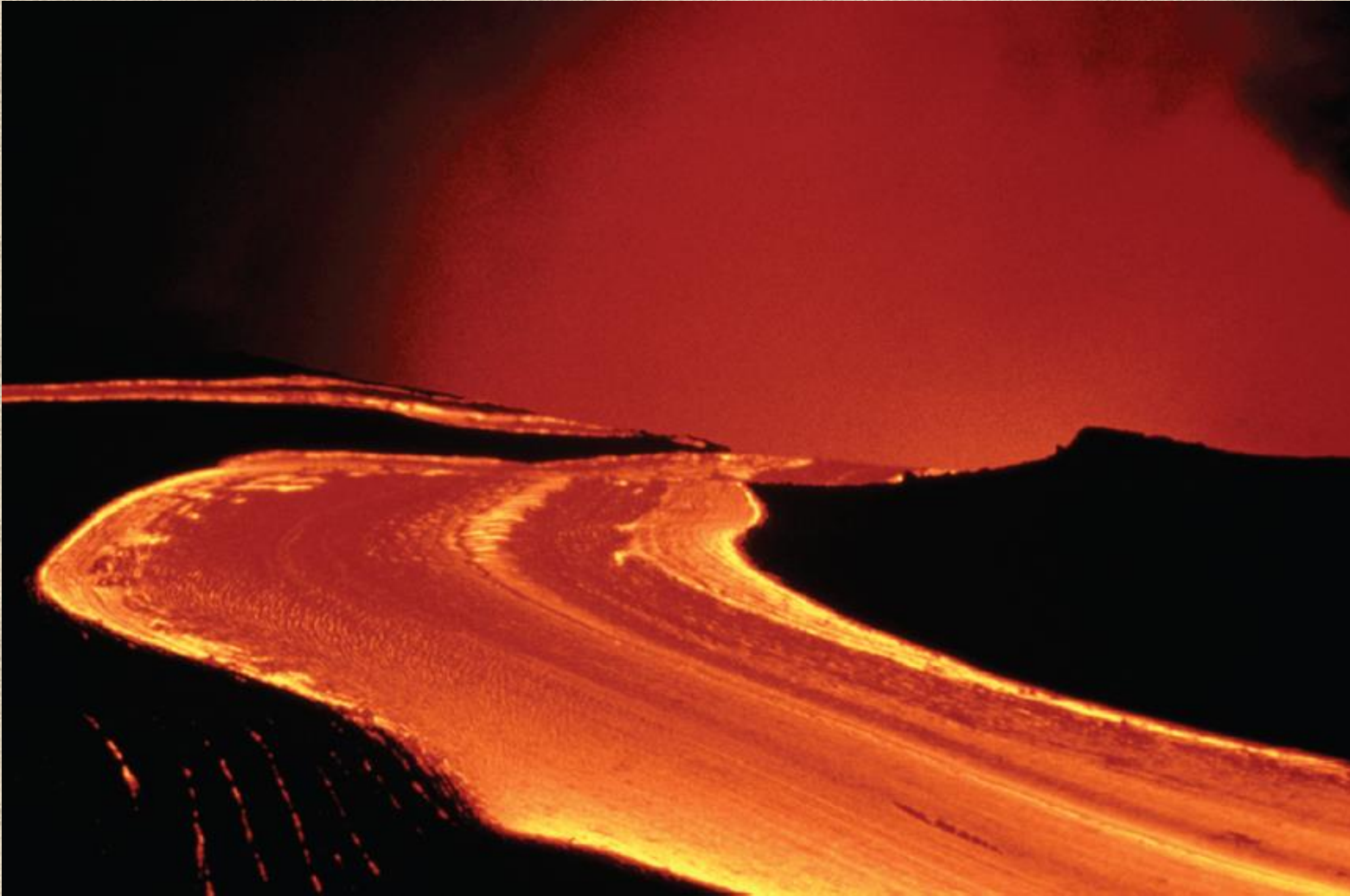
Bölüm 10

NAVIER-STOKES

DENKLEMİNİN

YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

İngilizce orijinal sunum esas alınarak
Tahsin Engin, Hasan Güneş, A. Alper Özalp ve Suat Canbazoğlu
tarafından hazırlanmıştır.



Bu bölümde, viskoz terimlerin atalet terimlerine baskın olduğu sürünme akışı yaklaşıtlırımı gibi, Navier-Stokes denklemini basitleştirmek üzere çeşitli yaklaşıtlırımları inceleyeceğız. Aktif bir yanardağıdan lav akışı sürünme akışına bir örnektir. Lav akışında uzunluk ölçeğı büyük olsa da, erimiş kayaların viskozitesi çok yüksek olduğu için Reynolds sayısı küçük kalmaktadır.

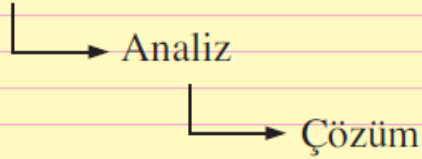
Öğrenim Amaçları

- Akış problemlerinin çözümünde yaklaşıtlara neden gereksinim duyulduğunu anlayabilmeli ve bu yaklaşıtların hangi şartlar altında geçerli olduğunu bilmelidir
- Sürünme akışı yaklaşıtlarında denklemlerden yoğunluk teriminin kalkması da dâhil olmak üzere, atalet terimlerinin ihmal edilmesinin etkilerini anlayabilmelidir
- Potansiyel akış problemlerinin çözümünde süperpozisyon ilkesini kullanabilmelidir
- Sınır tabaka kalınlığını ve diğer sınır tabaka özelliklerini hesaplayabilmelidir

10–1 ■ Giriş

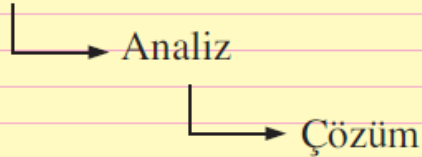
“Tam” çözüm

Bütün Navier–Stokes denklemi



Yaklaşık çözüm

Basitleştirilmiş Navier–Stokes denklemi



Bölüm 9’da Navier-Stokes denklemi adı verilen, sabit özelliklere sahip Newton tipi bir akışkan için lineer momentumun korunumuna ait diferansiyel denklemi türettik.

Akışkanlar mekaniği uygulamalarına ait problemlerin büyük bir bölümü analitik olarak çözülemediği için

(1) ilave bir yaklaştırım (basitleştirme)

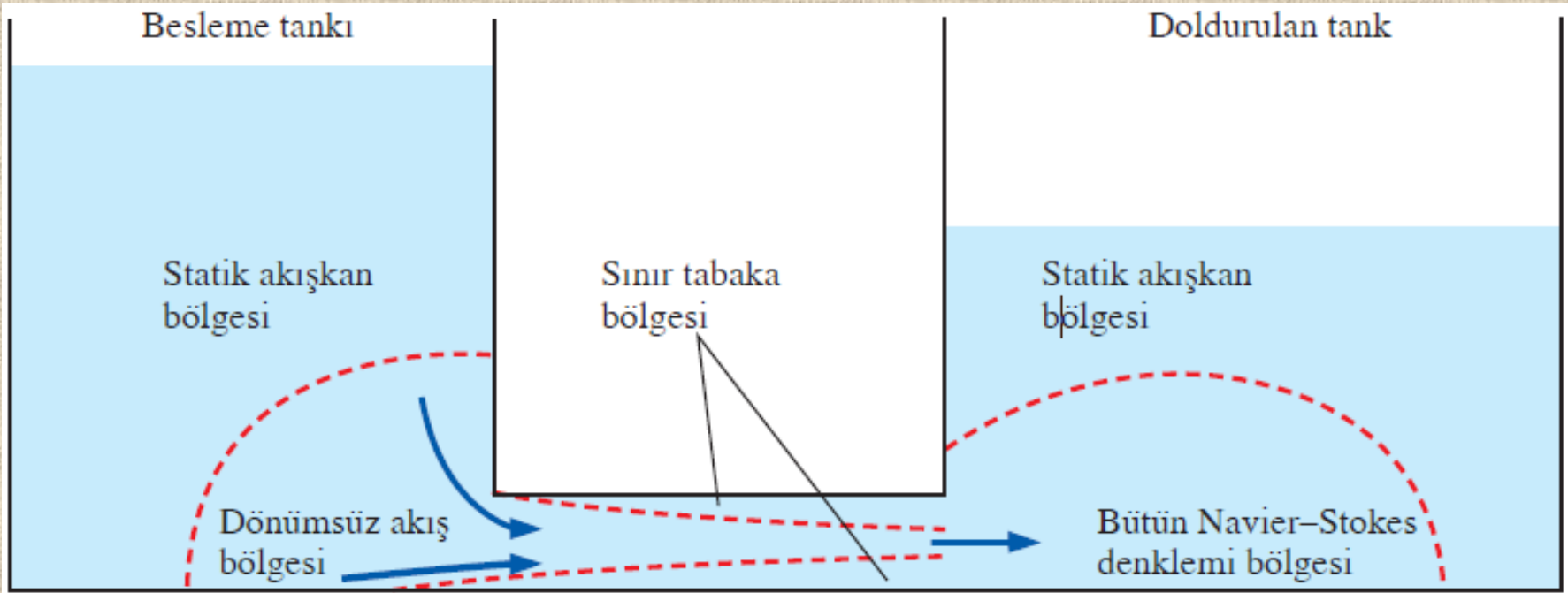
(2) bilgisayar yardımını gerektirmektedir

Biz burada ilk seçeneği göz önüne alacağız

Kolay anlaşılması açısından bu bölümde yalnızca sıkıştırılamaz Newton tipi akışkanları göz önüne alacağız.

Uyguladığımız yaklaştırmalara çok dikkat etmeli ve mümkün olduğunca yaklaştırmamızın geçerliliğini doğrulamalı ve desteklemeliyiz.

“Tam” çözüme Navier-Stokes denkleminin bütününden başlanırken; yaklaşık çözüme Navier-Stokes denkleminin uygun yaklaştırmalar ile basitleştirilmiş bir biçimi ile başlanır.



Navier-Stokes denkleminin belirli bir yaklaşıımı akış alanının sadece bazı bölgelerinde uygun olurken, diğer yaklaşıımlar akış alanının diğer bölgelerinde uygun olabilir.

10–2 ■ Boyutsuz Hareket Denklemleri

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

TABLO 10–1

Süreklilik ve momentum denklemlerini boyutsuzlaştırmada kullanılan ölçeklendirme parametreleri ve ana boyutları

Ölçeklendirme Parametresi	Tanım	Ana Boyutlar
L	Karakteristik uzunluk	$\{L\}$
V	Karakteristik hız	$\{Lt^{-1}\}$
f	Karakteristik frekans	$\{t^{-1}\}$
$P_0 - P_\infty$	Referans basınç farkı	$\{mL^{-1}t^{-2}\}$
g	Yerçekimi ivmesi	$\{Lt^{-2}\}$

$$t^* = ft \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V}$$

$$P^* = \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} \quad \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{g} \quad \vec{\nabla}^* = L \vec{\nabla}$$

Kartezyen koordinatlar

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{{L\partial\left(\frac{x}{L}\right)}}, \frac{\partial}{{L\partial\left(\frac{y}{L}\right)}}, \frac{\partial}{{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)}} \right)$$
$$= \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{1}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{L} \vec{\nabla}^*$$

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho\left(V\vec{V}^* \cdot \frac{\vec{\nabla}^*}{L}\right)V\vec{V}^* = \frac{\rho V^2}{L} \left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^*$$

$$\frac{V}{L} \vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0$$

Boyutsuz süreklilik denklemi: $\vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0$

$$\rho Vf \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{L} \left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^* = -\frac{P_0 - P_\infty}{L} \vec{\nabla}^* P^* + \rho g \vec{g}^* + \frac{\mu V}{L^2} \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$\left[\frac{fL}{V}\right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*\right)\vec{V}^* = -\left[\frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2}\right] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{gL}{V^2}\right] \vec{g}^* + \left[\frac{\mu}{\rho VL}\right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

Silindirik koordinatlar

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{{L\partial\left(\frac{r}{L}\right)}}, \frac{1}{L\left(\frac{r}{L}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)}} \right)$$
$$= \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial r^*}, \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{L} \vec{\nabla}^*$$

Boyutsuz Navier–Stokes denklemi

$$[St] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{V}^* = -[Eu] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{Fr^2}\right] \vec{g}^* + \left[\frac{1}{Re}\right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

Gradyen operatörü, koordinat sistemi seçimine bağlı olmaksızın Denklem 10-3 ile boyutsuzlaştırılır.



Serbest yüzey etkileri olmayan akışlarda yerçekimi akış dinamiğini etkilemez —yerçekiminin tek etkisi dinamik basıncı alanı üzerine bir hidrostatik basıncın eklenmesinden ibarettir.

Toplam basınç:

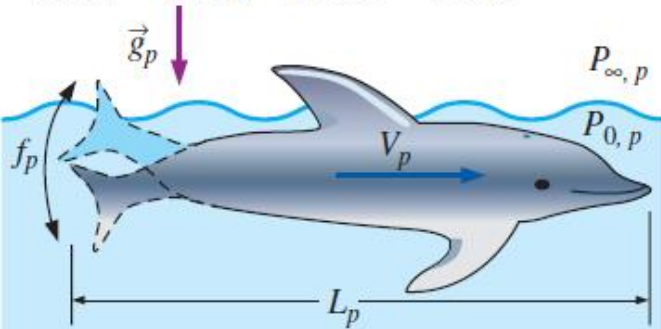
$$P' = P + \rho g z$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P' + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Prototip (alt indis p) ve model (alt indis m) arasındaki tam dinamik benzerlik için model geometrik olarak prototipe benzemeli ve (genellikle) boyutsuz dört parametre St , Eu , Fr ve Re sayıları modelde ve prototipte aynı olmalıdır. Ancak Bölüm 7’de açıklandığı gibi model testlerinde bu eşitliklerin her zaman sağlanması mümkün değildir.

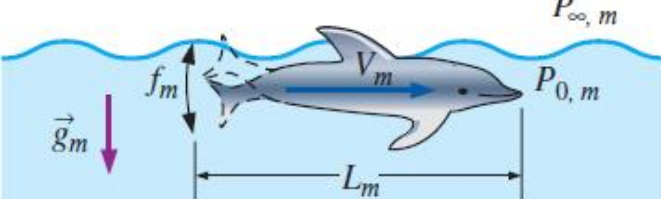
Prototip

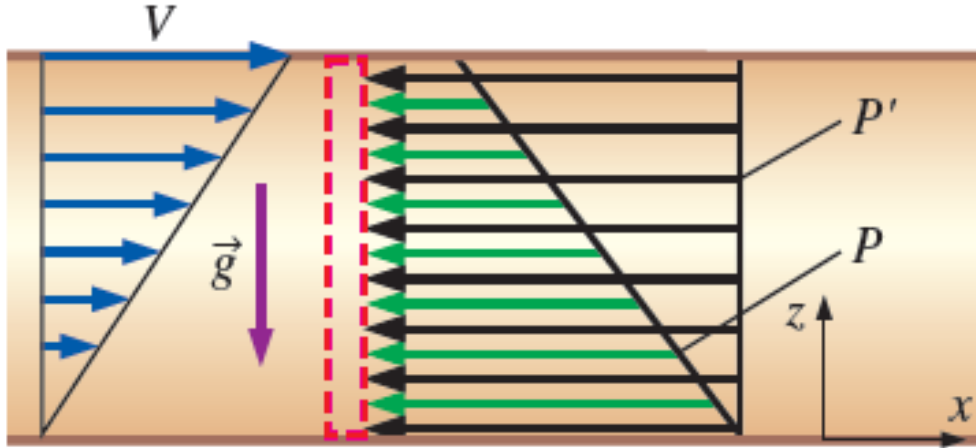
$St_{\text{prototip}}, Eu_{\text{prototip}}, Fr_{\text{prototip}}, Re_{\text{prototip}}$



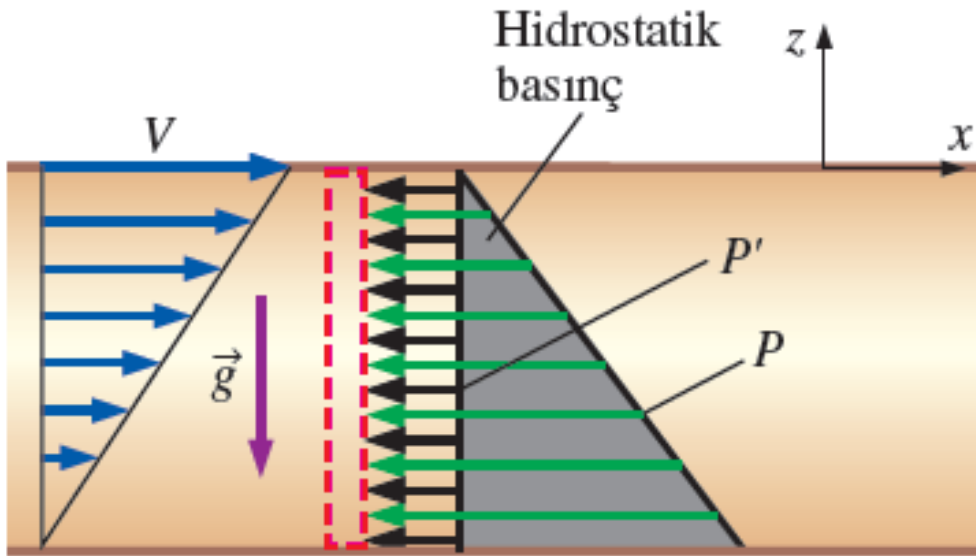
Model

$St_{\text{model}}, Eu_{\text{model}}, Fr_{\text{model}}, Re_{\text{model}}$





(a)



(b)

Paralel ve yatay, sonsuz iki düz levha arasında Couette akışında bir akikan elemanın sağ yüzündeki basınç ve toplam basınç dağılımları: (a) Alt levhada $z = 0$ ve (b) üst levhada $z = 0$. Toplam basınç P' sabit olmakla birlikte gerçek basınç P her iki durumda da sabit değildir. (b)'de görülen gölgeli alan hidrostatik basınç bileşenini temsil etmektedir.

10-3 ■ SÜRÜNME AKIŞI YAKLAŞTIRIMI

Ele alacağımız ilk yaklaştırmamız **sürünme akışı** olarak adlandırılan akış türüdür. Bu tür akışlar için **Stokes akışı** veya **düşük Reynolds sayılı akış** deyimleri de kullanılmaktadır.

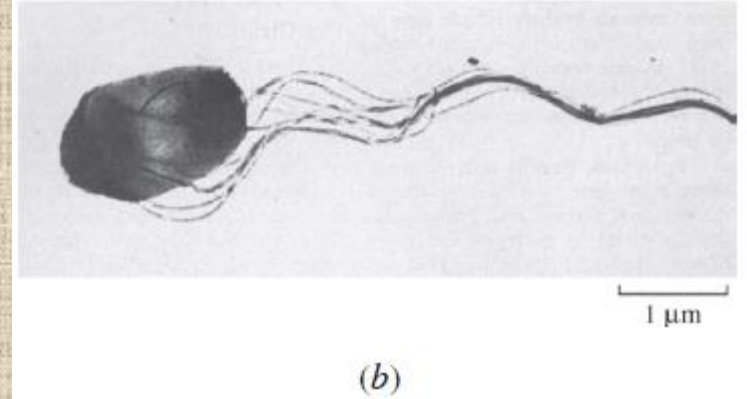
Son isimlendirmeden anlaşılacağı gibi bu akışlar Reynolds sayısının çok küçük ($Re \ll 1$) olduğu akış türleridir. Reynolds sayısının tanımından ($Re = \rho V L / \mu$) hareketle sürünme akışının ya çok küçük ρ , V , or L değerlerinde yada çok yüksek μ değerinde (veya bunların bir kombinasyonu halinde) oluşacağı anlaşılmaktadır.



Bal benzeri viskozitesi çok yüksek bir sıvının yavaş akışı sürünme akışı olarak adlandırılır.



(a)



(b)

(a) *Salmonella typhimurium* ekim yapılmış insan hücrelerini işgal etmesi. (b) Suda yüzen *Salmonella abortusequi* bakterisi

Sürünme akışı yaklaştırımı:

$$[\text{Eu}] \vec{\nabla}^* P^* \cong \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$[\text{Eu}] = \frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2} \sim \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] = \frac{\mu}{\rho V L}$$

Sürünme akışı için basınç ölçeği:

$$P_0 - P_\infty \sim \frac{\mu V}{L}$$

Sürünme akışı için Navier–Stokes denkleminin yaklaşık ifadesi: $\vec{\nabla} P \cong \mu \nabla^2 \vec{V}$ (10–11)

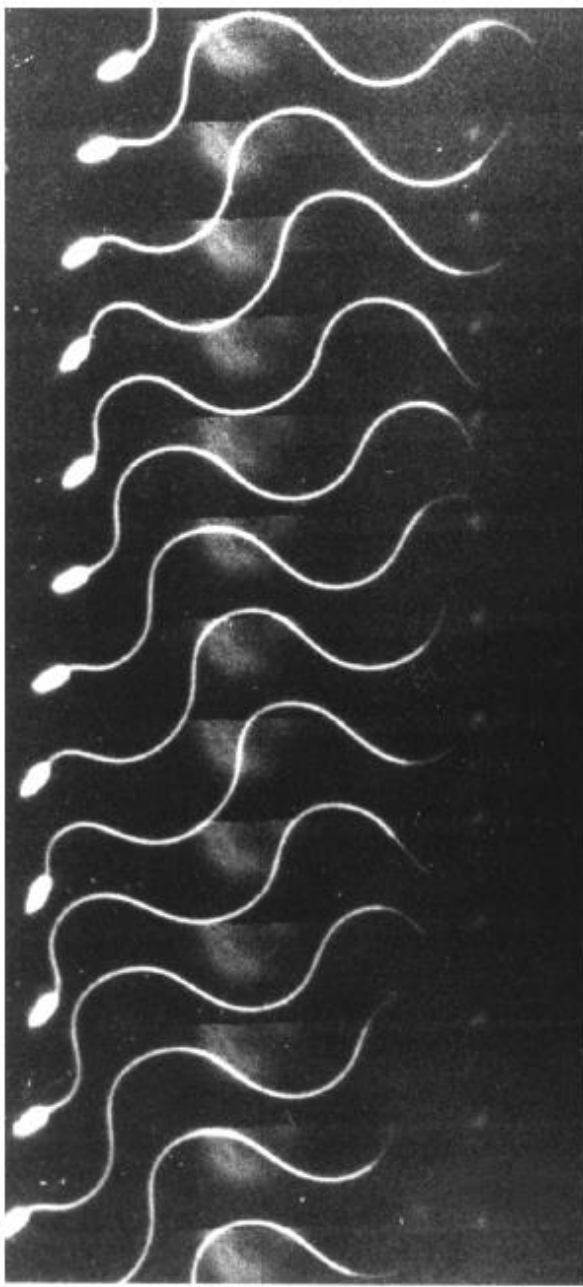
$$\vec{\nabla} P \cong \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Yoğun-
luk mu?
O da ne?



Suda yüzen bir kişi için Reynolds sayısı çok yüksek olduğundan dolayı atalet kuvvetleri büyüktür; dolayısıyla suda hareket etmeksizin uzun bir mesafe süzülerek yüzebilir.

Sürünme akışı yaklaştırımında yoğunluk momentum denkleminde yer almaz.



10 μm



Plastik toplarla dolu bir havuzda hareket etmeye çalışan bir çocuk, ataletten faydalanmaksızın kendini ileriye doğru itirmeye çalışan bir mikroorganizmaya benzer.

Deniz suyunda yüzen bir tür omurgasız olan Ciona'ya ait sperm; saniyede 200 kare fotoğraf alınmış ve her fotoğraf bir öncekinin hemen altına konumlandırılmıştır.

ÖRNEK 10-1 Sürünme Akışında Bir Cisme Etki Eden Direnç Kuvveti

Yoğunluk Navier-Stokes denkleminde ortadan kalktığından, sürünme akışında bir cisim üzerine etkiyen aerodinamik direnç kuvveti yalnızca bu cismin V hızına, cismin L karakteristik boyutuna ve akışkanın μ viskozitesine bağlıdır (Şekil 10-12). Boyut analizini kullanarak F_D için yukarıda verilen bağımsız değişkenlerin fonksiyonu şeklinde bir bağıntı geliştiriniz.

ÇÖZÜM Boyut analizini kullanarak F_D ile değişkenler V , L ve μ arasında bir bağıntı geliştireceğiz.

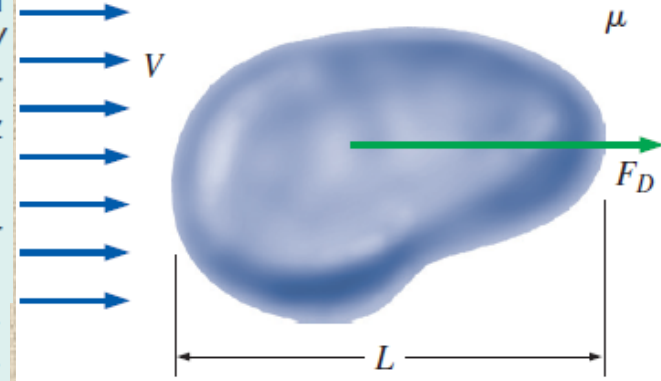
Kabuller 1 Sürünme akışı yaklaşıtlımını uygulayabilmek için $Re \ll 1$ olduğunu kabul edelim. 2 Yerçekimi etkileri önemsizdir. 3 Yukarıda sayılan parametrelerin dışında, problemle ilgisi bulunan başka parametre yoktur.

Analiz Bölüm 7'de anlatılan tekrarlayan değişkenler yöntemi adım adım takip edilmelidir, bunun ayrıntıları bir alıştırmaya bırakılmıştır. Bu problemde dört adet parametre ($n = 4$) ve üç adet ana boyut vardır: Kütle, uzunluk ve zaman, dolayısıyla $j = 3$ 'tür. Burada V , L ve μ 'yü tekrarlayan değişkenler olarak alalım. $k = n - j = 4 - 3 = 1$ olduğundan tek bir Pi terimi vardır ve bu Pi'nin bir sabite eşit olması gerekir. Sonuç olarak,

$$F_D = \text{sabit} \cdot \mu V L$$

elde edilir. Böylece herhangi bir üç-boyutlu cismin etrafındaki sürünme akışında aerodinamik direnç kuvvetinin basit olarak bir sabit ile $\mu V L$ ifadesinin çarpımına eşit olduğu görülmektedir.

İrdeleme Bu sonuç oldukça önemlidir, zira yapılması gereken tek şey cismin şeklinin bir fonksiyonu olan sabitin bulunmasından ibarettir.



ŞEKİL 10-12

Üç-boyutlu bir cisim üzerindeki sürünme akışında cisme etki eden aerodinamik direnç kuvveti yoğunluktan bağımsızdır. Bu kuvvet sadece cismin hızı V 'ye cismin karakteristik boyutu L 'ye ve akışkan viskozitesi μ 'ye bağlıdır.

Sürünme Akışında Bir Küre Üzerindeki Direnç Kuvveti

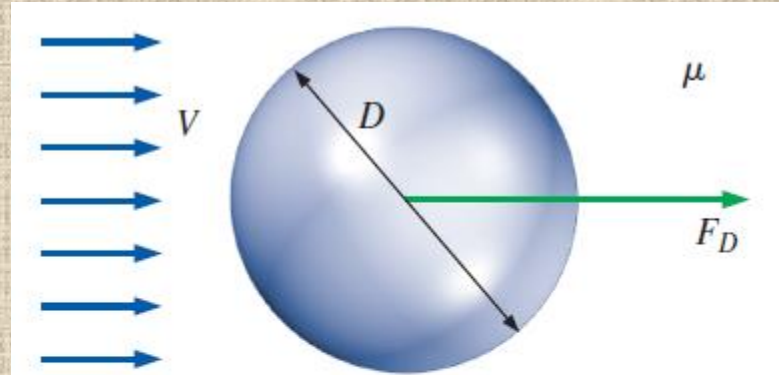
Viskozitesi μ olan bir akışkan içerisinde karakteristik boyu L olan üç-boyutlu bir cismin sürünme akışında bu cisme etkiyen F_D direnç kuvveti $F_D = \text{sabit} \cdot \mu VL$ olarak verilir.

Direnç kuvveti, cismin şekline ve akışkan içerisine yerleştirilme biçimine bağlı olduğundan, boyut analizi ifadede yer alan sabitin değeri hakkında bir fikir vermez.

Cismin bir küre olması durumunda Denklem 10-11 analitik olarak çözülebilir.

Sürünme akışında bir küre üzerindeki direnç kuvveti:

$$F_D = 3\pi\mu VD$$



ŞEKİL 10-13

Sürünme akışında D çaplı bir küre üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti $3\pi\mu VD$ 'ye eşittir.

ÖRNEK 10-2 Bir Yanardağın Püskürttüğü Parçacığın Limit Hızı

Bir yanardağ püskürmesi sırasında volkanik taşlar, buhar ve küller beraber binlerce metre yüksekliğe çıkabilir (Şekil 10-14). Bir süre sonra parçacıklar yeryüzüne dönmeye başlar. 50 μm çapında yaklaşık olarak küresel şekilli bir kül parçacığının -50°C sıcaklıkta ve 55 kPa basınçtaki hava içerisinde düşmesini göz önüne alınız. Parçacığın yoğunluğu 1240 kg/m^3 'tür. Verilen yükseklikte parçacığın limit hızını belirleyiniz.

ÇÖZÜM Düşen bir kül parçacığının limit hızını belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Reynolds sayısı çok küçüktür (çözümü tamamladıktan sonra bunu doğrulayacağız!). 2 Parçacık küresel şekle sahiptir.

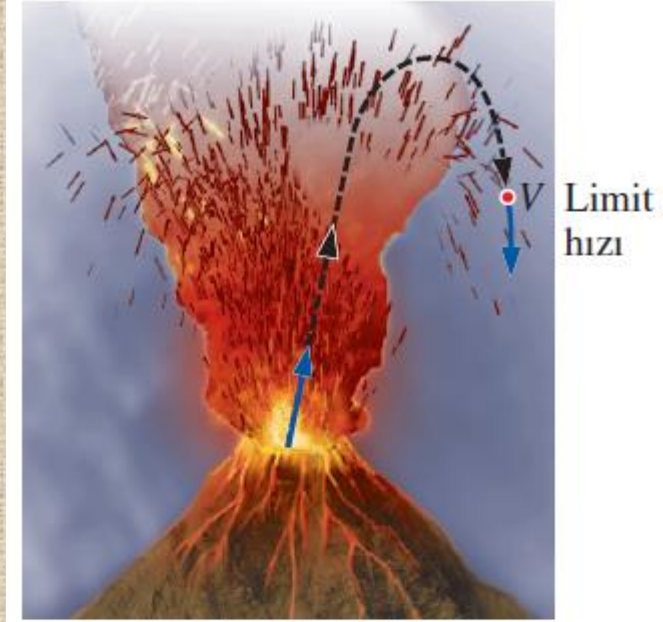
Özellikler Verilen basınç ve sıcaklıkta ideal gaz yasasından $\rho = 0.8588\text{ kg/m}^3$ elde edilir. Viskozite basınçla çok az değiştiğinden -50°C ve atmosfer basıncındaki değerini kullanalım: $\mu = 1.474 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 'dir.

Analiz Problemi sanki-daimi olarak ele alalım. Parçacık ilk kez limit hıza ulaştığında, Şekil 10-15'te gösterildiği gibi aşağı yönlü olan net kuvvet (ağırlık) yukarı yönlü olan net kuvveti (aerodinamik direnç kuvveti + kaldırma kuvveti) dengeler:

$$\text{Aşağı yönlü kuvvet:} \quad F_{\text{aşağı}} = W = \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{tanecik}} g \quad (1)$$

Parçacık üzerine etkiyen aerodinamik kuvvet Denklem 10-12'den elde edilir. Kaldırma kuvveti ise yer değiştiren havanın ağırlığına eşittir:

$$\text{Yukarı yönlü kuvvet:} \quad F_{\text{yukarı}} = F_D + F_{\text{kaldırma}} = 3\pi\mu VD + \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{hava}} g \quad (2)$$



ŞEKİL 10-14

Bir yanardağdan püsküren küçük kül parçacıkları yavaşça yere iner; bu tip bir akış alanı için sürünme akışı yaklaşıdırımı uygundur.

Denklem 1 ve 2'yi eşitleyip V 'yi çekersek,

$$\begin{aligned} V &= \frac{D^2}{18\mu} (\rho_{\text{tanecik}} - \rho_{\text{hava}})g \\ &= \frac{(50 \times 10^{-6} \text{ m})^2}{18(1.474 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s})} [(1240 - 0.8588) \text{ kg/m}^3](9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= \mathbf{0.115 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

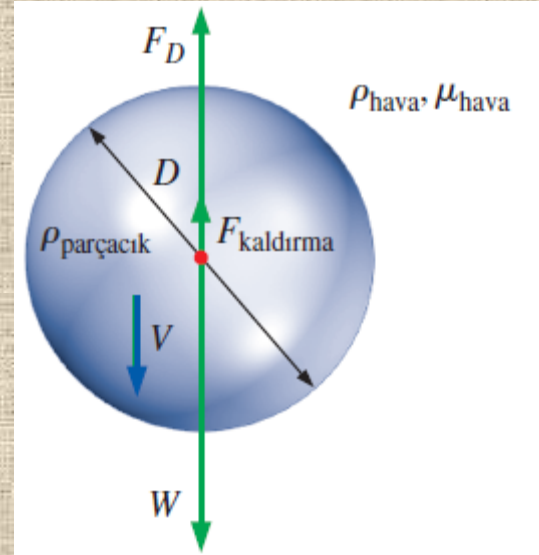
elde edilir. Son olarak sürünme akışının yerinde bir yaklaştırım olması için Reynolds sayısının yeterince küçük olduğundan emin olalım:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{hava}} V D}{\mu} = \frac{(0.8588 \text{ kg/m}^3)(0.115 \text{ m/s})(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{1.474 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 0.335$$

Buna göre Re sayısı 1'in altındadır, ancak 1'den *çok küçük* değildir.

İrdeleme Her ne kadar bir küre üzerindeki sürünme akış direnç kuvveti için verdiğimiz denklem (Denklem 10-12) $\text{Re} \ll 1$ olması durumu için türetiliyse de, yaklaştırımın $\text{Re} \cong 1$ 'e kadar iyi sonuç verdiği görülür. Bir Reynolds sayısı düzeltilmesi ve hava moleküllerinin ortalama serbest yörüngesine dayalı bir düzeltmenin dâhil edildiği daha kapsamlı bir hesaplama ile limit hızın değeri 0.110 m/s olarak elde edilir (Heinsohn ve Jimbala, 2003). Dolayısıyla sürünme akışı yaklaştırımıyla yapılan hata %5'in altındadır.

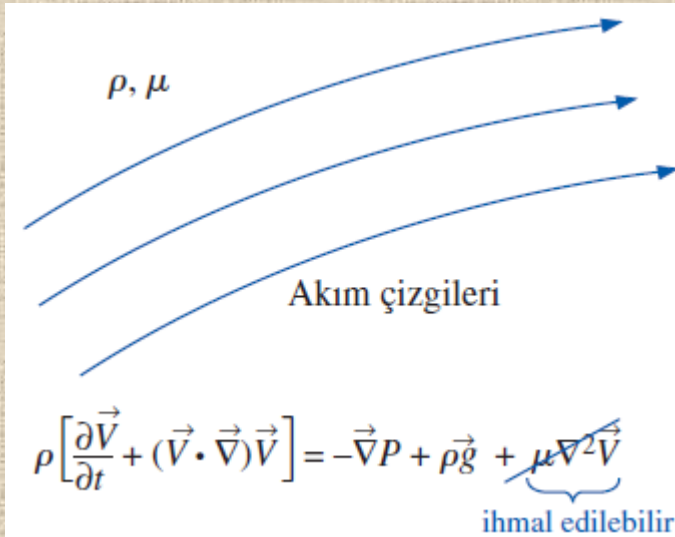
Yoğun ve küçük bir parçacığın sürünme akışı şartlarındaki limit hızı, akışkanın yoğunluğundan bağımsız olmasına karşın viskozitesine bağımlılığı oldukça yüksektir.



ŞEKİL 10-15

Daimi bir limit hızda düşmekte olan bir parçacığın ivmesi yoktur; dolayısıyla parçacığın ağırlığı parçacık üzerine etkiyen aerodinamik direnç ve kaldırma kuvveti ile dengelenir.

10-4 ■ VİSKOZ OLMAYAN AKIŞ BÖLGESİ YAKLAŞTIRIMI



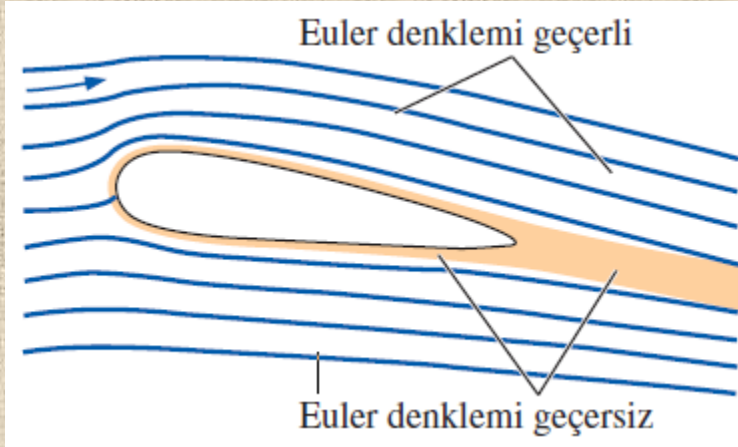
Bir viskoz olmayan akış bölgesi Reynolds sayısının yüksekliğinden dolayı net viskoz kuvvetlerin atalet ve/veya basınç kuvvetlerine kıyasla ihmal edilebilir olduğu, bununla beraber akışkanın kendisinin hala viskoz olduğu bir akış bölgesidir.

Viskoz olmayan akış bölgeleri yüksek Reynolds sayısına sahip bölgelerdir- sürünme akışı bölgelerinin tersi. Bu bölgelerde Navier-Stokes denkleminde (Denklem 10-2) viskoz terim yok olur ve Euler denklemi elde edilir:

Euler denklemi:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

Katı çeperdeki kaymazlık şartından ötürü bir katı çeperin çok yakınındaki akış bölgesinde sürtünme kuvvetleri ihmal edilemez. **Sınır tabaka** olarak bilinen böyle bir bölgede çepere dik doğrultudaki hız gradyenleri çok büyüktür ve küçük olan $1/Re$ değerini dengeler.



Euler denklemi Navier-Stokes denkleminin bir yaklaşıdır ve sadece Reynolds sayısının yüksek olduğu, net viskoz kuvvetlerin atalet ve/veya basınç kuvvetlerine oranla ihmal edilebilir olduğu akış bölgeleri için geçerlidir.

Euler denklemi, çeperlerden ve art izlerinden uzakta net viskoz kuvvetlerin ihmal edilebilir olduğu yüksek Reynolds sayılı akış bölgeleri için uygun bir yaklaşıdır.

Sonuç olarak, akışkanın çeper *içerisinden* akamayacağını (çeper *geçirgen değildir*) hala belirtebilmemize rağmen, Euler yaklaşımını kullandığımızda katı çeperlerde kaymazlık sınır şartını *belirtemeyiz*.

Dolayısıyla Euler denkleminin çözümleri katı çeperler yakınında fiziksel olarak anlamsızdır, zira akışın burada kaymasına izin verilmektedir.

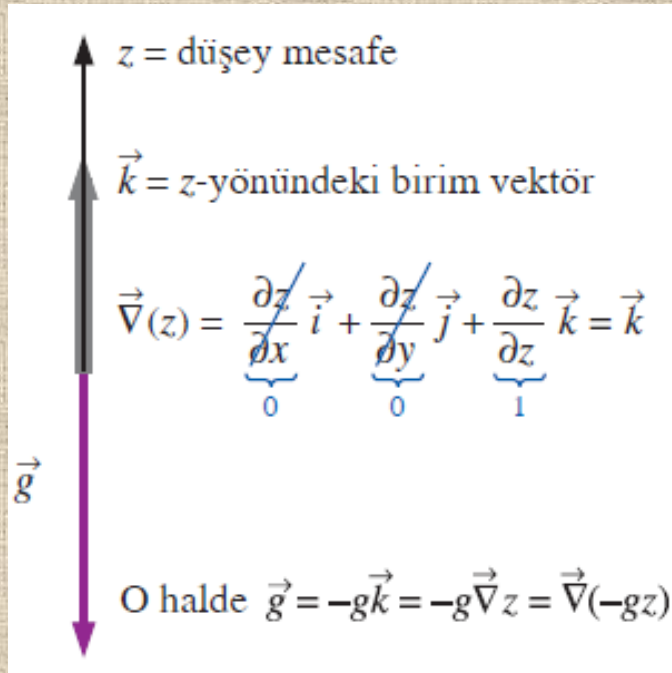
Viskoz Olmayan Akış Bölgelerinde Bernoulli Denkleminin Türetilmesi

Vektör özdeşliği: $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$ $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \vec{\zeta}$

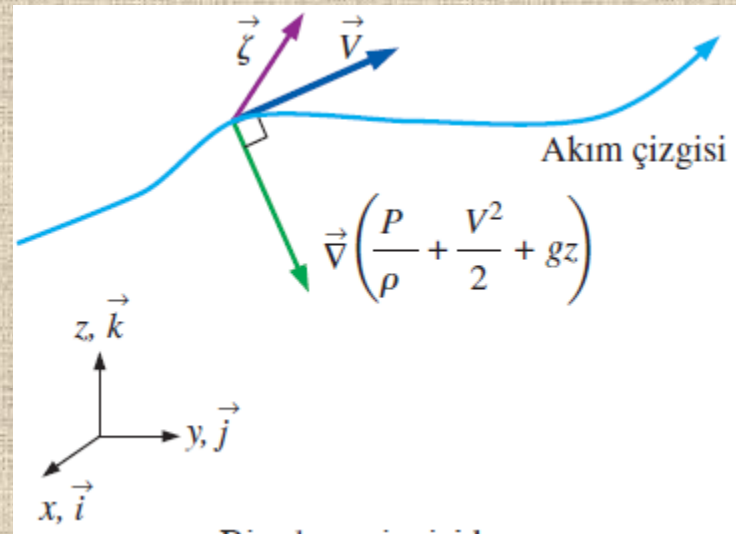
$$\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \vec{\zeta} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} = \vec{\nabla}\left(-\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}$$

$$\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = \vec{V} \times \vec{\zeta}$$



Yerçekimi negatif z -yönünde etkiğinde $\vec{g}$ yerçekimi vektörü $\vec{\nabla}(-gz)$ olarak yazılabilir.

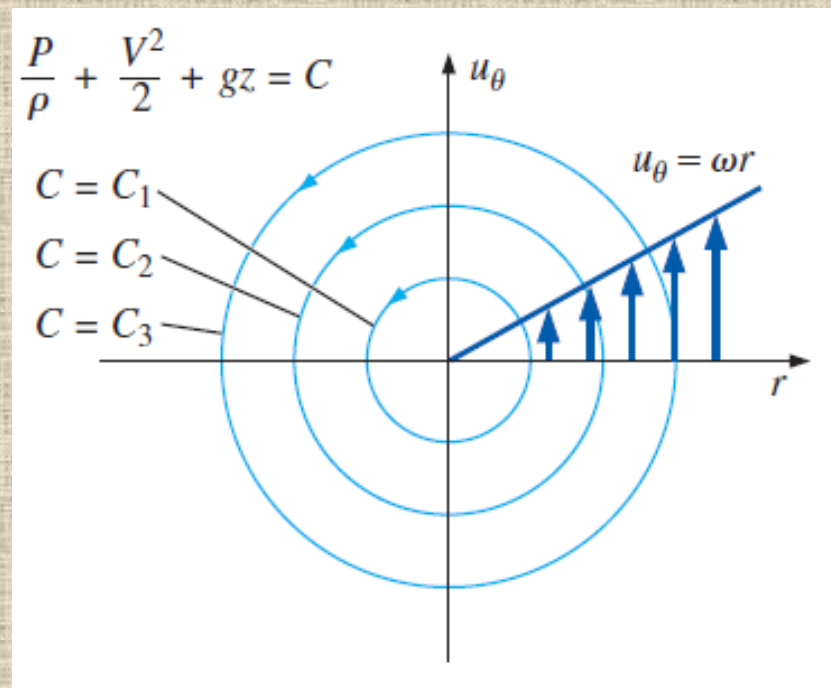


Bir akım çizgisi boyunca $\vec{\nabla}(P/\rho + V^2/2 + gz)$ akım çizgisine her yerde dik bir vektördür, böylece $P/\rho + V^2/2 + gz$ akım çizgisi boyunca sabittir.

Viskoz olmayan akış bölgelerinde daimi sıkıştırılmaz Bernoulli denklemi:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{akım çizgisi boyunca sabit}$$

Katı cisim dönmesi döntümlü olan bir viskoz olmayan akış bölgesi örneğidir. Bernoulli sabiti C akım çizgisinden akım çizgisine değişir ancak belirli bir akım çizgisi boyunca sabittir.



ÖRNEK 10-3 Katı Cisim Dönmesinde Basınç Alanı

Şekil 10-20'de gösterildiği gibi bir akışkan z-ekseni etrafında katı cisim halinde dönmektedir. Sıkıştırılamayan akışkanın daimi akışı için hız alanı $u_r = 0$, $u_\theta = \omega r$ ve $u_z = 0$ olarak verilmektedir. Orijindeki basınç P_0 'dır. Bu akış için basınç alanını hesaplayınız ve her bir akım çizgisi boyunca Bernoulli sabitini belirleyiniz.

ÇÖZÜM Verilen bir hız alanı için basınç alanını hesaplayacağız ve Bernoulli sabitini belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. 2 z-yönünde (düşeyde) herhangi bir akış olmadığından düşey yönde sadece hidrostatik basınç dağılımı mevcuttur. 3 Viskoz kuvvetler sıfır olduğundan tüm akış alanı viskoz olmayan bir akış bölgesi ile temsil edilebilir. 4 Akışa ait hiçbir büyüklük θ -yönünde değişmemektedir.

Analiz Kabul 3'ten ötürü Denklem 10-18 doğrudan uygulanabilir.

Bernoulli denklemi:
$$P = \rho C - \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho g z \quad (1)$$

Burada C , Şekil 10-20'de gösterildiği gibi akım çizgilerine dik yönde, yarıçapla değişen Bernoulli sabitidir. Herhangi bir r radyal konumunda $V^2 = \omega^2 r^2$ alınırsa Denklem 1,

$$P = \rho C - \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z \quad (2)$$

halini alır. Orijinde ($r = 0$, $z = 0$), basınç P_0 'a eşit olur (verilen sınır şartından). Böylece orijinde ($r = 0$), $C = C_0$ elde ederiz.

Orijindeki sınır şartı:
$$P_0 = \rho C_0 \quad \rightarrow \quad C_0 = \frac{P_0}{\rho}$$

Peki C 'yi herhangi bir r konumunda nasıl bulabiliriz? Bunun için Denklem 2 yetersiz kalır, zira C ve P bilinmemektedir. Bu sorunun cevabı Euler denklemini kullanmaktır. Bir serbest yüzey bulunmadığından Denklem 10-7 ile verilen değiştirilmiş basıncı kullanabiliriz. Bu durumda Euler denkleminin r -bileşeni aşağıdaki hale gelir:

Euler denkleminin r -bileşeni:

$$\frac{\partial P'}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} = \rho \omega^2 r \quad (3)$$

(Denklem 9-62b'nin viskoz terimlerinin bulunmadığı haline bakınız). Burada verilen u_θ hız bileşenini denklemde yerine yazılmıştır. Hidrostatik basınç zaten toplam basınç denklemine dâhil edildiğinden, P' basıncı z 'nin fonksiyonu değildir. Sırasıyla 1 ve 4 numaralı kabuller dikkate alındığında P' basıncı t veya θ 'nın da fonksiyonu olamaz. Bu durumda P' yalnızca r 'nin fonksiyonudur ve dolayısıyla Denklem 3'teki kısmi türevi toplam türev ile değiştirebiliriz. Bu denklemi integre edersek,

Toplam basınç alanı:

$$P' = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + B_1 \quad (4)$$

elde ederiz. Burada B_1 bir integral sabitidir. Orijinde toplam basınç P' gerçek basınç P 'ye eşittir. Çünkü bu noktada $z = 0$ 'dır. Böylece B_1 sabiti orijinde bilinen basınç sınır şartı uygulanarak bulunur. Bu durumda $B_1 = P_0$ olur. Şimdi de Denklem 4'ü, Denklem 10-7'yi kullanarak ($P = P' - \rho g z$) gerçek basınca geri dönüştürelim:

Gerçek basınç alanı:

$$P = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 - \rho g z \quad (5)$$

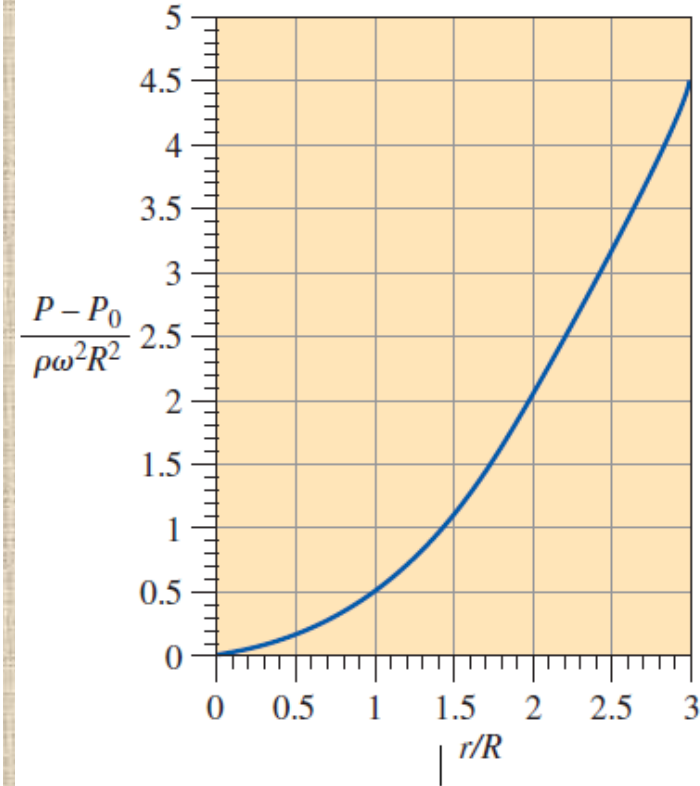
Referans düzleminde ($z = 0$), boyutsuz basınç boyutsuz yarıçapın fonksiyonu olarak çizilebilir (Şekil 10-21). Boyutsuz yarıçap için akıştaki keyfi bir $r = R$ konumu karakteristik uzunluk ölçeği olarak seçilmiştir. Basınç dağılımı r 'ye göre paraboliktir.

Son olarak C 'yi bulmak üzere Denklem 2 ve 5'i birbirlerine eşitlersek,

r 'nin fonksiyonu olarak Bernoulli sabiti:

$$C = \frac{P_0}{\rho} + \omega^2 r^2 \quad (6)$$

elde ederiz. Orijinde $C = C_0 = P_0/\rho$ olup önceki hesabımızla uyuşmaktadır.



ŞEKİL 10-21

Katı cisim dönmesi yapan bir akışkan için sıfır yükseklikteki boyutsuz basıncın boyutsuz radyal konum ile değişimi.

10–5 ■ DÖNÜMSÜZ AKIŞ YAKLAŞTIRIMI

Akışkan parçacıklarının *hiçbir net dönmeye* sahip olmadığı akış bölgeleri vardır ve bu bölgelere **dönümsüz** akış bölgeleri denir.

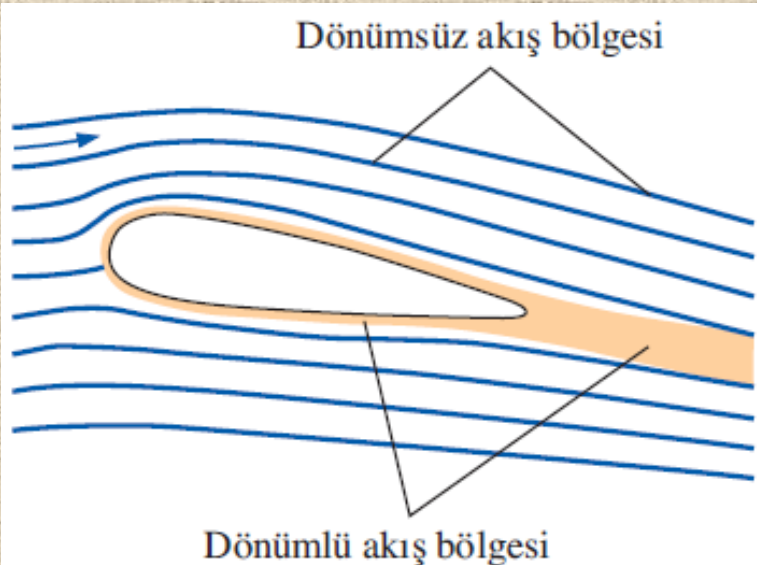
Viskoz olmayan bir akış bölgesinin dönümsüz olmayabileceği (örneğin katı cisim gibi dönme hareketi) durumlar mümkünse de genel olarak katı çeperlerden ve cisimlerin art izlerinden uzak viskoz olmayan akış bölgeleri dönümsüzdür.

Buna göre, dönümsüzlük ile tanımlanan akış tipleri için elde edilen çözümler, Navier-Stokes çözümlerinin yaklaşımlarıdır.

Matematiksel olarak bu yaklaşım, vortisitenin ihmal edilebilecek kadar küçük olması demektir:

Dönümsüz akış yaklaşımı:

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \equiv 0$$



Dönümsüz akış yaklaşımı yalnızca vortisitenin ihmal edilebildiği belirli akış bölgeleri için uygundur.

Süreklilik Denklemi

Vektör özdeşliği: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$ Buna göre eğer $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ise $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$. (10-20)

hız potansiyeli fonksiyonu ϕ

Dönümsüz akış bölgeleri için:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$$

Dönümsüz bir akış bölgesinde hız vektörü, *hız potansiyeli fonksiyonu* adı verilen bir skaler fonksiyonun gradyeni olarak ifade edilebilir.

Vektör özdeşliğinin kanıtı:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$$

Kartezyen koordinatlarda açılım,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi =$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0$$

ϕ 'nin x, y ve z 'ye bağlı düzgün bir fonksiyon olması halinde özdeşlik sağlanır.

Dönümsüz akış bölgelerine **potansiyel akış bölgeleri** adı da verilir.

Denklem 10-20 ile verilen vektör özdeşliği, terimlerin kartezyen koordinatlarda açılmasıyla kolayca ispat edilebilir.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

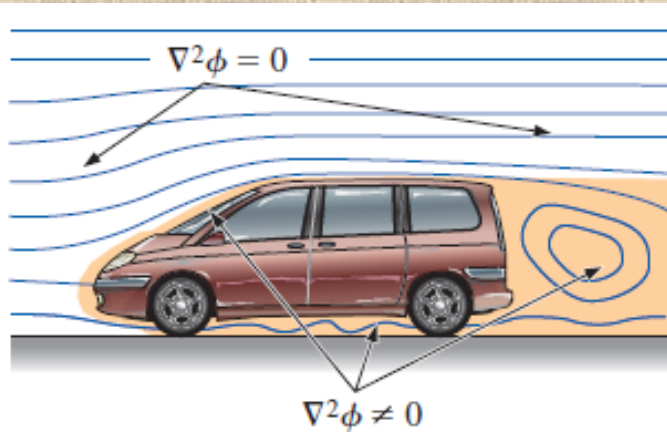
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Dönümsüz akış bölgeleri için:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$



ŞEKİL 10-24

Hız potansiyeli fonksiyonu ϕ için yazılan Laplace denklemi, koordinat sisteminden bağımsız olarak hem iki hem de üç-boyutlu akışlar için ancak akışın dönümsüz olduğu bölgelerde (genellikle çeperlerden ve art izlerinden uzak bölgelerde) geçerlidir.

Genel 3-B sıkıştırılamaz akış:

- Bilinmeyenler = u, v, w ve P
- Dört denklem gerekli

↓ Yaklaştırım

Dönümsüz akış bölgeleri:

- Bilinmeyenler = ϕ ve P
- İki denklem gerekli

Dönümsüz akış bölgelerinde, hız vektörünün bilinmeyen üç bileşeni *tek bir* skaler fonksiyona (hız potansiyeli fonksiyonu) indirgenebilir.

Momentum Denklemi

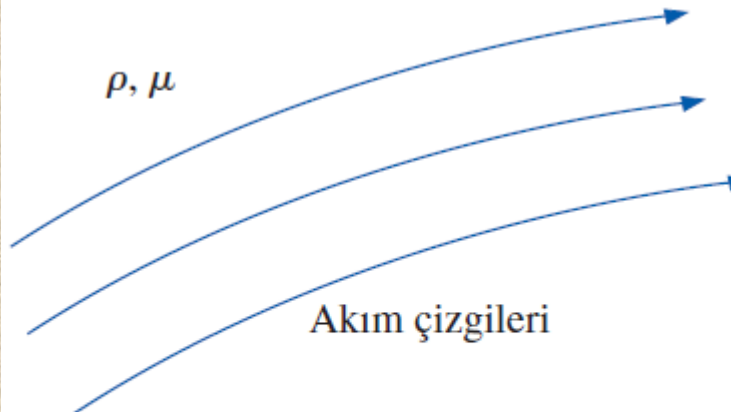
$$\mu \nabla^2 \vec{V} = \mu \nabla^2 (\vec{\nabla} \phi) = \mu \underbrace{\vec{\nabla} (\nabla^2 \phi)}_0 = 0$$

Navier-Stokes denklemi dönümsüz akış bölgelerinde **Euler denklemine** indirgenir.

Dönümsüz akış bölgeleri için:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

Dönümsüz bir akış bölgesi, net viskoz kuvvetlerin dönümsüz akış yaklaştırımından dolayı atalet ve/veya basınç kuvvetlerine göre ihmal edilebilir olduğu bir bölgedir. Dolayısıyla akışın tüm dönümsüz bölgeleri aynı zamanda viskoz olmayan bölgelerdir, buna karşın akışın tüm viskoz olmayan bölgeleri dönümsüz değildir. Akışkanın kendisi her iki durumda da hala viskoz bir akışkandır.



ρ, μ

Akım çizgileri

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_0$$

Dönümsüz Akış Bölgelerinde Bernoulli Denkleminin Türetilmesi

$$\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) = 0$$

Eğer bir skaler büyüklüğün (Soldaki ifadede parantez içindeki terim) gradyeni her yerde sıfırsa, bu skaler büyüklüğün kendisi bir sabit olmalıdır. Böylece:

Dönümsüz akış bölgelerinde daimi ve sıkıştırılamaz akış için Bernoulli denklemi:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{her yerde sabit}$$

Dönümsüz bir akış bölgesinde ise Bernoulli sabiti her yerde aynıdır.

Dönümsüzlük yaklaşıımı viskoz olmama yaklaşıımından daha kısıtlayıcıdır.

Dönümsüz bir akış bölgesindeki çözümlerin elde edilmesi için akış diyagramı. Hız alanı, süreklilik denklemi ve dönümsüzlük şartından elde edilir. Bunun ardından Bernoulli denkleminde basınç hesaplanır.

Süreklilikten ϕ 'yi hesapla: $\nabla^2 \phi = 0$



Dönümsüzlükten $\vec{V}$ 'yi hesapla: $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$



Bernoulli denkleminde P 'yi hesapla:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

ÖRNEK 10-4 Bir Hortumun İki-Bölge Modeli

Bir hortum içerisinde alınan yatay bir kesit (Şekil 10-28) iki farklı bölge ile modellenebilir. İç veya çekirdek bölge ($0 < r < R$) katı cisim dönmesi, yani daha önce açıklandığı gibi dönümlü ancak viskoz olmayan bir akış bölgesi olarak modellenir. Dış bölge ($r > R$) ise dönümsüz bir akış bölgesi olarak modellenir. Akış $r\theta$ -düzleminde iki-boyutludur ve hız alanının bileşenleri $\vec{V} = (u_r, u_\theta)$,

$$\text{Hız bileşenleri:} \quad u_r = 0 \quad u_\theta = \begin{cases} \omega r & 0 < r < R \\ \frac{\omega R^2}{r} & r > R \end{cases} \quad (1)$$

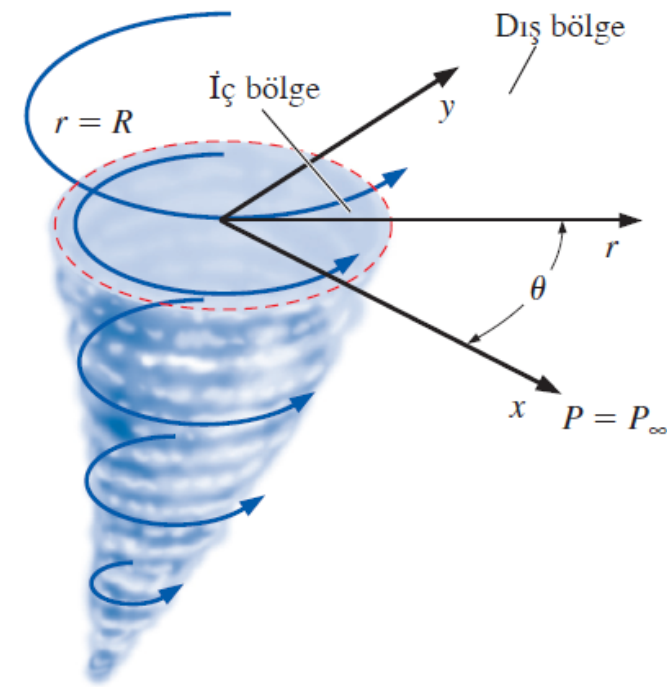
olarak verilmektedir. Burada ω , iç bölgedeki açısal hızın büyüklüğüdür. Çevre basıncı (hortumdan çok uzakta) P_∞ 'a eşittir. $0 < r < \infty$ olmak üzere hortumun yatay bir kesitindeki basınç alanını hesaplayınız. $r = 0$ 'daki basınç nedir? Basınç ve hız alanlarını çiziniz.

ÇÖZÜM Hız bileşenleri Denklem 1 ile temsil edilen hortumun yatay bir radyal kesiti boyunca olan basınç alanı $P(r)$ 'yi hesaplayacağız. Ayrıca bu kesitte $r = 0$ noktasındaki basıncı belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. 2 Her ne kadar z yüksekliğinin artmasıyla R artıyor ve ω azalıyor da, belirli bir yatay kesit için R ve ω sabit kabul edilmektedir. 3 Yatay kesitteki akış $r\theta$ -düzleminde iki-boyutludur (akış z 'ye bağlı değildir ve hızın w -bileşeni bulunmamaktadır). 4 Belirli bir yatay kesit içerisinde yerçekiminin etkileri ihmal edilmektedir (Doğal olarak z -yönünde ek bir hidrostatik basınç alanı mevcuttur, ancak daha önce de tartışıldığı gibi bu durum akış dinamiğini etkilemez).

Analiz İç bölgede Navier-Stokes denkleminin uygun bir yaklaşıtımları Euler denklemidir ve basınç alanı integral yoluyla bulunur. Örnek 10-3'te katı cisim dönmesi için,

$$\text{İç bölgelerdeki basınç alanı } (r < R): \quad P = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 \quad (2)$$



ŞEKİL 10-28

Bir hortum içerisindeki yatay bir kesit iki bölge ile modellenebilir: sürtünmesiz ancak dönümlü iç akış bölgesi ($r < R$) ve dönümlü bir dış akış bölgesi ($r > R$).

olduğunu göstermiştik. Burada P_0 , $r = 0$ 'daki (bilinmeyen) basınç olup yerçekimi terimi ihmal edilmiştir. Dış bölge dönümsüz bir akış bölgesi olduğundan Bernoulli denklemi uygundur ve $r = R$ 'dan $r \rightarrow \infty$ 'a kadar her noktada Bernoulli sabiti aynıdır. Bernoulli sabiti, hortumdan çok uzakta, yani $r \rightarrow \infty$, $u_\theta \rightarrow 0$ ve $P \rightarrow P_\infty$ şeklinde sınır şartı uygulanarak bulunur (Şekil 10–29). Buna göre Denklem 10–27,

$$r \rightarrow \infty \text{ olduğunda: } \underbrace{\frac{P}{\rho}}_{P_\infty/\rho} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{V \rightarrow 0 \text{ için } r \rightarrow \infty} + \underbrace{\cancel{\frac{\rho \omega^2 R^2}{2}}}_{\text{kabul 4}} = C \rightarrow C = \frac{P_\infty}{\rho} \quad (3)$$

sonucunu verir. Dış bölgede herhangi bir yerdeki basınç, Denklem 3'ten bulunan sabitin değerinin Bernoulli denkleminde (Denklem 10–27) yerine konulmasıyla elde edilir. Yerçekimi ihmal edilerek,

$$\text{Dış bölgede } (r > R): \quad P = \rho C - \frac{1}{2} \rho V^2 = P_\infty - \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (4)$$

sonucuna varılır. Burada $V^2 = u_\theta^2$ olduğuna dikkat ediniz. Denklem 1'deki u_θ 'nın da yerine yazılmasıyla Denklem 4,

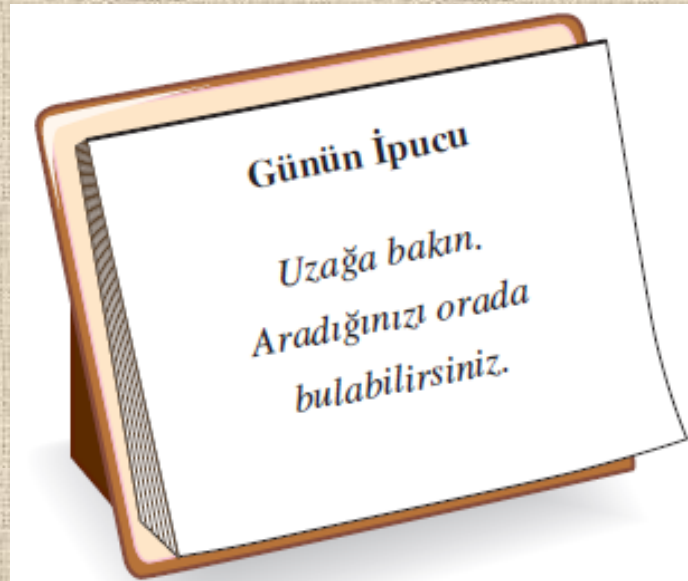
$$\text{Dış bölgede basınç alanı } (r > R): \quad P = P_\infty - \frac{\rho}{2} \frac{\omega^2 R^4}{r^2} \quad (5)$$

halini alır. $r = R$ 'de, yani iç ve dış bölgelerin arayüzünde, Şekil 10–30'da gösterildiği gibi basınçta süreklilik olmalıdır (basınçta ani sıçrama yoktur). Buna göre Denklem 2 ve Denklem 5'in bu arayüzde eşitlenmesiyle,

$$r = R \text{ 'deki basınç: } \quad P_{r=R} = \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} + P_0 = P_\infty - \frac{\rho}{2} \frac{\omega^2 R^4}{R^2} \quad (6)$$

elde edilir. Bu ifadeden $r = 0$ 'daki basınç P_0 ,

$$r = 0 \text{ 'daki basınç: } \quad P_0 = P_\infty - \rho \omega^2 R^2 \quad (7)$$



ŞEKİL 10–29

Bu problemde sınır şartlarını elde etmek için en uygun yer uzak alandır; bu durum akışkanlar mekaniğindeki birçok problem için geçerlidir.

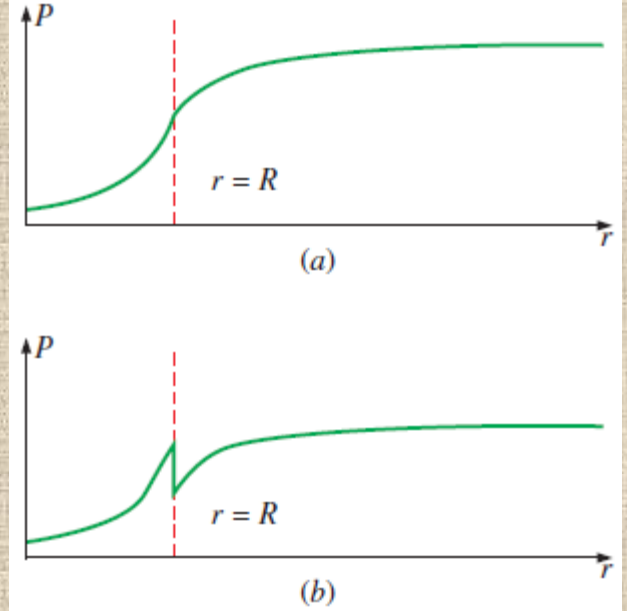
şeklinde bulunur. Denklem 7 hortumun merkezindeki (fırtına gözü) basıncın değerini verir. Bu değer akış alanındaki en düşük basıncıdır. Denklem 7 kullanılarak Denklem 2 verilen uzak alan çevre basıncı P_∞ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{İç bölgede } (r < R): \quad P = P_\infty - \rho\omega^2\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right) \quad (8)$$

Çizimin *herhangi bir* yatay kesitte geçerli olabilmesi için, verilen yatay kesitte P 'yi r 'nin fonksiyonu olarak çizmek yerine *boyutsuz* basınç dağılımını çizelim. Boyutsuz değişkenlere bağlı olarak,

$$\begin{aligned} \text{İç bölge } (r < R): \quad \frac{u_\theta}{\omega R} &= \frac{r}{R} \quad \frac{P - P_\infty}{\rho\omega^2 R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \\ \text{Dış bölge } (r > R): \quad \frac{u_\theta}{\omega R} &= \frac{R}{r} \quad \frac{P - P_\infty}{\rho\omega^2 R^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

sonuçları elde edilir. Şekil 10–31'de boyutsuz teğetsel hız ve boyutsuz basınç, boyutsuz radyal konumun fonksiyonu olarak gösterilmiştir.



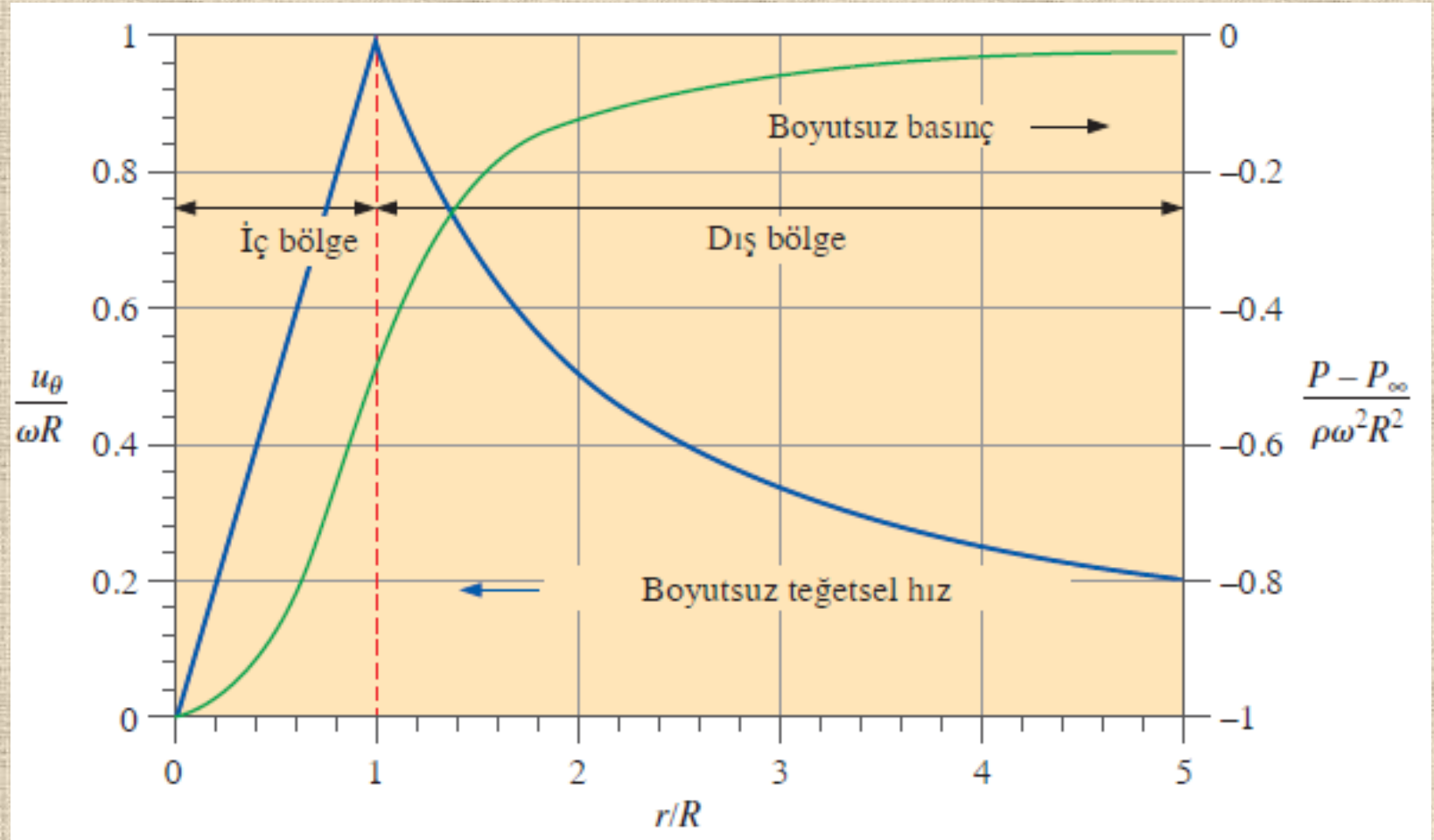
ŞEKİL 10–30

Hortum modelinin geçerli olabilmesi için $r = R$ 'deki basınç eğim süreksizliğine sahip olabilir, ancak burada ani bir değer sıçramasına sahip olamaz; (a) geçerli, (b) ise geçersizdir.

İrdeleme Dış bölgede her yerde *aynı* sabite sahip Bernoulli denkleminin doğrudan bir sonucu olarak bu bölgede hız azaldıkça basınç artar. Başka bir yolla, örneğin Bernoulli denklemini kullanmaksızın doğrudan Euler denklemini integre ederek dış bölgedeki basıncı hesaplamayı deneyiniz, aynı sonucu elde etmelisiniz. İç bölgede ise hız yarıçapla doğrusal olarak artarken basınç, r ile parabolik olarak artar. Bunun nedeni Bernoulli sabitinin (Örnek 10–3'te de işaret edildiği gibi) akım çizgisinden akım çizgisine değişmesidir. $r/R = 1$ 'de teğetsel hızın eğiminde bir süreksizlik olmasına rağmen, iç ve dış bölgeler arasında basıncın oldukça düzgün bir geçişe sahip olduğuna dikkat ediniz. Hortumun merkezinde basınç en düşük seviyededir ve uzak alanda atmosfer basıncına ulaşır (Şekil 10–32). Sonuç olarak iç bölgedeki akış, bu bölgede viskozite hiçbir rol oynamadığından dolayı *dönümlü* ancak *viskoz değildir*. Dış bölgedeki akış ise *dönümsüz* ve *viskoz değildir*. Bununla beraber, viskozitenin dış bölgede hâlâ akışkan parçacıkları üzerine etkili olduğuna dikkat ediniz. (Dış bölgedeki bir akışkan parçacığına etki eden *net viskoz kuvvet* sıfır olsa bile viskozite parçacıklarda kaymaya ve çarpılmaya neden olur).

En düşük basınç hortumun merkezinde oluşur ve bu bölgedeki akış katı cisim dönmesi olarak ele alınabilir.





Bir hortum içerisindeki yatay bir radyal kesit boyunca boyutsuz teğetsel hız bileşeni (mavi eğri) ve boyutsuz basınç dağılımı (siyah eğri). Akışın iç ve dış bölgeleri işaretlenmiştir.

İki-Boyutlu Dönümsüz Akış Bölgeleri

Yalnızca iki hareket yönünün önemli olduğu, üçüncü yönde kayda değer değişikliklerin bulunmadığı herhangi bir akış bölgesini iki-boyutlu kabul edebiliriz.

Buna en yaygın iki örnek :

düzlemsel akış (düzleme dik yöndeki değişimlerin ihmal edilebilir olduğu akış)

eksenel simetrik akış (bir eksen etrafında dönel simetrinin bulunduğu akış).

Ayrıca göz önüne alınan problemin geometrisine bağlı olarak kartezyen koordinatlarda, silindirik koordinatlarda veya küresel koordinatlarda çalışabiliriz.

İki-boyutlu akış üç-boyutlu akışın bir alt kümesidir; iki-boyutlu akış bölgelerinde bir akım fonksiyonu tanımlayabiliriz, ancak bunu üç-boyutlu akışlarda yapamayız. Bununla birlikte hız potansiyeli fonksiyonu herhangi bir dönümsüz akış bölgesinde tanımlanabilir.

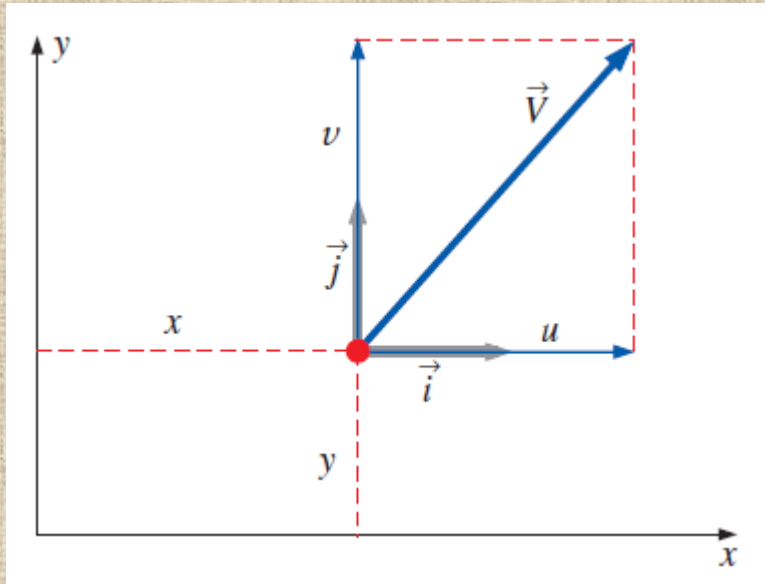
3-B dönümsüz akış bölgesinde:

- $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$
- $\nabla^2 \phi = 0$
- ψ tanımlı değildir

2-B dönümsüz akış bölgesinde:

- $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$
- $\nabla^2 \phi = 0$
- ψ tanımlıdır
- $\nabla^2 \psi = 0$

Düzlemsel Dönümsüz Akış Bölgeleri



Düzlemsel iki-boyutlu akış için (xy-düzleminde) kartezyen koordinatlardaki hız bileşenleri ve birim vektörler. Düzleme dik yönde bir değişim yoktur.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Akım fonksiyonu:

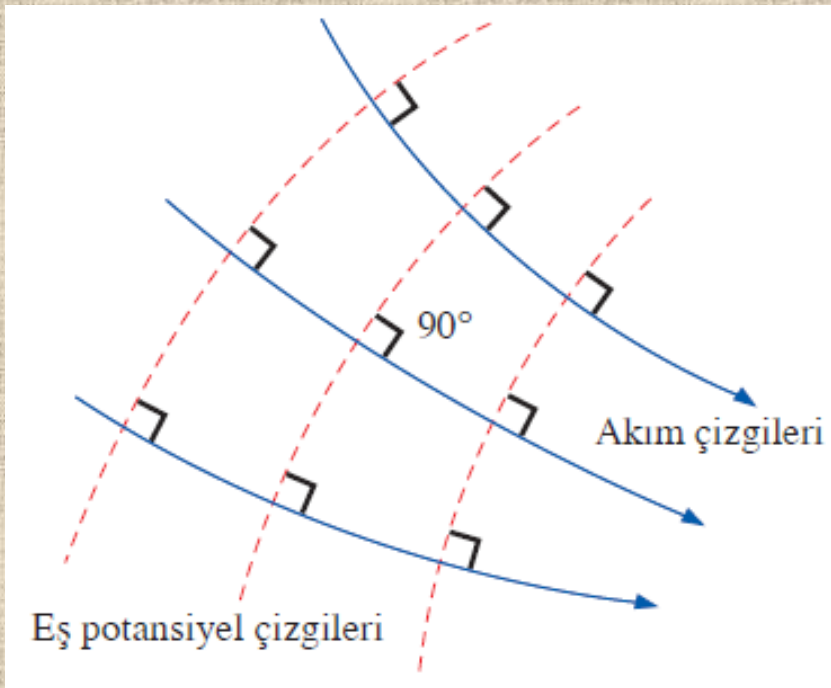
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

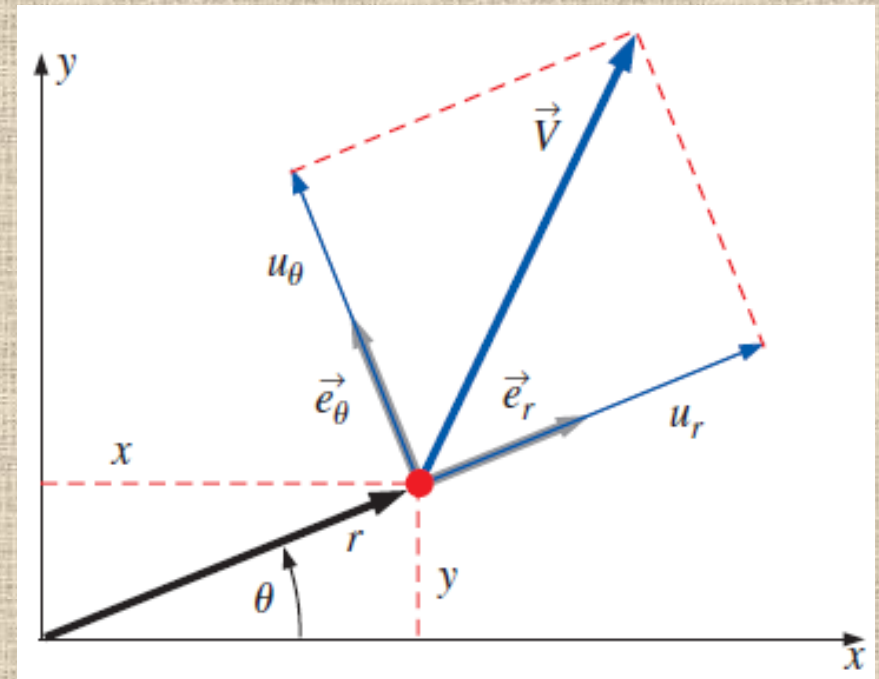
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

- Akım fonksiyonu süreklilik denklemi ile tanımlanır; ψ için Laplace denklemi dönümsüzlük şartından elde edilir.
- Hız potansiyeli dönümsüzlük şartı ile tanımlanır; ϕ için Laplace denklemi süreklilik denkleminde elde edilir.



Düzlemsel dönümsüz akış bölgelerinde sabit ϕ (eşpotansiyel çizgileri) ve sabit ψ eğrileri (akım çizgileri) karşılıklı olarak diktir, yani (karşılaştıkları) her yerde birbirlerini 90° açı ile keserler.

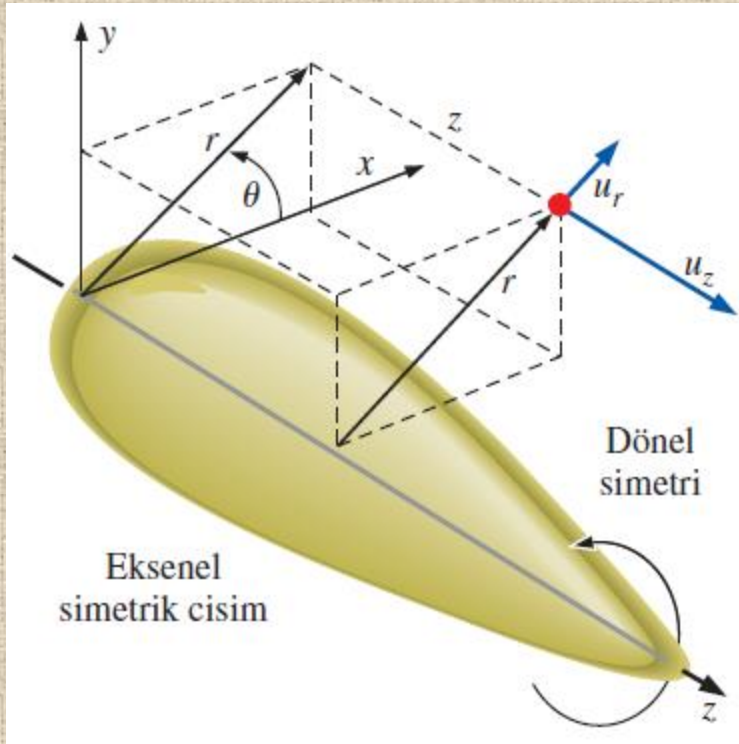


Düzlemsel iki-boyutlu akış için ($r\theta$ plane) silindirik koordinatlardaki hız bileşenleri ve birim vektörler. Düzleme dik yönde bir değişim yoktur.

Laplace denklemi (r, θ)' da düzlemsel akış:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Akım fonksiyonu:
$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Eksenel Simetrik Dönümsüz Akış Bölgeleri



Eksenel simetrik bir cisim üzerinde silindirik koordinatlarda z-ekseni etrafında dönel simetrik akış. Geometri ve hız alanı θ ya bağlı değildir, $u_\theta = 0$ dır.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Akım fonksiyonu:

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Düzlemsel dönümsüz akış bölgeleri için Laplace denklemi hem ϕ hem de ψ için geçerlidir; ancak eksenel simetrik dönümsüz akış bölgeleri için Laplace denklemi ϕ için geçerli ancak ψ için geçersizdir.

UYARI!

EKSENEL SİMETRİK AKIŞTA AKIM FONKSİYONU LAPLACE DENKLEMİ İLE İFADE EDİLMEZ

Eksenel simetrik
dönümsüz akıştaki
akım fonksiyonu
denklemi (Denklemler
10-34) Laplace
denklemi değildir.

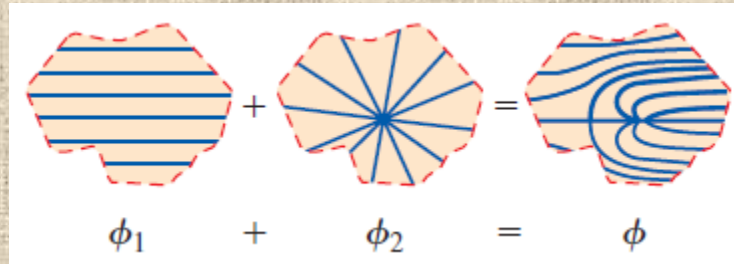
İki-Boyutlu Dönümsüz Akış Bölgelerinin Özeti

Çeşitli koordinat sistemlerinde hız potansiyeli fonksiyonu ve akım fonksiyonuna bağlı olarak daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu dönümsüz akış bölgeleri için hız bileşenleri

Tanım ve Koordinat Sistemi	Hız bileşeni 1	Hız bileşeni 2
Düzlemsel; kartezyen koordinatlar	$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$	$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
Düzlemsel; silindirik koordinatlar	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$	$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$
Eksenel simetrik; silindirik koordinatlar	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$	$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$

Dönümsüz Akış Bölgelerinin Süperpozisyonu

Eğer dönümsüz bir akış bölgesi iki veya daha fazla ayrı dönümsüz akış alanlarının toplamı ile modelleniyorsa (örneğin serbest-akım içerisinde yerleştirilmiş bir kaynak) birleşik akış alanını tarif etmek için her bir akışın hız potansiyeli fonksiyonları toplanabilir.



İki ya da daha fazla dönümsüz akış çözümünün (daha karmaşık olan) bir üçüncü çözümü oluşturmak üzere toplanması işlemine **süperpozisyon** denir.

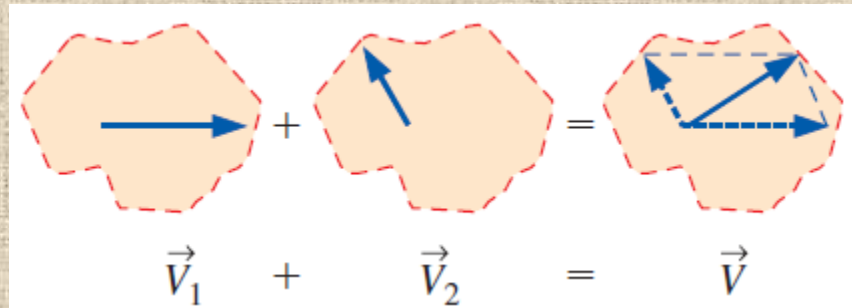
İki dönümsüz akış alanının süperpozisyonu:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2$$

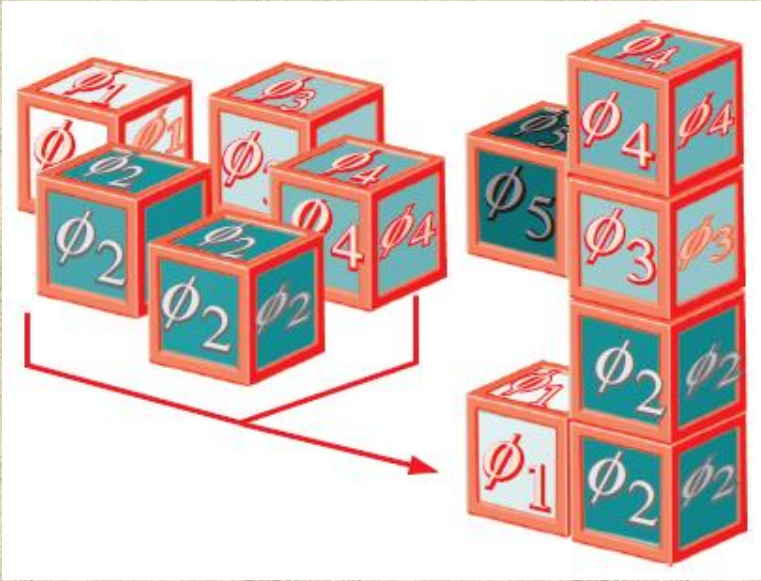
Süperpozisyon ile birleşik hız alanı :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$



Dönümsüz akış çözümlerinin süperpozisyonunda akış alanının herhangi bir noktasındaki iki hız vektörü, bu noktadaki birleşik hızı meydana getirmek üzere vektörel olarak toplanır.

Temel Düzlemsel Dönümsüz Akışlar



Süperpozisyon yoluyla dönümsüz temel “yapıtaşı” akış alanlarını toplayarak karmaşık bir dönümsüz akış alanı oluşturabiliriz.

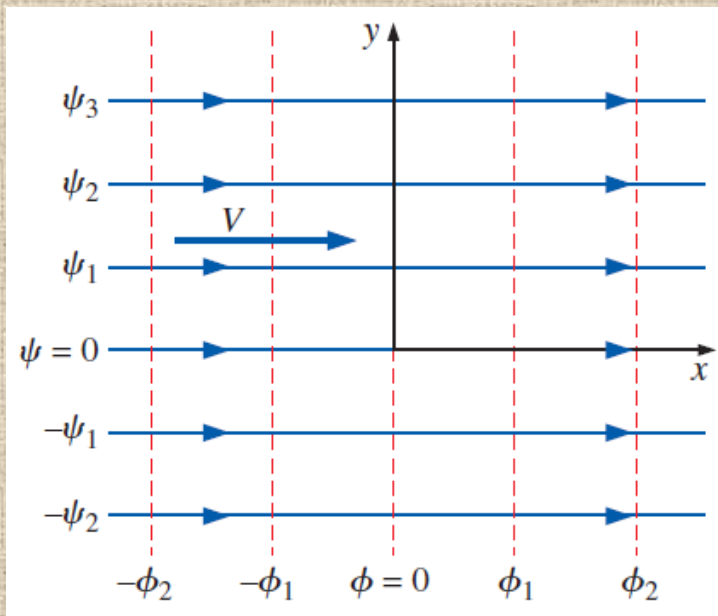
Yapıtaşı 1—Üniform Akım

Üniform akım:
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\phi = Vx + f(y) \quad \rightarrow \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad f(y) = \text{sabit}$$

Bir üniform akım için hız potansiyeli fonksiyonu:
$$\phi = Vx$$

Bir üniform akım için akım fonksiyonu:
$$\psi = Vy \quad (10-37)$$



Bir uniform akım için x-yönündeki akım çizgileri (sürekli) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli).

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dönüşüm:

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$$

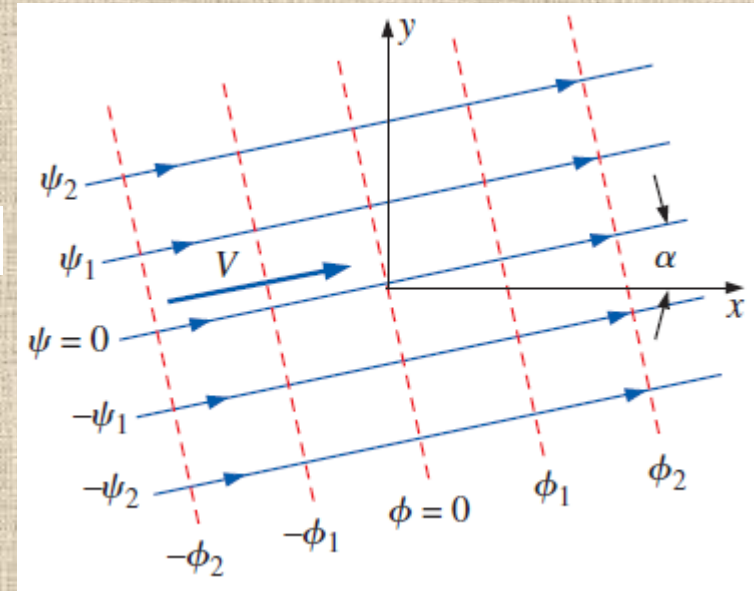
Üniform akım:

$$\phi = Vr \cos \theta \quad \psi = Vr \sin \theta$$

α eğim açılı üniform akım:

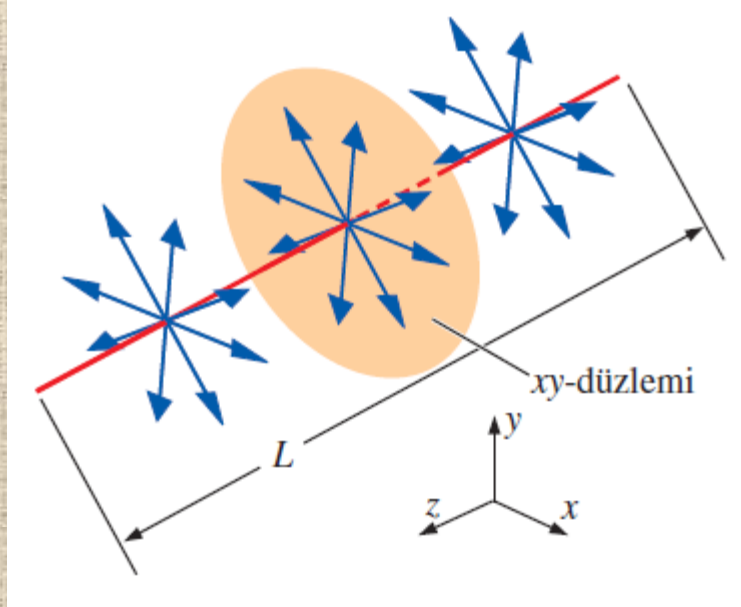
$$\phi = V(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

$$\psi = V(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$$

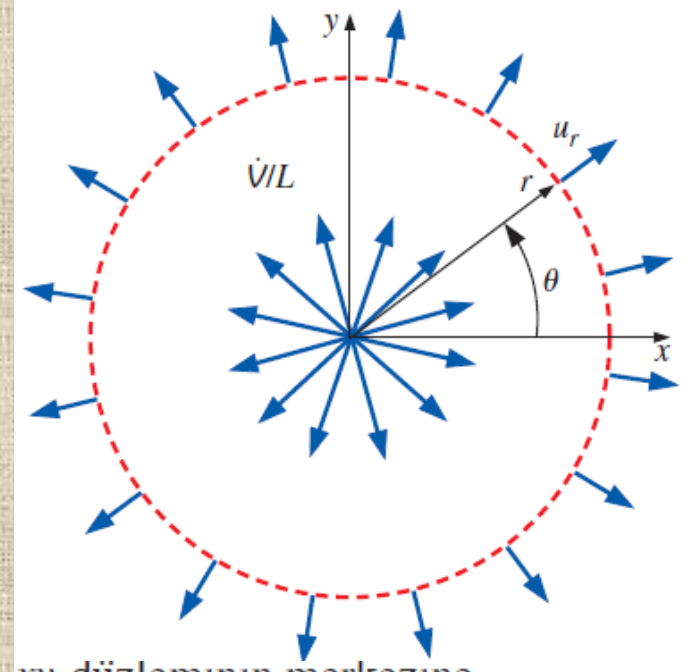


α Eğim açılı uniform akım için akım çizgileri (sürekli) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli).

Yapıtaşı 2—Çizgisel Kaynak ve Çizgisel Kuyu



L uzunluğunda sonlu bir çizgi parçasından üniform olarak doğan akışkan. L sonsuza yaklaştıkça, akış çizgisel kaynak durumuna gelir ve xy -düzlemi kaynak eksenine dik yönde alınır.



Çizgisel kaynak: Akışkanın dışarı sızdığı çizgiye.

Çizgisel kaynak şiddeti: Birim derinlik başına debi.

Çizgisel kuyu: çizgisel kaynağın karşıtı olup bu durumda akışkan çizgisel kuyu eksenine dik olan düzlemlerde tüm yönlerden çizgi içerisine doğru akar.

xy -düzleminin merkezine yerleştirilmiş $\dot{V}/L$ şiddetindeki çizgisel kaynak; herhangi bir r yarıçaplı çemberden birim derinlik başına geçen toplam hacimsel debi, r değerinden bağımsız olarak $\dot{V}/L$ 'ye eşit olmalıdır.

$$\frac{\dot{V}}{L} = 2\pi r u_r \quad u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r}$$

Paydada bulunan r , orijinde sıfır olduğundan u_r 'nin bu noktada sonsuza gideceğine dikkat ediniz. Bu noktaya **tekil nokta** veya **tekillik** adı verilir.

Çizgisel kaynak:
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

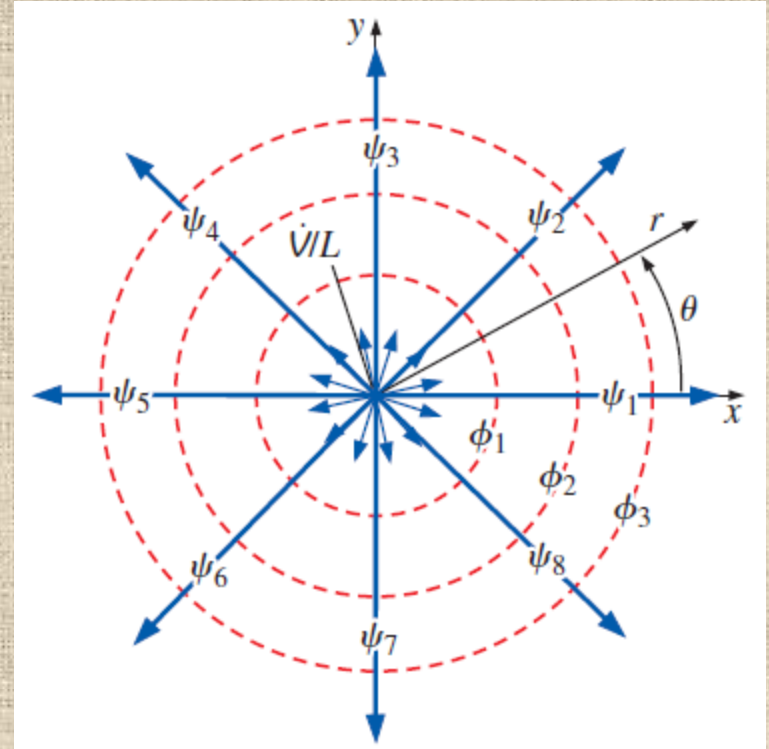
$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = f(\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = f'(\theta) = r u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}$$

$$f(\theta) = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta + \text{sabit}$$

Merkezdeki çizgisel kaynak:

$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln r \quad \text{ve} \quad \psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta$$

xy -düzleminde merkeze yerleştirilen $\dot{V}/L$ şiddetindeki bir çizgisel kaynak için akım çizgileri (sürekli çizgi) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli çizgi).

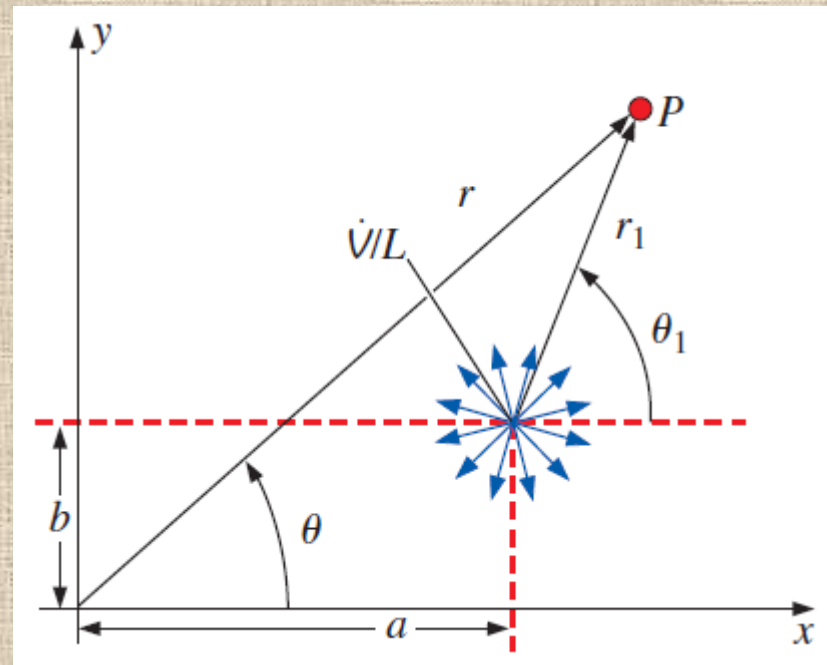


*(a, b) noktasındaki
çizgisel kaynak:*

$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln r_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{y-b}{x-a}$$
(10-44)

*xy-düzleminde keyfi bir (a, b)
noktasına yerleştirilen $\dot{V}/L$
şiddetindeki çizgisel kaynak.*



ÖRNEK 10-5 Eş Şiddetli Kaynak ile Kuyunun Süperpozisyonu

Şekil 10-48'de gösterildiği gibi, $(-a, 0)$ noktasında $\dot{V}/L$ şiddetinde bir çizgisel kaynak ile $(a, 0)$ noktasında aynı şiddete sahip (ancak ters işaretli) bir çizgisel kuyudan oluşan dönümsüz akış bölgesini göz önüne alınız. Akım fonksiyonu için hem kartezyen hem de silindirik koordinatlarda bir ifade oluşturunuz.

ÇÖZÜM Bir kaynak ve bir kuyunun süperpozisyonunu yapacak ve ψ için kartezyen ve silindirik koordinatlarda birer ifade elde edeceğiz.

Kabuller Göz önüne alınan akış bölgesi sıkıştırılamaz ve dönümsüzdür.

Analiz Kaynak için ψ 'yi elde etmek üzere Denklem 10-44'ü kullanalım,

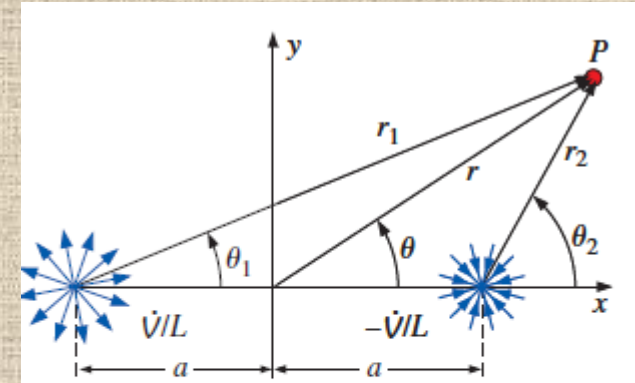
$$(-a, 0)'daki \text{çizgisel kaynak: } \psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 \text{ bu ifadede } \theta_1 = \arctan \frac{y}{x + a} \quad (1)$$

Benzer şekilde kuyu için,

$$(a, 0)'daki \text{kuyu: } \psi_2 = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \theta_2 \text{ bu ifadede } \theta_2 = \arctan \frac{y}{x - a} \quad (2)$$

yazabiliriz. Süperpozisyon işlemi bize birleşik akım fonksiyonunu elde etmek üzere bu iki akım fonksiyonunu (Denklem 1 ve 2) basit bir biçimde toplama imkanı tanır:

$$\text{Birleşik akım fonksiyonu: } \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$



ŞEKİL 10-48

$(-a, 0)$ 'da bulunan $\dot{V}/L$ şiddetindeki bir çizgisel kaynak ile $(a, 0)$ 'da bulunan $-\dot{V}/L$ şiddetindeki bir çizgisel kuyunun süperpozisyonu.

Denklem 3'ü yeniden düzenler ve her iki tarafın tanjantını alırsak,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (4)$$

elde ederiz. Burada bir trigonometrik özdeşlik kullandık (Şekil 10-49).

Şimdi de Denklem 1 ve 2'den θ_1 ve θ_2 'yi alıp bu ifadede yerine yazar ve akım fonksiyonunu elde etmek için bazı cebirsel işlemler yaparsak,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a} \frac{y}{x-a}} = \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

sonucuna varırız. Sonrasında eşitliğin her iki tarafının ters tanjantı alınarak

$$\text{Nihai sonuç, kartezyen koordinatlar: } \psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (5)$$

elde edilir. Denklem 10-38'i kullanarak bunu silindirik koordinatlara dönüştürebiliriz:

$$\text{Nihai sonuç, silindirik koordinatlar: } \psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \quad (6)$$

İrdeleme Eğer kaynak ve kuyunun yerleri değiştirilirse, kaynak şiddeti $\dot{V}/L$ önündeki negatif işaretin kalkması dışında sonuç aynı olur.

Faydalı Trigonometrik Özdeşlikler

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

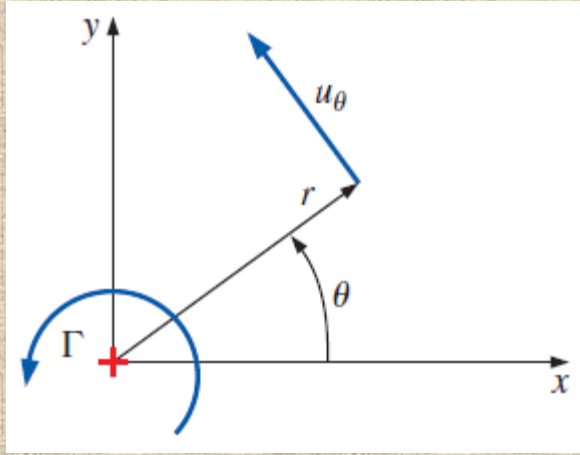
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \beta \cot \alpha - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

Bazı faydalı trigonometrik özdeşlikler.

Yapıtaşı 3—Çizgisel Vorteks



xy -düzleminin merkezine yerleştirilen Γ şiddetinde çizgisel vorteks.

Çizgisel vorteks: $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

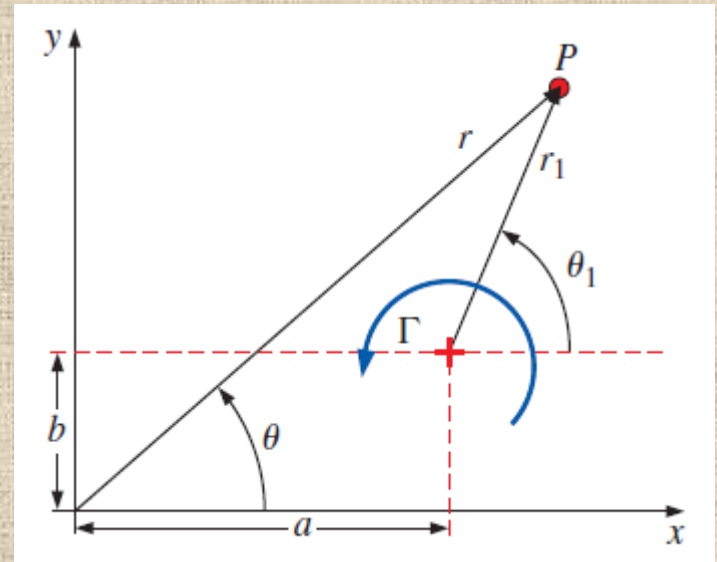
olup burada Γ 'ya **sirkülasyon** veya **vorteks şiddeti** adı verilir.

Merkezdeki çizgisel vorteks: $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

(a, b) noktasındaki çizgisel vorteks:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y - b}{x - a}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$



xy -düzlemindeki keyfi bir (a, b) noktasına yerleştirilmiş Γ şiddetinde çizgisel vorteks.

ÖRNEK 10-6 Bir Akışta Üç Bileşenden Oluşan Hız

Dönümsüz bir akış bölgesi; $(x, y) = (0, 1)$ 'de şiddeti $(\dot{V}/L)_1 = 2.00 \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir çizgisel kaynak, $(x, y) = (1, -1)$ 'de şiddeti $(\dot{V}/L)_2 = -1.00 \text{ m}^2/\text{s}$ olan başka bir çizgisel kaynak ve $(x, y) = (1, 0)$ 'de şiddeti $\Gamma = 1.50 \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir çizgisel vorteksin süperpozisyonundan oluşmaktadır. [2 numaralı kaynak $(\dot{V}/L)_2$ negatif olduğundan aslında bir kuyudur]. Tüm konum koordinatları metre cinsinden verilmiştir. Üç yapıtaşı bloğunun konumları Şekil 10-52'de gösterilmiştir. $(x, y) = (1, 0)$ noktasındaki akışkan hızını hesaplayınız.

ÇÖZÜM İki çizgisel kaynak ile bir vorteksin süperpozisyonu için $(x, y) = (1, 0)$ noktasındaki hız hesaplanacaktır.

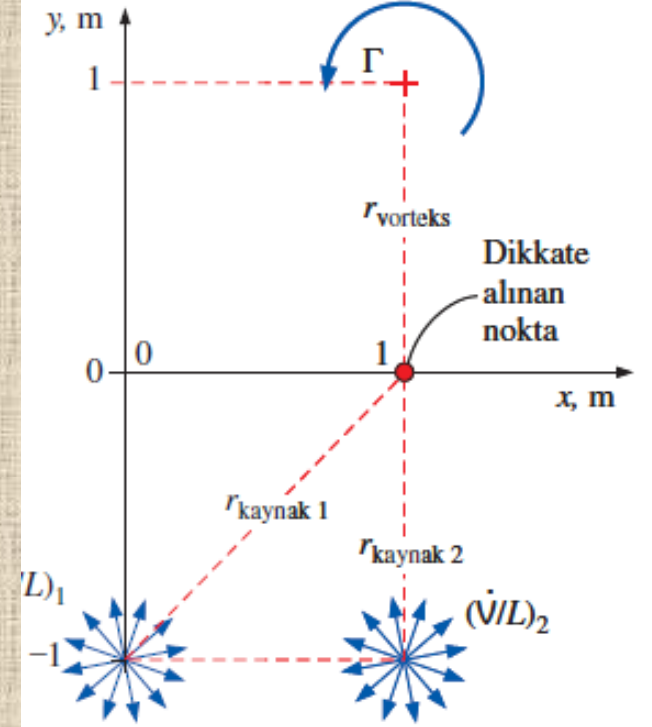
Kabuller 1 Modellenen akış bölgesi daimi, sıkıştırılamaz ve dönümsüzdür. 2 Her bir bileşenin verilen konumundaki hızı sonsuzdur (bunlar tekil noktalardır) ve bu tekil noktalar civarındaki akış fiziksel değildir, ancak yapılacak analizde bu bölgeler göz ardı edilmektedir.

Analiz Bu problemi çözmek için birkaç yol vardır. Denklem 10-44 ve Denklem 10-47'yi kullanarak üç akım fonksiyonunu toplar, ardından hız bileşenlerini elde etmek için birleşik akım fonksiyonunun türevlerini alabiliriz. Alternatif olarak aynı şeyi hız potansiyeli fonksiyonu için yapabiliriz. Daha kolay bir yaklaşım ise hızın *kendisinin* süperpozisyon edilebildiğini dikkate almaktır. Bu amaçla, verilen bir noktadaki birleşik hızı oluşturmak için üç temel akışın her birinin neden olduğu hız vektörlerini toplayabiliriz. Yapılan işlem Şekil 10-53'te gösterilmiştir. Vorteks $(1, 0)$ noktasının 1 m yukarısına yerleştirildiğinden vorteksin neden olduğu hız sağa doğru olup,

$$V_{\text{vorteks}} = \frac{\Gamma}{2\pi r_{\text{vorteks}}} = \frac{1.50 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi(1.00 \text{ m})} = 0.239 \text{ m/s} \quad (1)$$

büyüklüğüne sahiptir. Benzer şekilde ilk kaynak Şekil 10-53'te gösterildiği gibi $(1, 0)$ noktasında x-ekseni ile 45° açı yapan bir hıza neden olur ve bu hızın büyüklüğü,

$$V_{\text{kaynak 1}} = \frac{|(\dot{V}/L)_1|}{2\pi r_{\text{kaynak 1}}} = \frac{2.00 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi(\sqrt{2} \text{ m})} = 0.225 \text{ m/s} \quad (2)$$



ŞEKİL 10-52
xy-düzleminde iki çizgisel kaynak ile bir çizgisel vorteksin süperpozisyonu (Örnek 10-6).

olur. Son olarak ikinci kaynak (kuyu) aşağı doğru dik ve

$$V_{\text{kaynak 2}} = \frac{|\dot{V}/L|_2}{2\pi r_{\text{kaynak 2}}} = \frac{|-1.00 \text{ m}^2/\text{s}|}{2\pi(1.00 \text{ m})} = 0.159 \text{ m/s} \quad (3)$$

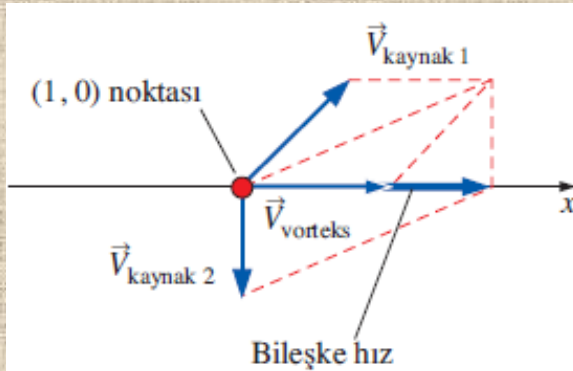
büyükliğünde bir hıza neden olur. Bu hızlar, Şekil 10–54'te gösterildiği gibi paralelkenarı tamamlamak suretiyle vektörel olarak toplanabilir. Denklem 10–35'i kullanarak bileşke hız,

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{vorteks}} + \vec{V}_{\text{kaynak 1}} + \vec{V}_{\text{kaynak 2}} = (0.398\vec{i} + 0\vec{j}) \text{ m/s} \quad (4)$$

$$0.239\vec{i} \text{ m/s} \left(\frac{0.225}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{0.225}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) \text{ m/s} - 0.159\vec{j} \text{ m/s}$$

olarak bulunur. Buna göre (1, 0) noktasında süperpozisyon yoluyla bulunan hız 0.398 m/s ve sağa doğrudur.

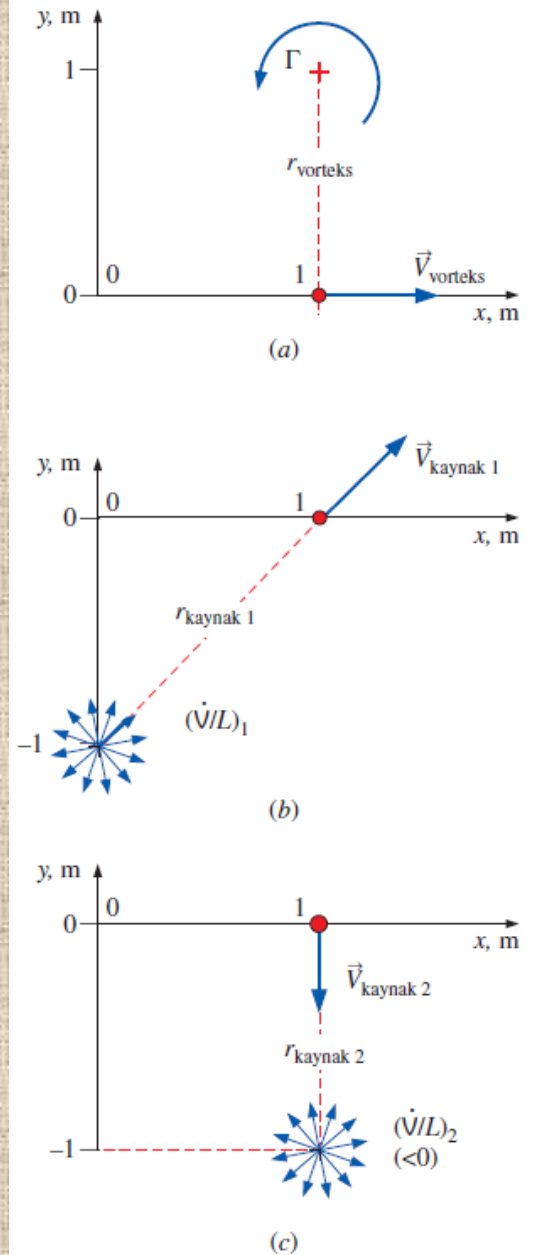
İrdeleme Bu örnek, tıpkı akım fonksiyonu veya hız potansiyeli fonksiyonu gibi hızın da süperpozisyon edilebileceğini göstermektedir. ϕ ve ψ 'ye ait olan diferansiyel denklemlerin *lineer* olması, buna bağlı olarak türevlerinin de lineer olmasından ötürü hız süperpozisyonu dönümsüz akış bölgelerinde geçerlidir.



ŞEKİL 10–54

Örnek 10-6'da oluşan üç hızın vektörel toplamı.

(a) Vorteks, (b) kaynak 1 ve (c) kaynak 2 nedeniyle oluşan hız (kaynak 2'nin *negatif* olduğuna dikkat ediniz) (Örnek 10-6).



Yapıtaşı 4—İkili

Birleşik akım fonksiyonu:

$$\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2}$$

$a \rightarrow 0$ için akım fonksiyonu:

$$\psi \rightarrow \frac{-a(\dot{V}/L)r \sin \theta}{\pi(r^2 - a^2)}$$

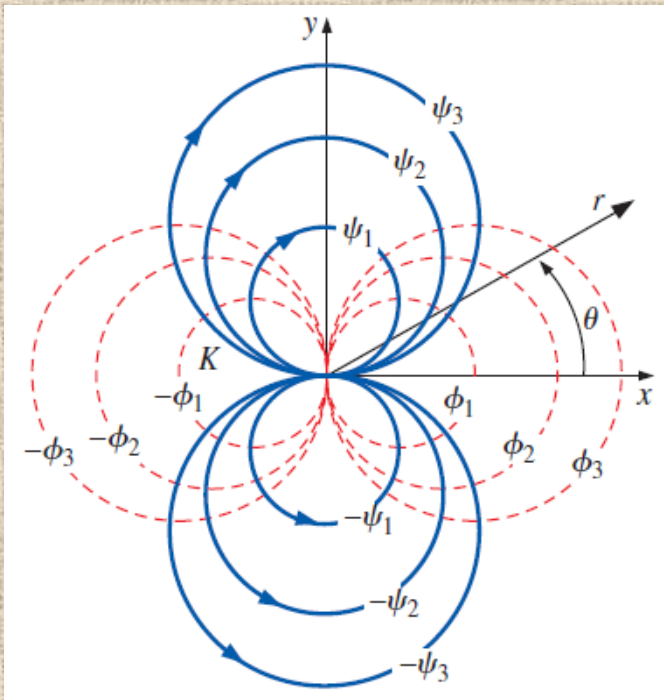
x -ekseni boyunca ikili:

$$\psi = \frac{-a(\dot{V}/L)}{\pi} \frac{\sin \theta}{r} = -K \frac{\sin \theta}{r}$$

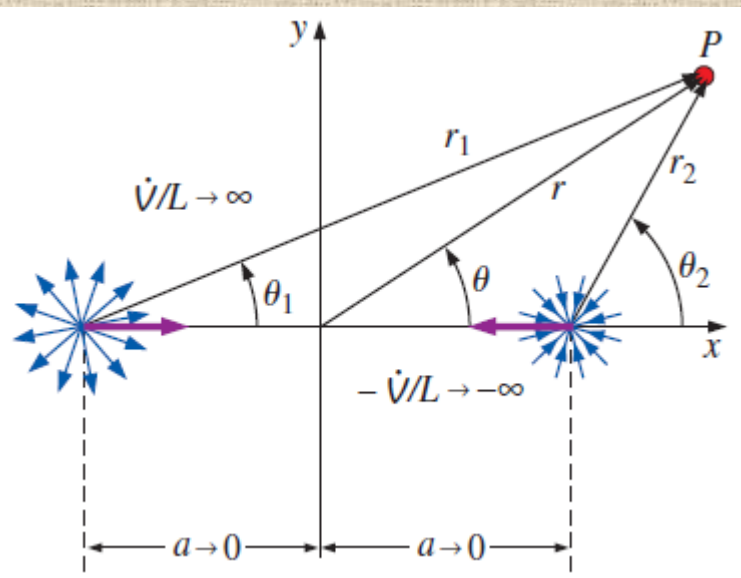
ikili şiddeti $K = a(\dot{V}/L)/\pi$

x -ekseni boyunca ikili:

$$\phi = K \frac{\cos \theta}{r}$$



xy -düzleminde ve x -ekseniyle hizalanmış K şiddetine sahip merkezdeki bir ikilini için akım çizgileri (sürekli çizgiler) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli çizgiler).



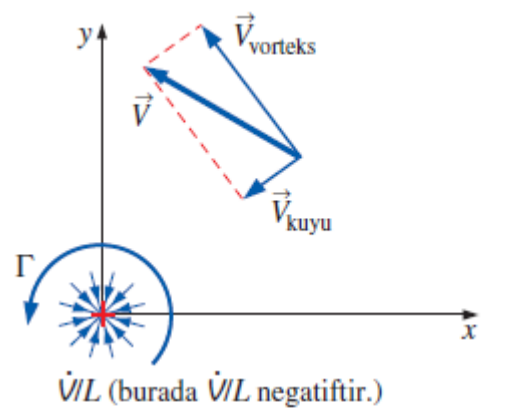
Bir ikili; $(-a, 0)$ 'daki bir çizgisel kaynak ile $(a, 0)$ 'daki bir çizgisel kuyunun süperpozisyonundan oluşturulur; $a\dot{V}/L$ çarpımı sabit kalacak şekilde a sıfıra yaklaştıkça $\dot{V}/L$ sonsuza yaklaşır.

Süperpozisyon ile Oluşturulan Dönümsüz Akışlar

Dönümsüz akışlar için bir dizi yapıtaşına sahip olduğumuza göre, şimdi süperpozisyon tekniği ile daha ilginç dönümsüz akış alanlarını oluşturmaya hazırız demektir.

Burada vereceğimiz örnekleri xy -düzlemindeki düzlemsel akışlar ile sınırıyoruz.

Bir Çizgisel Kuyu ile Bir Çizgisel Vorteksin Süperpozisyonu



ŞEKİL 10-57

Merkeze yerleştirilmiş $\dot{V}/L$ şiddetinde bir çizgisel kaynak ile Γ şiddetinde bir çizgisel vorteksin süperpozisyonu. Vektörel hız toplamı xy -düzleminde herhangi bir noktada gösterilmiştir.

Süperpozisyon:

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

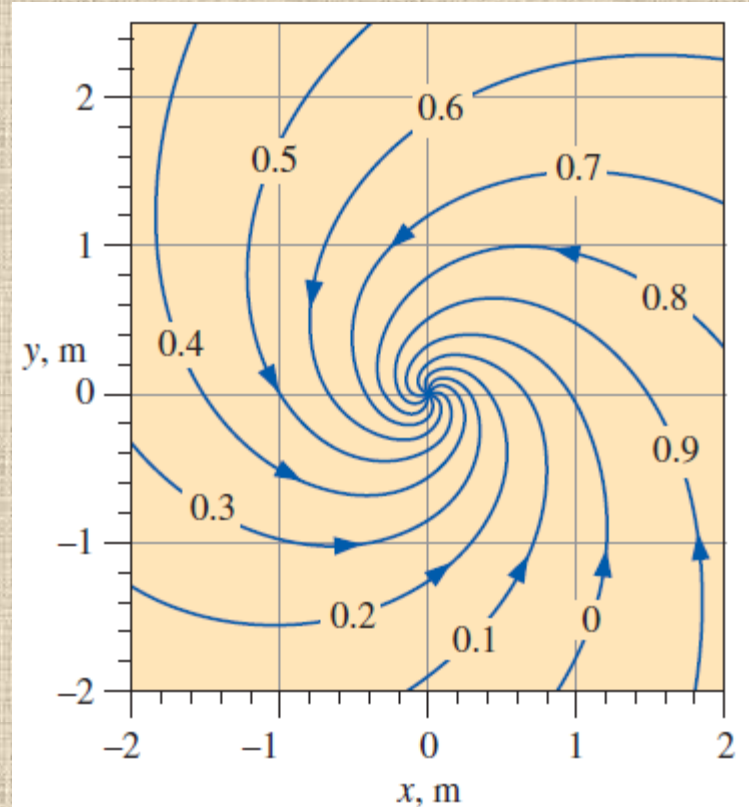
Akım çizgileri:

$$r = \exp\left(\frac{(\dot{V}/L)\theta - 2\pi\psi}{\Gamma}\right)$$

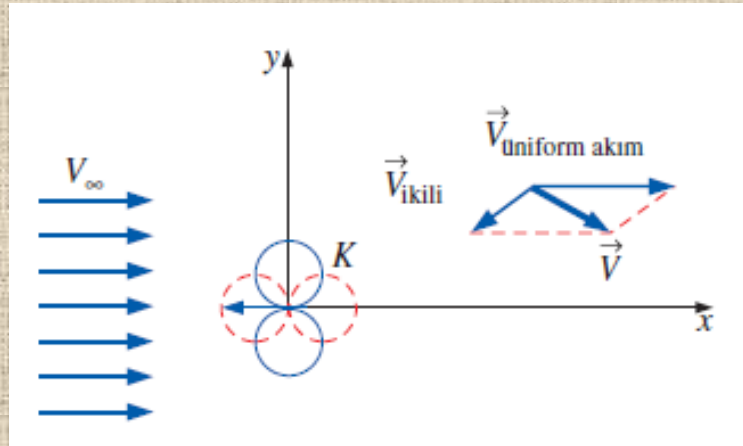
Hız bileşenleri:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Merkezdeki bir çizgisel kuyu ile bir çizgisel vorteksin süperpozisyonu ile oluşturulan akım çizgileri. ψ için verilen değerler m^2/s birimindedir.



Bir Üniorm Akım ile Bir İkiliin Süperpozisyonu— Bir Silindir Üzerinden Akış



Bir üniorm akım ile bir ikiliin süperpozisyonu; vektörel hız toplamı xy -düzleminde herhangi bir keyfi noktada gösterilmiştir.

Süperpozisyon:

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta - K \frac{\sin \theta}{r}$$

İkili şiddeti:

$$K = V_{\infty} a^2$$

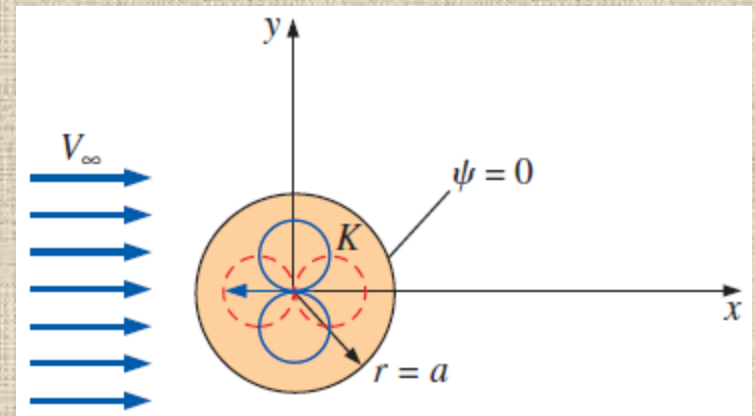
Akım fonksiyonun alternative formu:

$$\psi = V_{\infty} \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{V_{\infty} a} \quad r^* = \frac{r}{a} \quad \theta \quad \psi^* = \sin \theta \left(r^* - \frac{1}{r^*} \right)$$

Boyutsuz akım çizgileri:

$$r^* = \frac{\psi^* \pm \sqrt{(\psi^*)^2 + 4 \sin^2 \theta}}{2 \sin \theta}$$

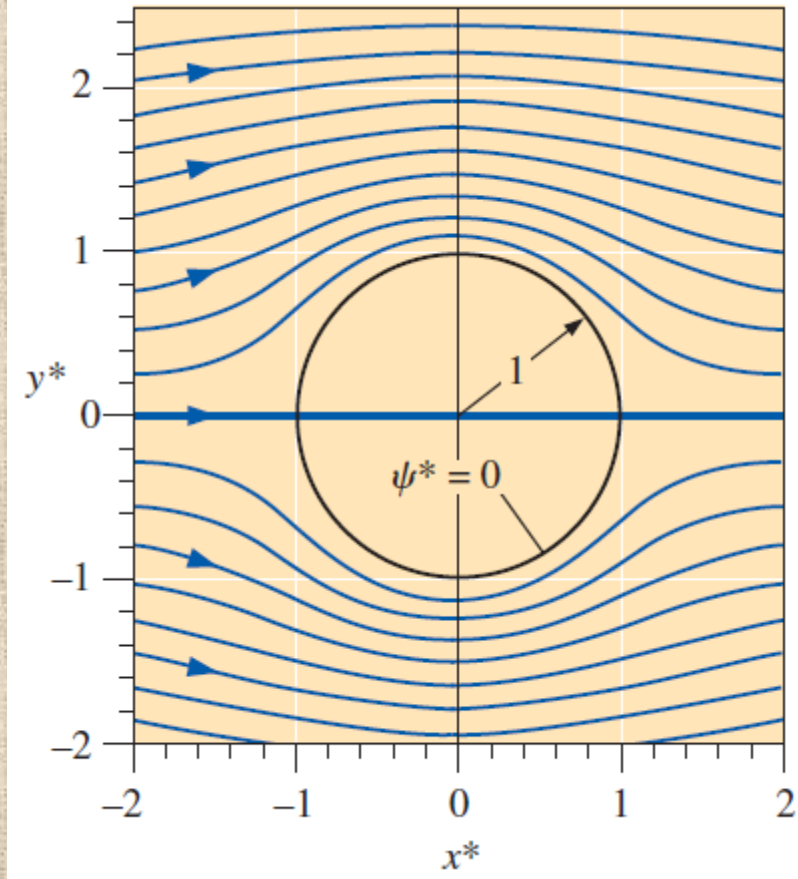


Bir uniform akım ile bir ikiliin süperpozisyonu daire şeklinde bir akım çizgisi meydana getirir.

Bu akış bir **silindir**
üzerinden olan potansiyel
akışı temsil eder.

Bu akış alanında biri
silindirin önünde, diğeri de
arkasında olmak üzere iki
adet durma noktası vardır.

Bir üniform akım ile merkezdeki
bir ikilinin süperpozisyonu ile
oluşturulan boyutsuz akım çizgileri;
 $\psi^* = \psi/(V_\infty a)$, $\Delta\psi^* = 0.2$, $x^* = x/a$
ve $y^* = y/a$ olup a silindir yarıçapıdır.



$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Silindir yüzeyi
üzerinde:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = -2V_\infty \sin \theta$$

ÖRNEK 10-7 Bir Silindir Üzerindeki Basınç Dağılımı

Dönümsüz akış yaklaşırtımını kullanarak V_∞ hızında bir serbest akım içerisinde yerleştirilen a yarıçaplı bir silindirin yüzeyi üzerindeki boyutsuz statik basınç dağılımını hesaplayınız ve çiziniz (Şekil 10-62). Elde ettiğiniz sonuçları tartışınız. Silindirden uzakta basınç P_∞ 'dur.

ÇÖZÜM Bir serbest akıma bırakılan dairesel bir silindir yüzeyi boyunca olan boyutsuz statik basınç dağılımını hesaplayıp çizeceğiz.

Kabuller 1 Modellenen akış bölgesi daimi, sıkıştırılmaz ve dönümsüzdür. 2 Akış xy -düzleminde iki-boyutludur.

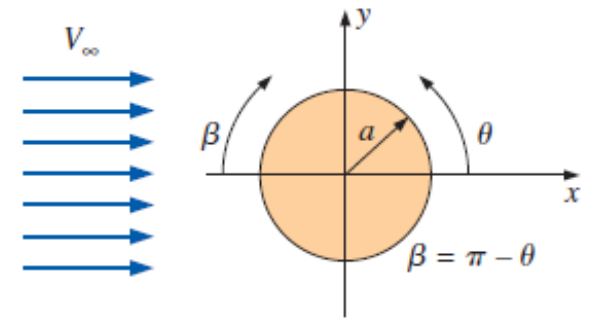
Analiz Her şeyden önce, statik basınç akış ile hareket eden bir basınç probuyla ölçülen basınçtır. Deneyisel olarak biz bu basıncı bir yüzeyde, yüzeye dik yönde açılmış küçük bir delik olan **statik basınç prizi** kullanarak ölçeriz (Şekil 10-63). Bu deliğin diğer ucunda bir basınç ölçme cihazı bulunur. Bir silindir yüzeyi boyunca olan statik basınç dağılımına ait deneyisel veriler literatürde mevcut olduğundan sonuçlarımızı bu deneyisel veriler ile karşılaştıracacağız.

Bölüm 7'de boyutsuz basınç **basınç katsayısı** olarak ifade edilmişti:

$$\text{Basınç katsayısı : } C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \quad (1)$$

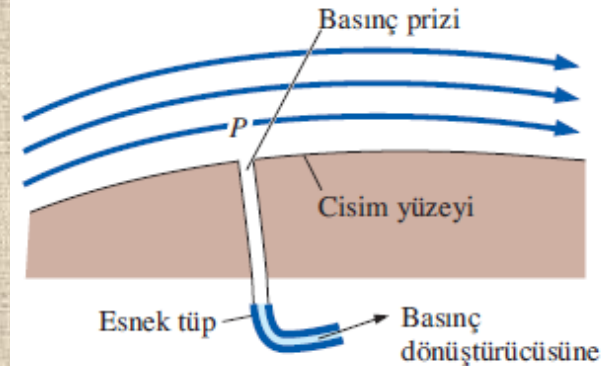
Göz önüne alınan bölgede akış *dönümsüz* olduğundan akış alanındaki herhangi bir yerdeki basıncı hesaplamak için Bernoulli denklemini (Denklem 10-27) kullanabiliriz. Yerçekimi etkilerini göz ardı ederek,

$$\text{Bernoulli denklemi: } \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{sabit} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (2)$$



ŞEKİL 10-62

xy -düzleminde V_∞ üniform hızındaki bir serbest akıma bırakılan a yarıçaplı dairesel silindir üzerinden düzlemsel akış. Kural olarak β açısı silindirin önünden itibaren tanımlanmıştır.



ŞEKİL 10-63

Bir yüzey üzerindeki statik basınç, manometreye veya bir elektronik basınç dönüştürücüsüne bağlı bir statik basınç prizi kullanılarak ölçülür.

yazılabilir. Denklem 2'yi yeniden düzenleyip Denklem 1'de yerine yazarsak,

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \quad (3)$$

sonucuna varırız. Silindir yüzeyi boyunca $V^2 = u_\theta^2$ olduğundan daha önce bulduğumuz silindir üzerindeki teğetsel hız ifadesini (Denklem 10-59) yerine koymak suretiyle Denklem 3,

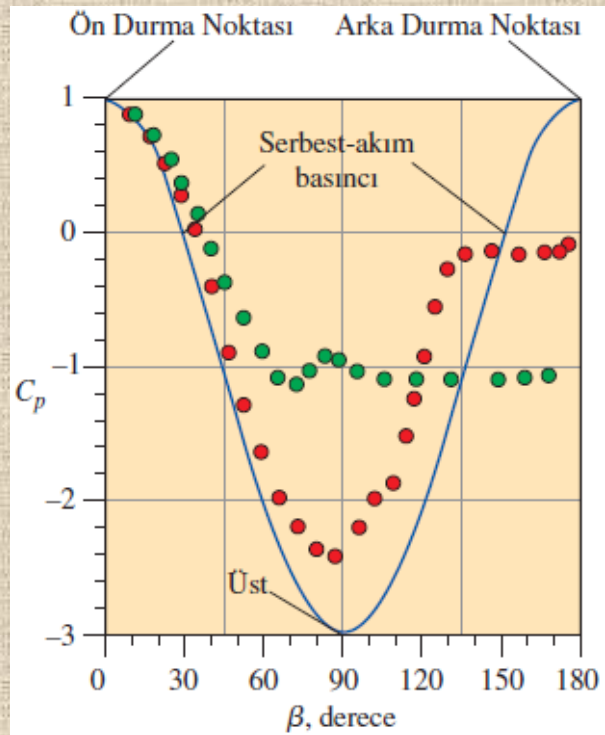
Yüzey basınç katsayısı:
$$C_p = 1 - \frac{(-2V_\infty \sin \theta)^2}{V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

haline gelir. Yüzey basınç katsayısını silindirin ön yüzünden itibaren tanımlanan β açısına bağlı olarak (Şekil 10-62) ifade etmek için $\beta = \pi - \theta$ dönüşümü yapılırsa,

β cinsinden C_p :
$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \beta \quad (4)$$

sonucu elde edilir. Şekil 10-64'te silindirin üst yarısı üzerindeki basınç katsayısı (sürekli mavi eğri) β 'nin fonksiyonu olarak çizilmiştir. (Yukarıdan aşağı simetri olduğundan silindirin alt yarısındaki basınç dağılımını çizmek gereksizdir). Şekilde göze çarpan ilk durum, basınç dağılımının önden arkaya simetrik oluşudur. Zaten daha önceden *akım çizgilerinin* de önden arkaya simetrik olduğunu bildiğimizden bu sonuç sürpriz değildir (Şekil 10-61).

Ön ve arka durma noktaları (sırasıyla $\beta = 0^\circ$ ve $\beta = 180^\circ$) Şekil 10-64'te işaretlenmiştir. Buralarda basınç katsayısı 1'dir ve bu iki nokta, akış alanındaki en yüksek basınca sahiptir. Fiziksel değişkenler cinsinden durma noktalarındaki statik basınç $P_\infty + \rho V_\infty^2/2$ değerine eşittir. Diğer bir ifadeyle gelen akışın **tam dinamik basınç** değeri (ayrıca **vuruş basıncı** olarak da adlandırılır), akışkan durma noktasında sıfır hızına yavaşlarken (negatif ivme), cismin burunda statik basınç olarak hissedilir. Silindirin en üstünde ($\beta = 90^\circ$) yüzey boyunca olan hız, serbest akım hızının iki katıdır ($\beta = 90^\circ$) ve basınç katsayısı bu noktada en düşük değerine iner ($C_p = -3$). $C_p = 0$ olan iki nokta da ($\beta = 30^\circ$ ve 150°) Şekil 10-64'te gösterilmiştir. Bu konumlardaki statik basınçlar serbest akım basıncına eşit olmaktadır ($P = P_\infty$).

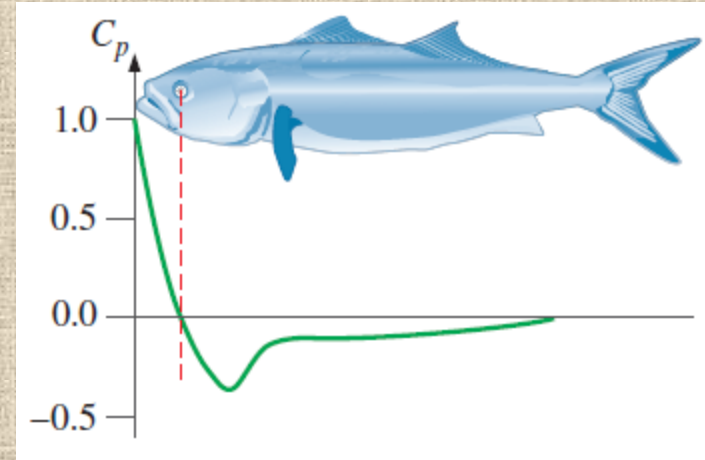
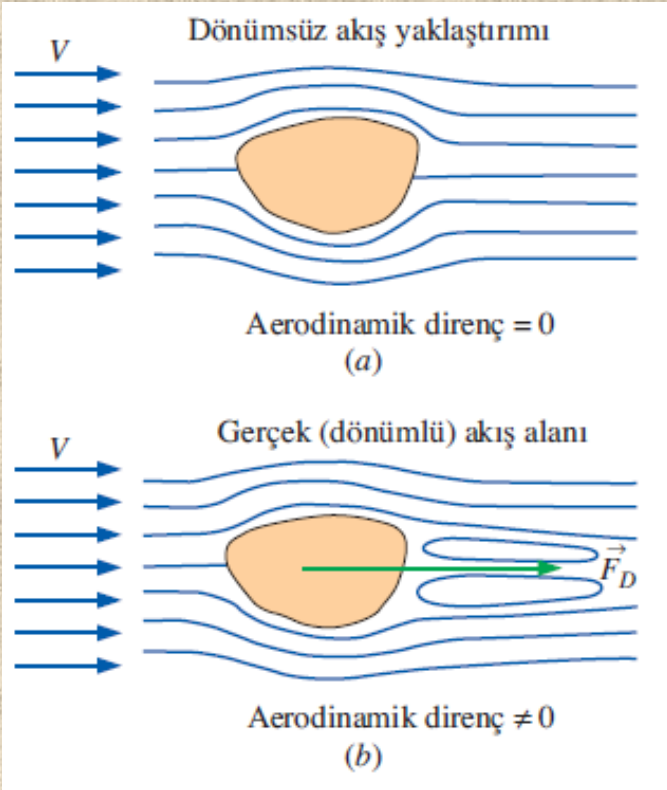


ŞEKİL 10-64

Dairesel bir silindir yüzeyi boyunca β açısının fonksiyonu olarak basınç katsayısının değişimi; sürekli mavi eğri dönümsüz akış yaklaşımıdır. Yeşil daireler $Re = 2 \times 10^5$ için deneysel verileri (laminer sınır tabaka ayrılmasını), kırmızı daireler ise $Re = 7 \times 10^5$ için tipik deneysel verileri (türbülans sınır tabaka ayrılmasını) göstermektedir.

Veriler Kundu ve diğ., 2011'dan alınmıştır..

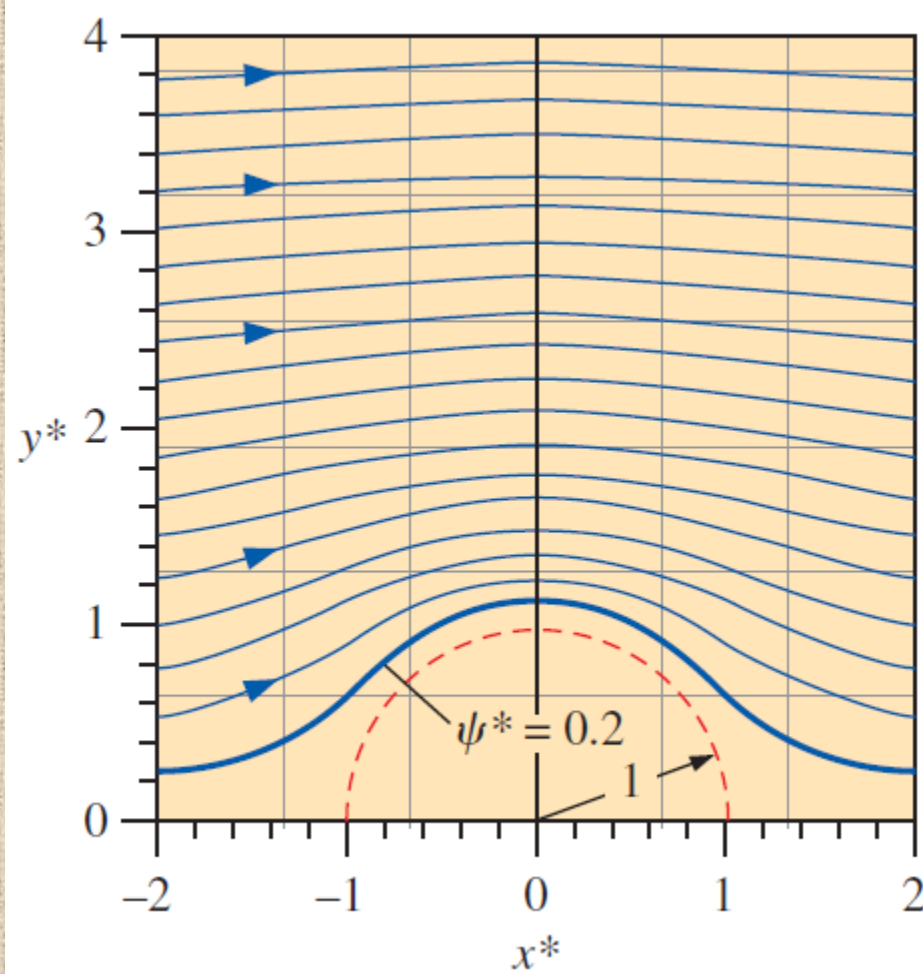
D'Alembert paradoksu: Dönümsüz akış yaklaştırmı yapıldığında, üniform bir akım içerisinde bırakılan ve üzerine kaldırma kuvveti etkimeyen gelişigüzel şekilli bir cisme etkiyen aerodinamik direnç kuvveti sıfırdır.



Bir balık gövdesindeki gözlerin konumu, hızlı yüzerken görüşünün bozulmaması için sıfır basınç noktası civarında olacak şekilde yerleştirilmiştir. Gösterilen veriler bir lüfer balığına aittir.

(a) D'Alembert paradoksuna göre, dönümsüz akış yaklaştırmı yapılması halinde herhangi bir şekle sahip, kaldırılmayan cisim üzerindeki aerodinamik direnç sıfırdır. (b) Gerçek akışlarda ise üniform bir akıma bırakılan cisimler üzerinde sıfırdan farklı bir direnç vardır.

Dönümsüz akış yaklaştırımı yapıldığında herhangi bir akım çizgisi katı bir çeper olarak düşünülebilir.



Şekil 10–61’de verilen ancak burada $\psi^* = 0.2$ ’nin katı çeper olarak modellendiği boyutsuz akım çizgileri. Bu akış simetrik bir tepe üzerinden olan hava akışını temsil etmektedir.

ÖRNEK 10-8 Elektrikli Süpürge'nin Emiş Ağzına Doğru Akış

Tipik bir elektrikli süpürge'nin zemin aparatı lülesinin içerisine doğru olan hava akışını dikkate alınız (Şekil 10-68a). Lüle giriş açıklığının eni $w = 2.00$ mm ve boyu $L = 35.0$ cm'dir. Ağız şekilde gösterildiği gibi zeminden $b = 2.0$ cm yukarıda bir mesafede tutulmaktadır. Süpürge hortumundan geçen toplam debi $\dot{V} = 0.110$ m³/s'dir. Emiş aparatının merkez düzlemindeki akış alanını belirleyiniz (Şekil 10-68a'da xy düzlemi). Bunun için birkaç akım çizgisi çizin ve x -ekseni boyunca olan hız ve basınç dağılımlarını hesaplayınız. Zemin boyunca maksimum hız nedir ve nerede oluşur? Zemin boyunca süpürge nerede en etkin şekilde çalışır?

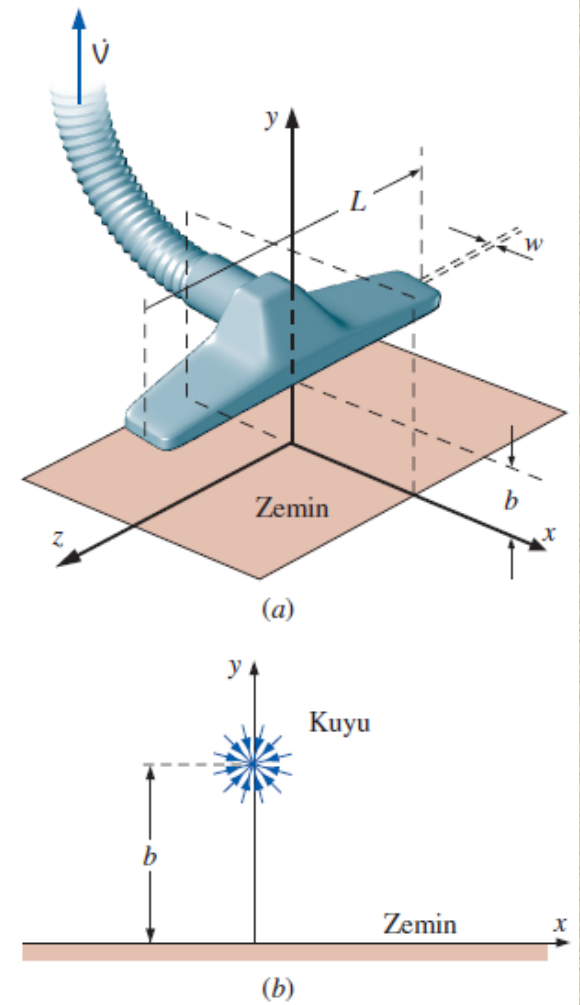
ÇÖZÜM Bir elektrikli süpürge'nin zemin aparatının merkez düzlemindeki akış alanını, zemin boyunca (x -ekseni) hız ve basıncı, zemin boyunca oluşan maksimum hızın değerini ve konumunu, zemin boyunca süpürge'nin en etkin nerede çalıştığını belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. 2 Akış xy -düzleminde iki-boyutludur (düzlemsel). 3 Akış alanının çoğu dönümsüzdür. 4 Oda sonsuz büyüklükte ve akışı etkileyebilecek hava akımları bulunmamaktadır.

Analiz Süpürge'nin zemin aparatındaki açıklığını, Şekil 10-68b'de gösterildiği gibi x -ekseninden b mesafesi kadar yukarı yerleştirilen bir çizgisel kuyu olarak ele alalım (negatif şiddetli bir çizgisel kaynak). Bu yaklaşıtırmı yapmakla, sonlu açıklık enini (w) göz ardı etmiş ve açıklık içerisine olan akışı, xy -düzleminde $(0, b)$ 'de bir nokta olan çizgisel kuyu içerisine akış olarak modellemiş oluruz. Ayrıca hortumdan veya aparat gövdesinden kaynaklanabilecek etkileri de ihmal ediyoruz. Çizgisel kaynağın şiddeti, toplam debinin açıklık uzunluğu L 'ye bölünmesiyle,

$$\text{Çizgisel kaynak şiddeti: } \frac{\dot{V}}{L} = \frac{-0.110 \text{ m}^3/\text{s}}{0.35 \text{ m}} = -0.314 \text{ m}^2/\text{s} \quad (1)$$

olarak elde edilir. Bu bir çizgisel kaynak değil bir çizgisel kuyu olduğundan negatif işareti kullandık.



ŞEKİL 10-68

Zemin aparatlı süpürge hortumu; (a) xz -düzlemindeki üç-boyutlu görüntü ve (b) bir çizgisel kuyu ile modellenmiş emişin xy -düzlemindeki kesit görüntüsü.

Açıkça görülmektedir ki bu çizgisel kuyu (Şekil 10-68) tek başına akışı modellemeye yeterli değildir. Çünkü hava kuyu içerisine *zemin boyunca* yukarıdan da olmak üzere tüm yönlerden akmaktadır. Bu sorunu önlemek amacıyla, zemin etkisini modellemek için başka bir temel dönümsüz akışı (yapıtaşı) ekleyelim. Bunu yapmanın akıllıca bir yolu **görüntüler yöntemi**ni kullanmaktır. Bu teknik ile zemin *altında* $(0, -b)$ noktasına *ikinci* bir özdeş kuyu yerleştiriyoruz. Bu ikinci kuyuya **görüntü kuyusu** adı verilir. Bu durumda x -ekseni simetri doğrusu olduğundan, x -ekseninin kendisi akışın bir akım çizgisi haline gelir ve böylece zemin olarak düşünülebilir. Analiz edilecek akış alanı Şekil 10-69'da çizilmiştir. Şiddeti $\dot{V}/L$ olan iki kaynak gösterilmiştir. Üstteki kuyu **akış kuyusu** olarak adlandırılır ve süpürgenin zemin aparatına emişi temsil ederken, alttaki kuyu ise görüntü kaynağıdır. Her iki kaynağın da gerçekte kuyu olabilmeleri için bu problemde $\dot{V}/L$ 'nin negatif olduğu unutulmamalıdır (Denklem 1).

Bu akış alanının dönümsüz yaklaşırtırımı için akım fonksiyonunu oluşturmak üzere süperpozisyon tekniğini kullanalım. Buradaki cebirsel işlemler Örnek 10-5'tekine benzerdir; Örnek 10-5'te x -ekseninde bir kaynak ile bir kuyu vardı, burada ise y -ekseni üzerinde iki kaynağımız var. Akış kaynağına ait ψ 'yi elde etmek için Denklem 10-44'ü kullanarak,

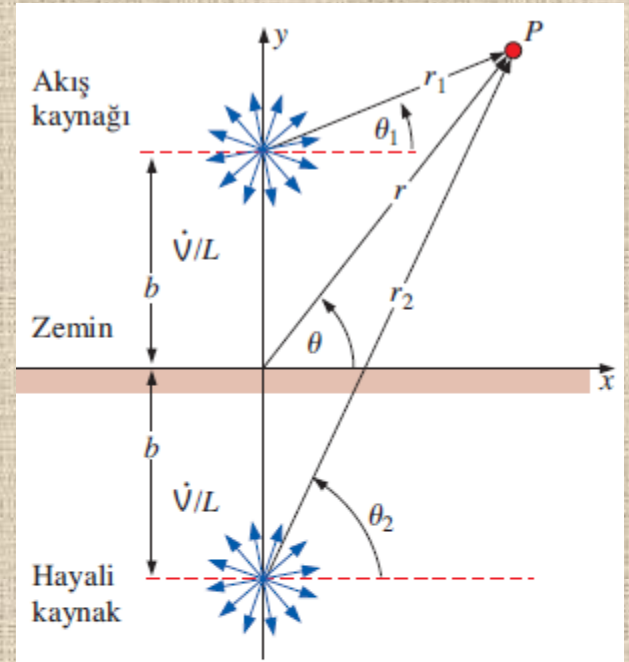
$$(0, b)'de \text{ çizgisel kaynak: } \psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 \quad \text{burada } \theta_1 = \arctan \frac{y - b}{x} \quad (2)$$

elde ederiz. Benzer şekilde görüntü kaynağı için,

$$(0, -b)'de \text{ çizgisel kaynak: } \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_2 \quad \text{burada } \theta_2 = \arctan \frac{y + b}{x} \quad (3)$$

elde edilir. Süperpozisyon bize bu iki akım fonksiyonunu (Denklem 2 ve 4), birleşik bir akım fonksiyonu elde etmek için toplama imkânını verir:

$$\text{Birleşik akım fonksiyonu:} \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2) \quad (4)$$



ŞEKİL 10-69

$(0, b)$ noktasındaki $\dot{V}/L$ şiddetinde bir çizgisel kaynak ile $(0, -b)$ noktasında aynı şiddetinde bir çizgisel kaynağın süperpozisyonu. Altteki kaynak, x -eksenini bir akım çizgisi yapacak şekilde üstteki kaynağın ayna görüntüsüdür.

Denklem 4'ü tekrar düzenleyip her iki tarafın tanjantını alırsak,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (5)$$

bulunur. Burada yine bir trigonometrik özdeşlik kullandık (Şekil 10-49).

Denklem 2 ve 3'ten θ_1 ve θ_2 bu ifadede yerine yazılır ve nihai ifadeyi elde etmek üzere bazı cebirsel işlemler yapılırsa, kartezyen koordinatlarda,

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2} \quad (6)$$

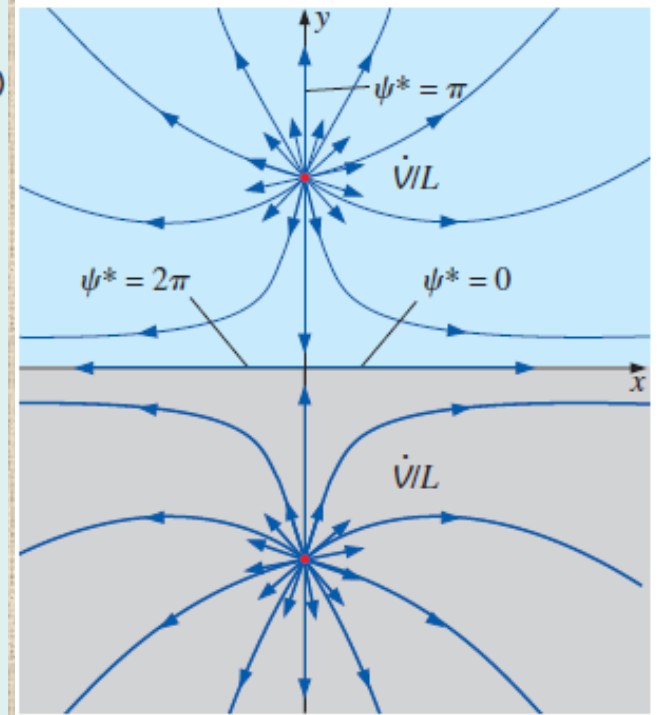
sonucuna varılır. Denklem 10-38'i kullanarak bu denklemi silindirik koordinatlara dönüştürüp boyutsuzlaştıralım. Bir takım cebirsel işlemlerden sonra,

Boyutsuz akım fonksiyonu: $\psi^* = \arctan \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + 1/r^{*2}} \quad (7)$

elde edilir. Burada $\psi^* = 2\pi\psi/(\dot{V}/L)$, $r^* = r/b$ olup Şekil 10-49'da verilen trigonometrik özdeşlikler kullanılmıştır.

x-eksenine göre simetriden dolayı üst çizgisel kaynak tarafından üretilen havanın tümü, x-ekseninin *yukarısında* kalmalıdır. Benzer şekilde alt çizgisel kaynak tarafından üretilen görüntü havanın da tümü x-ekseninin *altında* kalmalıdır. Eğer üstten gelen (kuzeyden) havayı mavi, alttan gelen (güneyden) havayı da gri ile renklendirmiş olsaydık (Şekil 10-70), mavi havanın tümü x-ekseninin yukarısında kalırken tüm gri hava da x-ekseninin altında kalırdı. Buna göre x-ekseni bir **bölen akım çizgisi** olur ve maviden griyi ayırır. Ayrıca Bölüm 9'dan, düzlemsel akışta bir akım çizgisinden, bitişiğindeki akım çizgisine kadar ψ değerinde oluşan farkın, bu iki akım çizgisi arasından birim genişlik başına geçen hacimsel debiye eşit olduğunu hatırlayınız. Pozitif x-ekseni boyunca ψ 'yi sıfır alıyoruz. Bölüm 9'da verilen *sol taraf kuralını* uygulayarak *negatif* x-ekseni üzerindeki ψ 'nin üstteki çizgisel kaynak tarafından üretilen birim genişlik başına toplam hacimsel debiye, yani $\dot{V}/L$ 'ye eşit olduğunu biliyoruz. Şöyle ki,

$$\psi_{-x\text{-ekseni}} - \underbrace{\psi_{+x\text{-ekseni}}}_0 = \dot{V}/L \rightarrow \psi^*_{-x\text{-ekseni}} = 2\pi \quad (8)$$



ŞEKİL 10-70

x-ekseni, üstteki kaynak (mavi) tarafından üretilen havayı alttaki kaynak (gri) tarafından üretilen havadan ayıran bir bölen akım çizgisidir.

olur. Bu akım çizgileri Şekil 10–70’te işaretlenmiştir. Buna ilave olarak boyutsuz akım çizgisi $\psi^* = \pi$ de gösterilmiştir. Bu akım çizgisi y -ekseniyle çakışmaktadır zira bu eksene göre de simetri vardır. Altteki kaynağın neden olduğu hız tam olarak üstteki kaynak tarafından oluşturulan hızı götürdüğü için merkez (0, 0) bir durma noktasıdır.

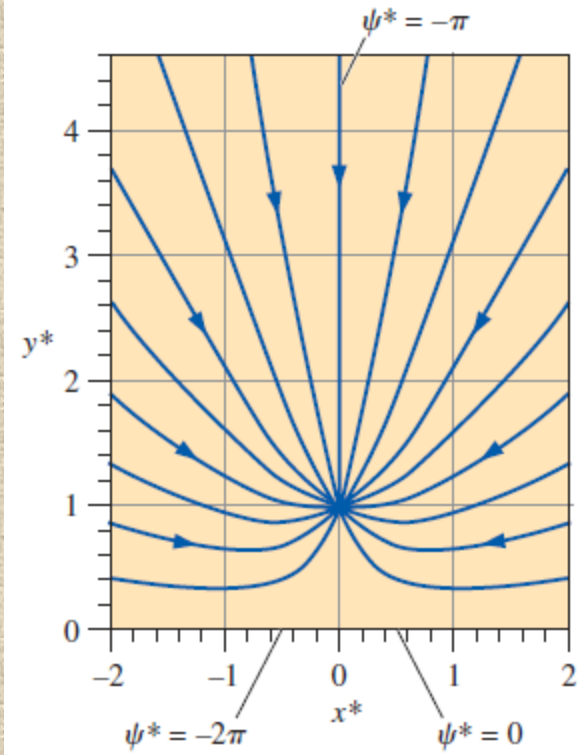
Burada modellenen elektrikli süpürge için kaynak şiddetleri negatiftir (bunlar aslında *kuyudur*). Buna göre akışın yönü tersine döner ve ψ^* değerleri Şekil 10–70’de gösterilenlerin tersi yönde olur. Tekrar sol taraf kuralını kullanarak $-2\pi < \psi^* < 0$ için boyutsuz akım fonksiyonunu çizelim (Şekil 10–71). Bu amaçla, değişik ψ^* değerleri için Denklem 7’den çözerek r^* ’yi θ ’nın fonksiyonu olarak

Boyutsuz akım çizgileri:
$$r^* = \pm \sqrt{\frac{\tan \psi^*}{\sin 2\theta - \cos 2\theta \tan \psi^*}} \quad (9)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şeklin alt yarısı simetrik ve üst yarısının sadece bir ayna görüntüsü olduğundan sadece üst yarısı çizilmiştir. Negatif $\dot{V}/L$ durumunda hava, akım çizgileri üzerindeki oklarla gösterildiği gibi tüm yönlerden elektrikli süpürge içerisine emilir.

Zemin üzerindeki (x -ekseni) hız dağılımını hesaplamak amacıyla ya Denklem 6’nın türevini alır, düzlemsel akış için olan akım fonksiyonu tanımını (Denklem 10–29) uygular ya da bir vektörel toplama işlemi yapabiliriz. Bunlardan ikincisi daha basittir ve x -ekseni boyunca keyfi bir nokta için Şekil 10–72’de gösterilmiştir. Üstteki kaynağın (veya kuyunun) sebep olduğu hızın büyüklüğü $(\dot{V}/L)/(2\pi r_1)$ ’dir ve yönü şekilde görüldüğü gibi r_1 ’in yönüdür. Simetri nedeniyle görüntü kaynağından kaynaklanan hız da aynı büyüklüktedir, ancak doğrultusu r_2 ile aynıdır. İki yatay bileşen toplanacağı, buna karşın düşey bileşenler birbirlerini götürceği için bu iki hız vektörünün toplamı x -ekseni üzerine düşer. Bazı trigonometrik işlemlerden sonra,

x -ekseni boyunca aksenal hız:
$$u = V = \frac{(\dot{V}/L)x}{\pi(x^2 + b^2)} \quad (10)$$



ŞEKİL 10–71

Kaynak şiddetlerinin *negatif* (kuyu) olduğu durum için Şekil 10–69’daki iki kaynağa ait boyutsuz akım çizgileri. ψ^* değeri üniform olarak -2π ’den (negatif x -ekseni) 0’a (pozitif x -ekseni) artırılmıştır ve akışın yalnızca üst yarısı gösterilmiştir. Akış (0, 1) noktasında kaynağa doğru yönelmiştir

sonucuna varılır. Burada V Şekil 10-72'de çizildiği gibi zemin boyunca olan bileşke hız vektörünün büyüklüğüdür. Dönümsüz akış yaklaşımını yaptığımız için basınç alanı Bernoulli denklemi ile belirlenebilir. Yerçekimi etkisi ihmal edilerek,

Bernoulli denklemi:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{sabit} = \frac{P_{\infty}}{\rho} + \underbrace{\frac{V_{\infty}^2}{2}}_0 \quad (11)$$

elde edilir. Basınç katsayısını bulmak için paydada kullanabileceğimiz bir referans hıza ihtiyacımız vardır. Doğrudan kullanabileceğimiz bir referans hız olmadığına göre bilinen parametrelerden referans hız oluşturulabilir; örneğin $V_{\text{ref}} = -(\dot{V}/L)/b$ tanımı yapılabilir. Burada V_{ref} hızını pozitif yapmak için negatif işaret kullandık (elektrikli süpürge modelimiz için $\dot{V}/L$ negatiftir). Buna göre Denklem 11'i kullanarak C_p ,

Basınç katsayısı:

$$C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{ref}}^2} = -\frac{V^2}{V_{\text{ref}}^2} = -\frac{b^2 V^2}{(\dot{V}/L)^2} \quad (12)$$

olarak tanımlanır. Denklem 10'daki V ifadesi bu denklemde yerine yazılırsa,

$$C_p = -\frac{b^2 x^2}{\pi^2 (x^2 + b^2)^2} \quad (13)$$

elde edilir. Şimdi aksenal hız ve mesafe boyutsuz değişkenler cinsinden ifade edilirse,

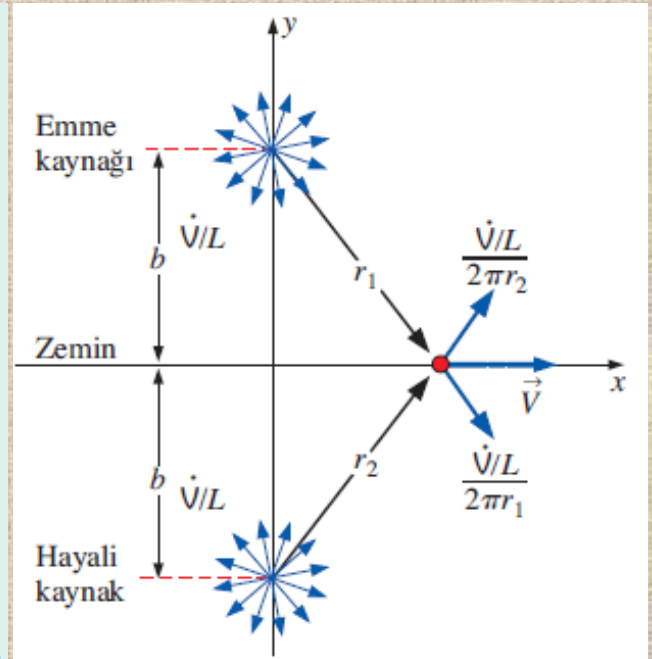
Boyutsuz değişkenler:

$$u^* = \frac{u}{V_{\text{ref}}} = -\frac{ub}{\dot{V}/L} \quad x^* = \frac{x}{b} \quad (14)$$

elde edilir. C_p zaten boyutsuzdur. Böylece boyutsuz olarak Denklem 10 ve Denklem 13,

Zemin boyunca:

$$u^* = -\frac{1}{\pi} \frac{x^*}{1 + x^{*2}} \quad C_p = -\left(\frac{1}{\pi} \frac{x^*}{1 + x^{*2}}\right)^2 = -u^{*2} \quad (15)$$



ŞEKİL 10-72

İki kaynağın oluşturduğu hızların vektörel toplamı. Simetri nedeniyle bileşke hız x -ekseni üzerindeki her noktada yataydır.

haline gelir. u^* ve C_p , x^* 'nin fonksiyonu olarak Şekil 10-73'te çizilmiştir.

Şekil 10-73'ü incelediğimizde u^* 'ın $x^* = -\infty$ 'da 0 değerinden $x^* = -1$ 'de 0.159 değerine doğru yavaşça arttığını görüyoruz. Hava süpürge içerisine emildiği için beklendiği gibi negatif x^* değerleri için hız pozitiftir. Hava hızı arttıkça basınç düşer; $x^* = -\infty$ 'da C_p sıfırdır ve $x^* = -1$ 'de minimum değeri olan -0.0253 civarına iner. $x^* = -1$ ile $x^* = 0$ arasında ise süpürge zemin aparatı lülesinin tam altındaki durma noktasında basınç sıfıra çıkarken bu arada hız da sıfıra iner. Lülenin sağında (pozitif x^* değerleri) hız simetrik olmamakla birlikte basınç simetriktir.

Zemin boyunca maksimum hız (minimum basınç) $x^* = \pm 1$ 'de meydana gelir. Bu mesafe lülenin zeminden olan düşey yüksekliği ile aynıdır (Şekil 10-74). Boyutlu terimler cinsinden zemin boyunca maksimum hız $x = \pm b$ 'de oluşur ve bu hız,

Zemin boyunca maksimum hız:

$$|u|_{\text{maks}} = -|u^*|_{\text{maks}} \frac{\dot{V}/L}{b} = -0.159 \left(\frac{-0.314 \text{ m}^2/\text{s}}{0.020 \text{ m}} \right) = 2.50 \text{ m/s} \quad (16)$$

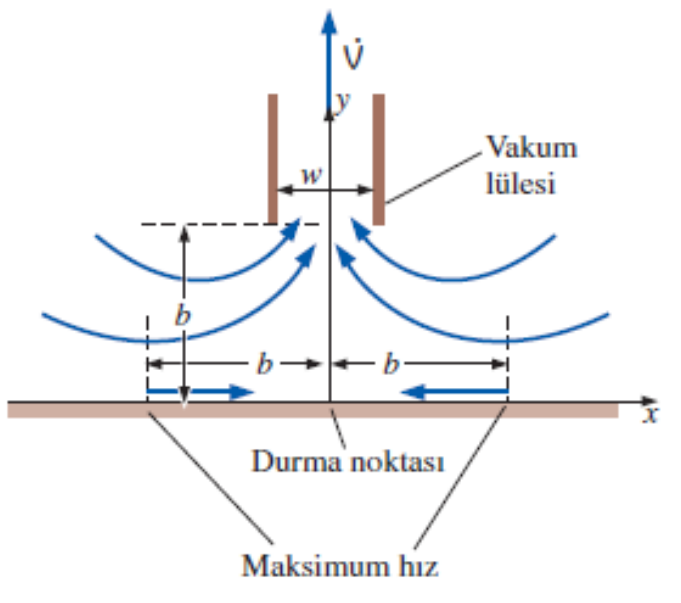
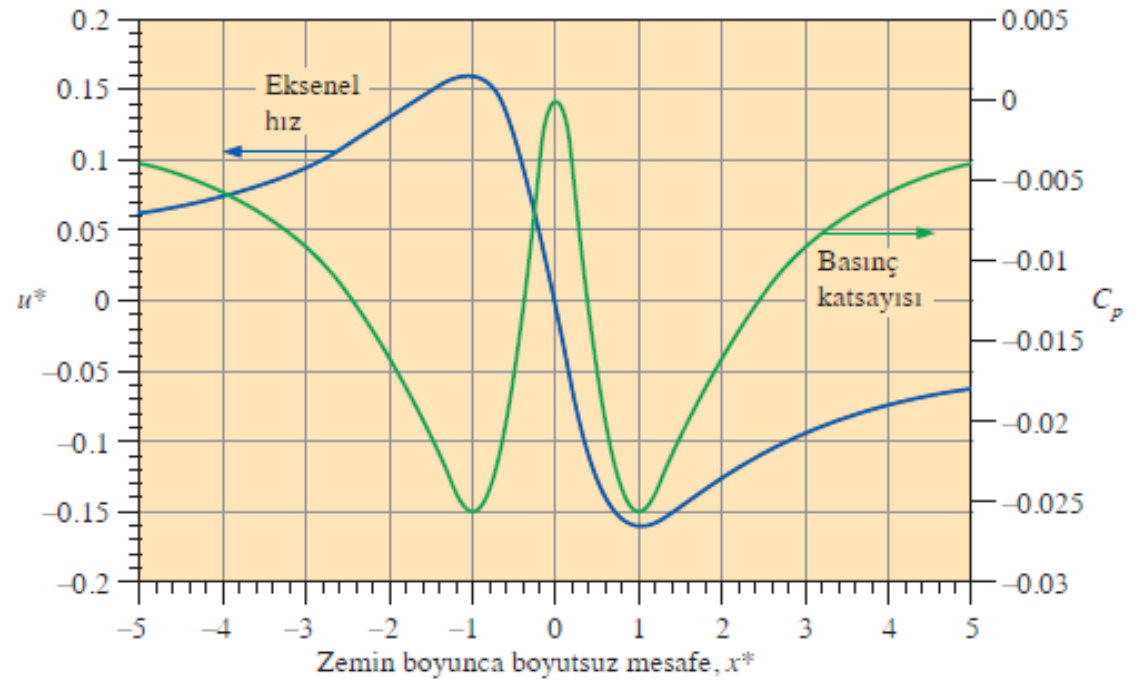
olarak bulunur.

Bir elektrikli süpürge'nin zemin boyunca hızın en yüksek, basıncın ise en düşük olması durumunda en etkin şekilde toz emeceği açıktır. Dolayısıyla, ilk bakışta tahmin edebileceğimiz en iyi performansın emme ağzının tam altında olacağı düşüncesi doğru olmayıp, en iyi performans Şekil 10-74'te gösterildiği gibi $x = \pm b$ 'de oluşmaktadır.

İrdeleme Çizgisel bir kuyunun hiçbir uzunluk ölçeği bulunmadığından, analizimizde vakum lülesinin eni olan w 'yi hiç kullanmadığımıza dikkat ediniz. Sert bir zemin üzerinde şeker veya tuz gibi ince tanecikli maddeleri elektrikli süpürge ile alarak süpürge'nin en iyi $x \cong \pm b$ 'de emiş yaptığını gösterebilirsiniz. Akışın dönümlü olduğu zemine çok yakın yerler dışında elektrikli süpürge içerisine doğru olan akışın her yerinde dönümsüz akış yaklaşıtlarının oldukça gerçekçi olduğu bu örnekten anlaşılmaktadır.

ŞEKİL 10-73

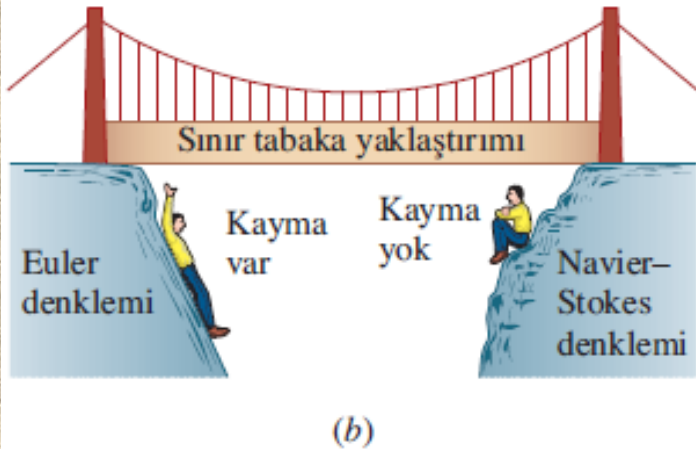
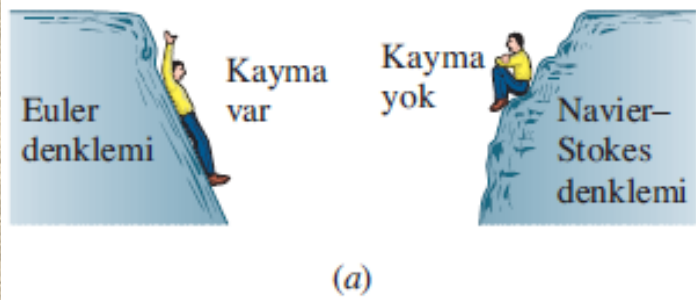
Dönümsüz bir akış bölgesi olarak modellenen bir elektrikli süpürge altında zemin boyunca oluşan boyutsuz eksenel hız (mavi eğri) ve basınç katsayısı (yeşil eğri).



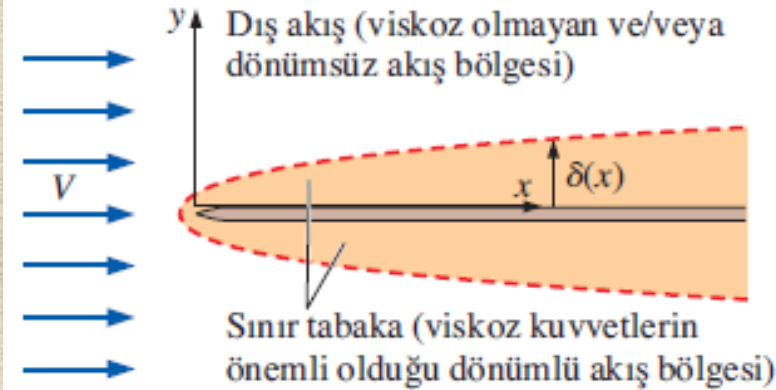
Dönümsüz akış yaklaşımına göre zemin boyunca maksimum hız, bir elektrikli süpürge lülesinin altında $x = \pm b$ noktalarında oluşur. Ayrıca lülenin tam altında bir durma noktası meydana gelir.

10-6 ■ SINIR TABAKA YAKLAŞTIRIMI

Sınır tabaka yaklaştırımı Euler denklemiyle Navier-Stokes denklemleri arasındaki ve katı çeperlerdeki kayma şartı ile kaymazlık şartı arasındaki boşluğa bir köprü olur (Şekil 10-75b).



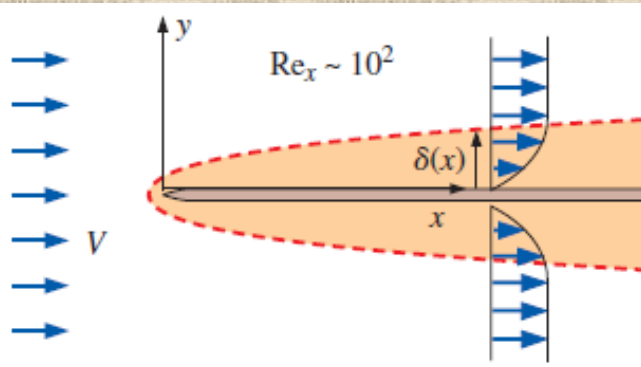
(a) (Çeperlerde kaymaya izin veren) Euler denklemleri ile kaymazlık şartını destekleyen Navier-Stokes denklemleri arasında büyük bir boşluk vardır; (b) sınır tabaka yaklaştırımı bu boşluğa bir köprü olur.



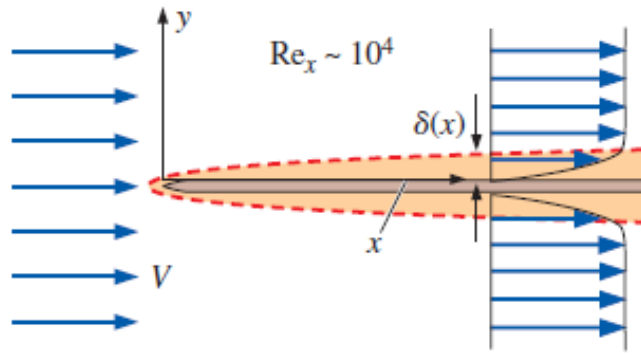
Prandtl'in sınır tabaka kavramı, akışı bir dış akış bölgesi ve bir sınır tabaka bölgesine ayırır (çizim ölçeksizdir).

Sınır tabaka yaklaştırımı

viskoz olmayan ve/veya dönümsüz olan dış akış bölgesi ve katı bir çeper civarında viskoz kuvvetlerin ve dönümlülüğün göz ardı edilemeyeceği çok ince bir akış bölgesi olan ve sınır tabaka olarak adlandırılan iç akış bölgesi olmak üzere, akışı iki bölgeye ayırmaktır



(a)



(b)

ŞEKİL 10-77

Üniform akımın düz bir levhaya doğru paralel akışı (çizimler ölçekli değildir):
(a) $Re_x \sim 10^2$, (b) $Re_x \sim 10^4$.

Reynolds sayısı ne kadar büyükse, levha boyunca verilen bir x -konumundaki sınır tabaka o oranda inceldir.

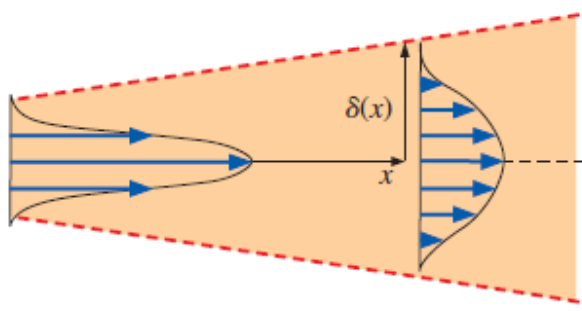
Düz bir levha boyunca Reynolds sayısı:

$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{V x}{\nu}$$

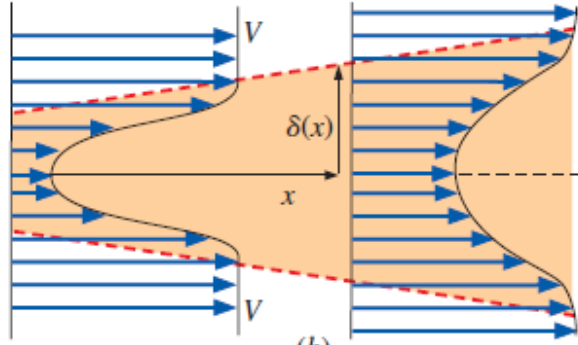
Verilen bir x -konumunda Reynolds sayısı arttıkça sınır tabaka kalınlığı küçülür.



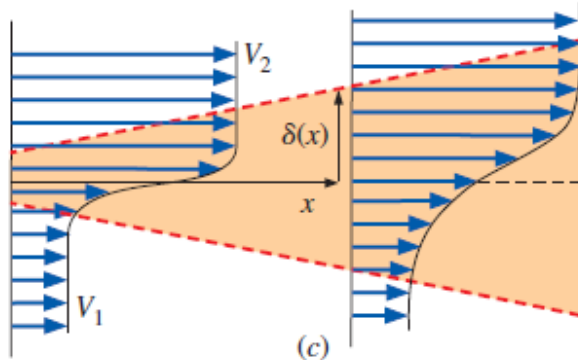
Laminer düz levha sınır tabaka profilinin akış görselleştirilmesi. Fotoğraf 1953 yılında F.X Wortmann tarafından tellür yöntemi ile görselleştirme yapılarak çekilmiştir. Akış soldan sağa doğrudur ve düz levhanın giriş kenarı görüntülenen bölgenin sol uzağında kalmaktadır.



(a)

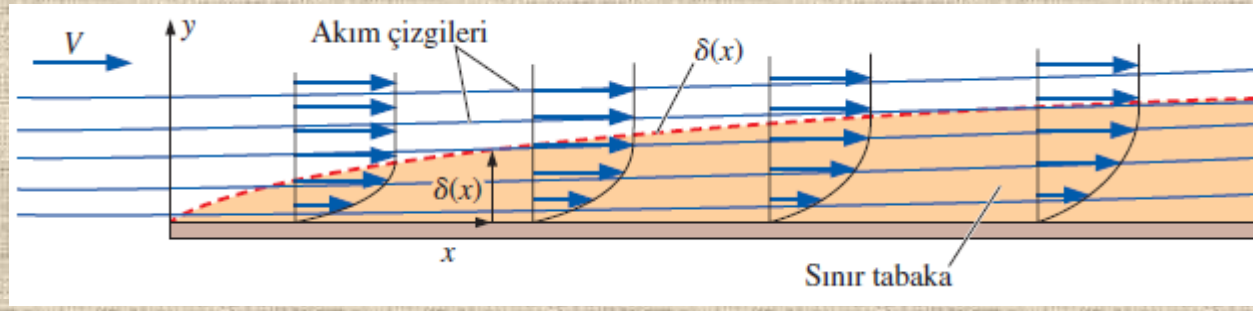


(b)

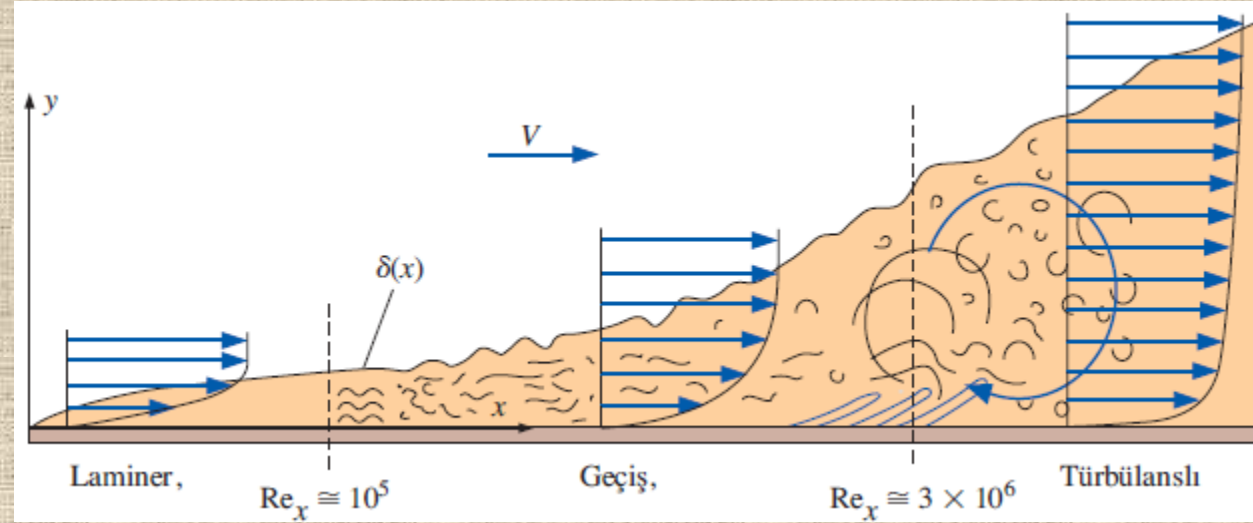


(c)

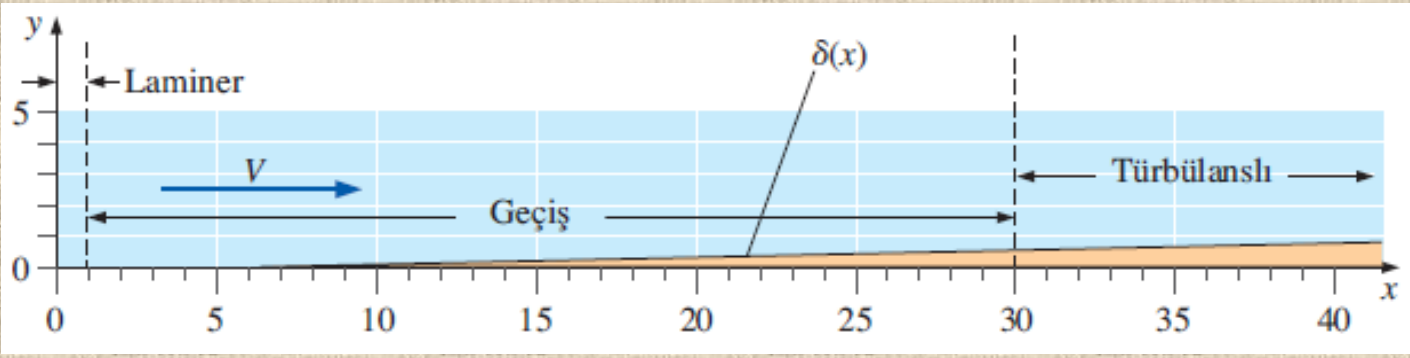
Sınır tabaka yaklaştırımının uygun olabileceği ilave üç akış bölgesi: (a) Jetler, (b) art izleri ve (c) karışım tabakaları.



Bir düz levha sınır tabakası için akım çizgileri ve x 'in fonksiyonu olarak d 'yı temsil eden eğrinin karşılaştırılması. Akım çizgileri $d(x)$ 'i kestiğinden, $d(x)$ 'in kendisi akışa ait bir akım çizgisi olamaz.



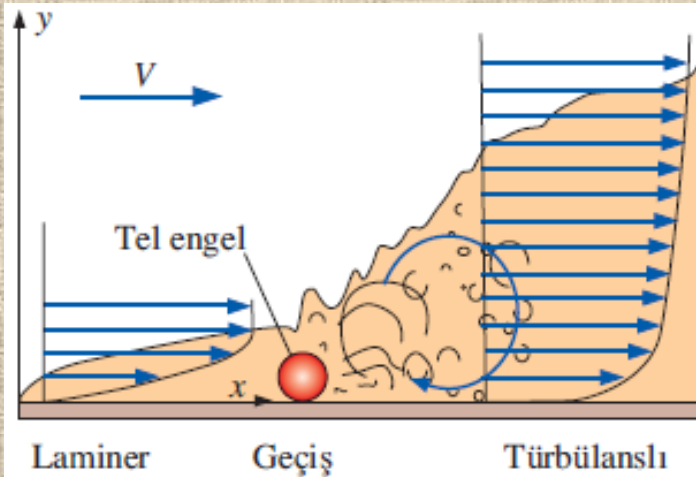
Bir düz levha üzerindeki laminar sınır tabakanın tam türbülanslı sınır tabakaya geçişi (çizim ölçeksizdir).



Gerçek mühendislik akışlarında türbülansa geçiş genellikle daha ani ve sakin serbest-akımlı pürüzsüz düz levha için verilen değerlerden çok daha önce (daha düşük Re_x değerlerinde) meydana gelir.

Yüzey pürüzlülüğü, serbest-akım çalkantıları, akustik gürültü, akış kararsızlıkları, titreşimler ve çeper eğriliği gibi faktörler erken geçiş konumunu etkiler.

Düz bir levha üzerindeki sınır tabaka kalınlığının ölçekli çizimi. Laminer, geçiş ve türbülanslı bölgeler, pürüzsüz yüzey ve sakin serbest-akım şartları için gösterilmiştir.



Bir sınır tabaka içerisinde türbülansa geçişi öne almak için çoğunlukla bir engel teli kullanılır (çizim ölçekli değildir).

ÖRNEK 10-9 Sınır Tabaka Laminer mi Türbülanslı mı?

$V = 10$ km/h hızla hareket eden küçük bir sualtı aracına ait kanatçık üzerinden su akmaktadır (Şekil 10-84). Suyun sıcaklığı 5°C , kanadın giriş boyu $c = 50$ cm'dir. Kanat üzerindeki sınır tabaka laminer mi, türbülanslı mı, yoksa geçiş rejiminde midir?

ÇÖZÜM Bir kanat yüzeyi üzerindeki sınır tabakanın laminer mi, türbülanslı mı, yoksa geçiş rejiminde mi olduğunu belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. 2 Kanat yüzeyi pürüzsüzdür.

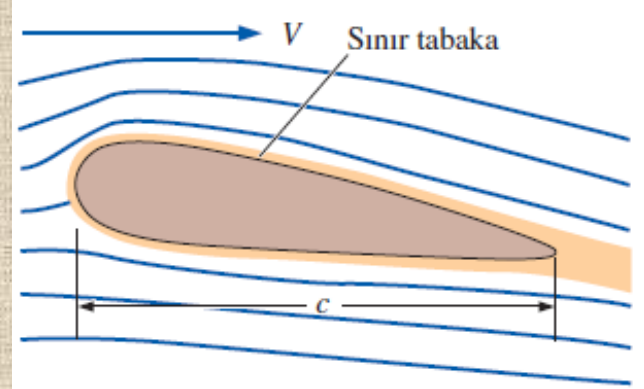
Özellikler $T = 5^\circ\text{C}$ 'deki suyun yoğunluğu ve viskozitesi sırasıyla 999.9 kg/m^3 ve $1.519 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ dir. Buradan suyun kinematik viskozitesi $\nu = 1.519 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ bulunur.

Analiz Kanat bir düz levha olmamasına rağmen, düz levha sınır tabakasına ait ifadeler kullanılarak ilk yaklaşım olarak sınır tabaka akışının laminer veya türbülanslı olduğu belirlenebilir. Kanadın arka ucundaki Reynolds sayısını düz levha uzunluğu olarak kanat giriş boyu c 'yi kullanarak hesaplarsak

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10 \text{ km/h})(0.50 \text{ m})}{1.519 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} \left(\frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \right) \left(\frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} \right) = 9.14 \times 10^5 \quad (1)$$

olarak bulunur. Çok sakın, düşük çalkantılı serbest-akım şartlarında pürüzsüz düz levha için türbülansa geçiş kritik Reynolds sayısı 1×10^5 tir. Bulunan Reynolds sayısı bu değerin üzerindedir. Gerçek mühendislik akışlarında kullanılan kritik Reynolds sayısı ise $\text{Re}_{x,kr} = 5 \times 10^5$ kabul edilmektedir. Bulunan Re_x değeri, $\text{Re}_{x,kr}$ 'ten büyük, ancak $\text{Re}_{x,\text{geçiş}}$ (30×10^5) den küçük olduğundan **sınır tabaka büyük ölçüde geçiş rejimindedir, ancak kanat arka ucunda tam türbülanslı olabilir.**

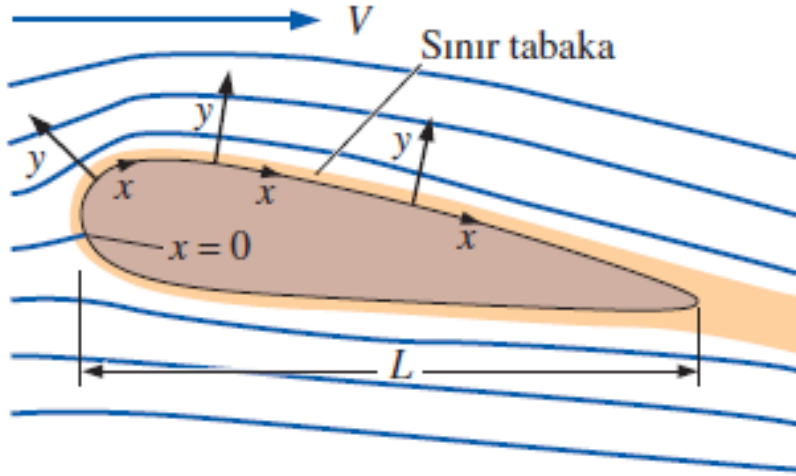
İrdeleme Gerçek uygulamada, serbest akımın çalkantı ve titreşim gibi diğer etmenler nedeniyle çok sakın olması beklenmez. Ayrıca kanat yüzeyi mükemmel derecede pürüzsüz değildir ve su altı aracı titreşim oluşturabilir. Dolayısıyla, türbülansa geçişin pürüzsüz bir düz levhaya göre çok daha önce gerçekleşmesi beklenir.



ŞEKİL 10-84

Bir sualtı aracının kanatçığı boyunca büyüyen sınır tabaka. Daha açık görülmesi için sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir.

SINIR TABAKA DENKLEMLERİ



ŞEKİL 10-85

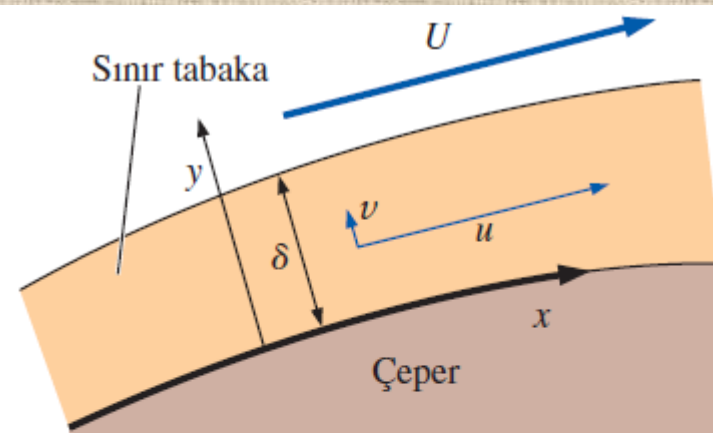
Bir cisim üzerindeki akış için sınır tabaka koordinat sistemi; x , yüzeyi izler ve tipik olarak cismin ön durma noktasında sıfır alınır. y ise yerel olarak yüzeye her yerde diktir.

U , sınır tabakanın hemen üstündeki bir konumda, çepere paralel hız bileşeninin büyüklüğüdür.

$$(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -[Eu] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$u \sim U \quad P - P_\infty \sim \rho U^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim U/L} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim v/\delta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta}$$



ŞEKİL 10-87

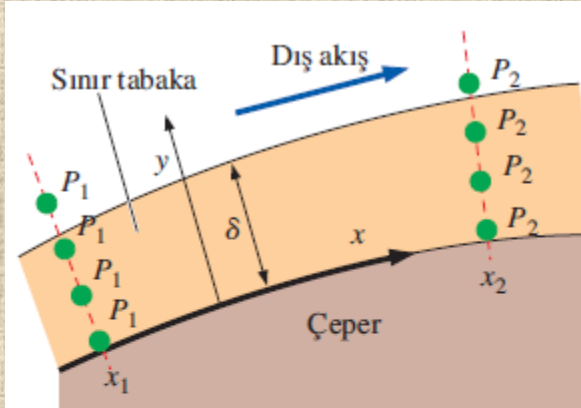
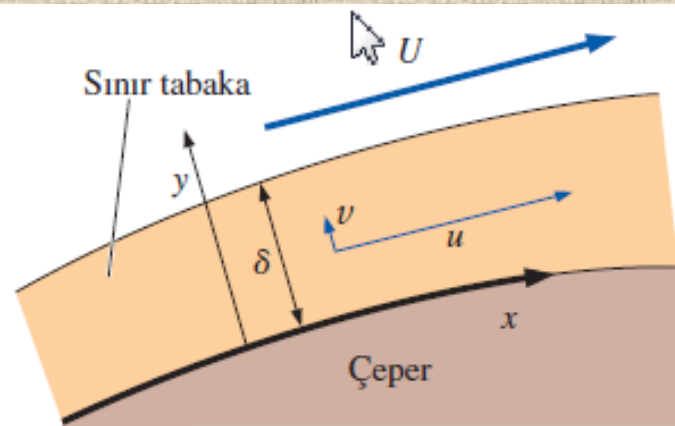
Bir cismin yüzeyi boyunca v hız bileşeninin u 'dan çok küçük olduğunu gösteren, büyütülmüş sınır tabakanın görünüşü.

$$v \sim \frac{U\delta}{L} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{\delta} \quad u^* = \frac{u}{U} \quad v^* = \frac{vL}{U\delta} \quad P^* = \frac{P - P_\infty}{\rho U^2}$$

$$\underbrace{u^* U}_{\frac{\partial}{\partial x^*} \frac{v^* U \delta}{L^2}} + \underbrace{v^* \frac{U \delta}{L}}_{\frac{\partial}{\partial y^*} \frac{v^* U \delta}{L \delta}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y^*} \frac{P^* \rho U^2}{\delta}} + \underbrace{v^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{v^* \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \frac{v^* U \delta}{L^3}} + \underbrace{v^* \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{v^* \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \frac{v^* U \delta}{L \delta^2}}$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad \frac{\partial P^*}{\partial y^*} \cong 0$$

Bir sınır tabaka içerisinde sınır tabakaya dik yöndeki basınç yaklaşık olarak sabittir.

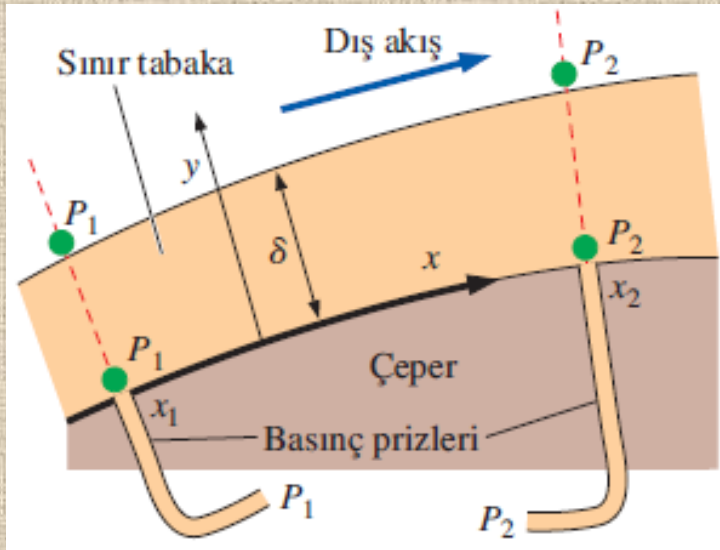


ŞEKİL 10-87

Bir cismin yüzeyi boyunca v hız bileşeninin u 'dan çok küçük olduğunu gösteren, büyütülmüş sınır tabakanın görünüşü.

ŞEKİL 10-88

Basınç sınır tabaka boyunca (x -yönü) değişebilir, ancak sınır tabakaya dik yönde (y -yönü) basınçtaki değişim ihmal edilebilir.

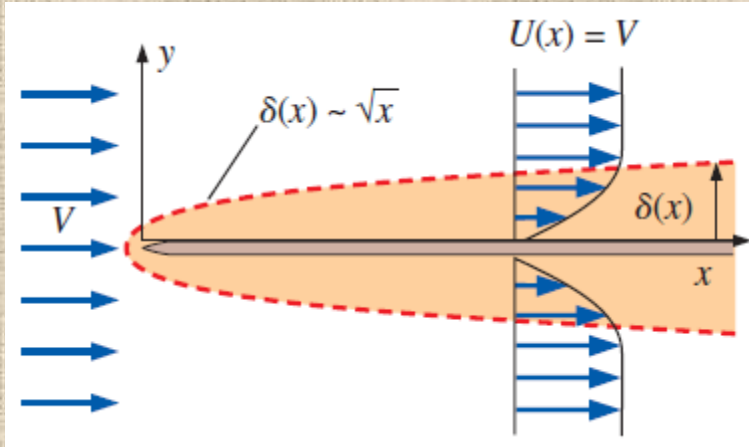


Bir sınır tabakanın dışında yer alan dönümsüz akış bölgesindeki basınç, çeper yüzeyindeki basınç prizleri ile ölçülebilir. Şekilde bu tür iki basınç deliği çizilmiştir.

$$\underbrace{u}_{u^*U} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x^*} \frac{u^*U}{L}} + \underbrace{v}_{v^* \frac{U\delta}{L}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y^*} \frac{u^*U}{\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{P^*\rho U^2}{L}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\nu \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \frac{u^*U}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nu \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \frac{u^*U}{\delta^2}}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1 \quad \text{Re}_L = UL/\nu \quad \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$



Düz bir levha üzerindeki laminar sınır tabaka denklemleri için yapılan büyüklük mertebesi analizi δ 'nın $\sqrt{x}$ ile orantılı olarak büyüdüğünü göstermektedir (çizim ölçekli değildir).

x-momentum sınır tabaka denklemi:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

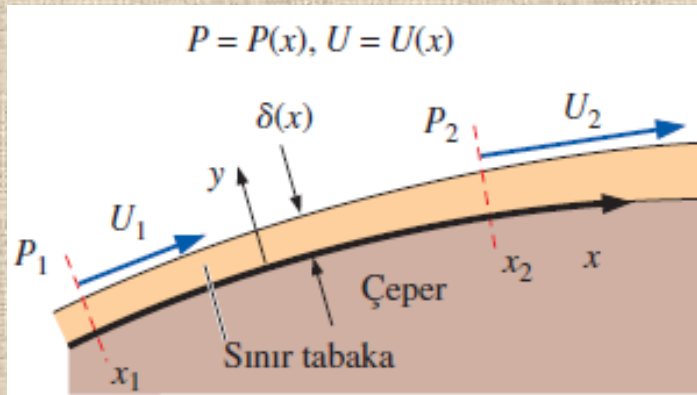
$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{sabit}$$

$\rightarrow$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(10-70)

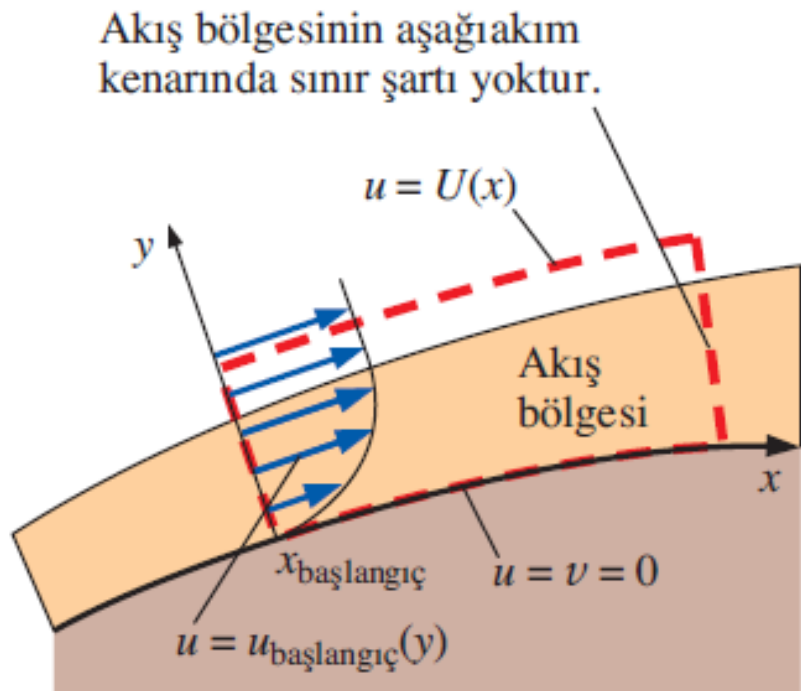


Çepere paralel dış akış hızı $U(x)$ 'tir ve dış akış basıncı olan $P(x)$ 'ten elde edilir. Bu hız, sınır tabaka momentum denkleminin x -bileşeninde yer alır (Denklem 10-70).

Sınır tabaka denklemleri:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Sınır tabaka denklem sistemi paraboliktir ve dolayısıyla sınır şartlarının yalnızca akış bölgesinin üç tarafında belirtilmesi yeterlidir.

Sınır Tabaka Çözüm Yolu

Adım 1: $U(x)$ 'i hesapla (dış akış).

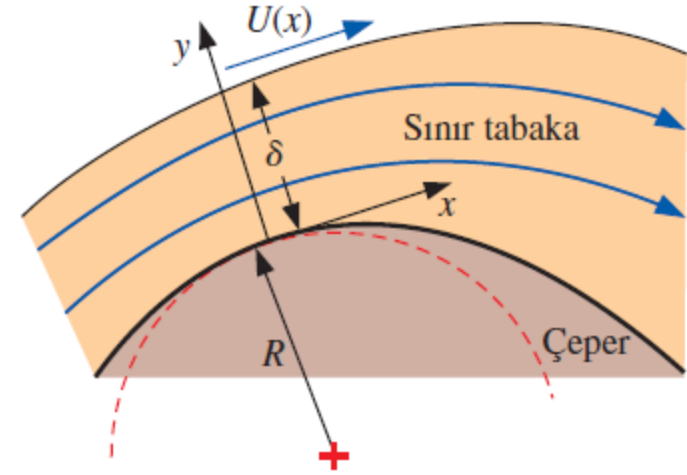
Adım 2: İnce bir sınır tabaka kabul et.

Adım 3: Sınır tabaka denklemlerini çöz.

Adım 4: İstenen büyüklükleri hesapla.

Adım 5: Sınır tabakanın ince olduğunu doğrula.

xy-düzleminde daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu sınır tabakalar için sınır tabaka çözüm yolunun özeti.



ŞEKİL 10-94

Çeperin yerel eğrilik yarıçapı (R), δ ile aynı büyüklük mertebesinde olacak kadar küçükse, merkezci ivme etkileri göz ardı edilemez ve $\partial P / \partial y \neq 0$ olur. Böyle bölgelerde ince sınır tabaka yaklaşımını uygun değildir.

ÖRNEK 10-10

Düz Bir Levha Üzerinde Laminer Sınır Tabaka

V üniform hızına sahip bir serbest akım Şekil 10-95'te çizildiği gibi sonsuz incelikte yarı-sonsuz bir düz levhaya paralel olarak akmaktadır. Koordinat sistemi levha başlangıcı orijinde olacak şekilde tanımlanmıştır. Akış x -eksenine göre simetrik olduğundan sadece akışın üst yarısı dikkate alınmaktadır. Buna göre levha boyunca sınır tabaka hız profilini hesaplayınız ve sonucu irdeleyiniz.

ÇÖZÜM Düz levha boyunca büyüyen sınır tabakanın hız profilini (x ve y 'nin fonksiyonu olarak u 'yu yani $u = f(x, y)$ 'i) hesaplayacağız.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılmaz olup xy -düzleminde iki-boyutludur. 2 Reynolds sayısı, sınır tabaka yaklaştırımı uygun olacak şekilde yeterince yüksektir. 3 İlgilenilen aralık boyunca sınır tabaka laminer olarak kalmaktadır.

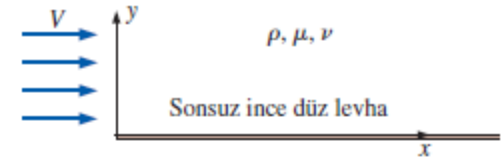
Analiz Şekil 10-93'te özetlenen adım-adım çözüm yolunu izleyelim.

Adım 1 Sınır tabaka çok ince kabul edildiğinden dış akış sınır tabakanın tamamen göz ardı edilmesiyle elde edilir. Akım çizgisini kesen bir akış olamayacağı için dönümsüz bir akıştaki akım çizgisinin bir çeper olarak düşünülebileceğini anımsayınız. Verilen durumda x -ekseni, Kısım 10-5'teki yapıtaşı akışlarımızdan biri olan üniform akımda bir akım çizgisi olarak ele alınabilir. Bu akım çizgisi aynı zamanda sonsuz ince bir levha olarak da düşünülebilir (Şekil 10-96). Böylece,

$$\text{Dış akış:} \quad U(x) = V = \text{sabit} \quad (1)$$

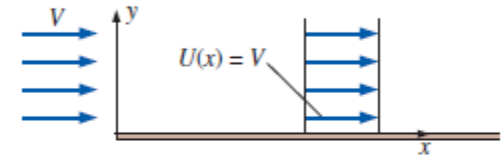
olarak ifade edilebilir. Uygunluk açısından bundan sonraki işlemlerde $U(x)$ yerine sadece U kullanacağız, zira $U(x)$ sabittir.

Adım 2 Çeper boyunca çok ince bir sınır tabaka olduğunu varsayıyoruz (Şekil 10-97). Buradaki önemli nokta, sınır tabaka o kadar ince kabul edilmektedir ki, bunun adım 1'de hesaplanan dış akış üzerindeki etkisi ihmal edilebilir.



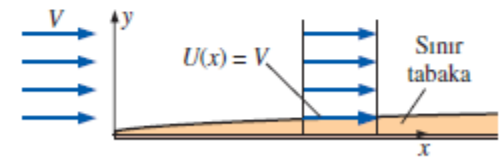
ŞEKİL 10-95

Örnek 10-10'un çizimi; x -ekseni boyunca yarı-sonsuz düz bir levhaya doğru paralel üniform akış.



ŞEKİL 10-96

x -ekseninin akışa ait bir akım çizgisi olması ve $U(x) = V = \text{sabit}$ olması nedeniyle Örnek 10-10'daki dış akış çok basittir.



ŞEKİL 10-97

Sınır tabaka, dış akışı etkilemeyecek kadar incedir. Daha açık görülmesi için sınır tabaka kalınlığı burada abartılı çizilmiştir.

Adım 3 Şimdi ise sınır tabaka denklemlerini çözmemiz gerekir. Denklem 1'den $dU/dx = 0$ olduğu görülmektedir; diğer bir ifadeyle x -momentum denkleminde hiçbir basınç gradyeni kalmamaktadır. Düz bir levha üzerindeki sınır tabakaya çoğunlukla **sıfır-basınç gradyenli sınır tabaka** denmesinin sebebi budur. Böylece sınır tabakaya ait süreklilik ve x -momentum denklemleri (Denklem 10-71),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

haline gelir. Dört adet sınır şartı gereklidir. Bunlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

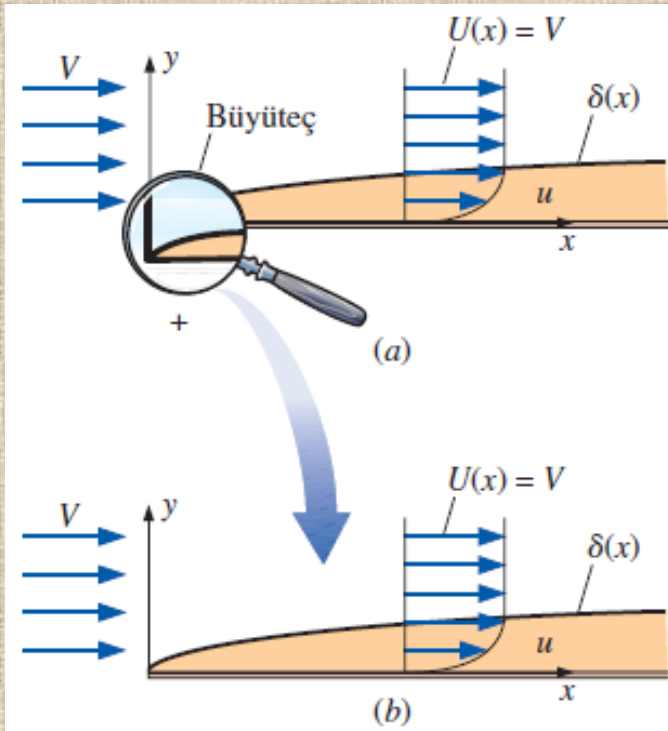
$$\begin{aligned} y = 0 \text{ da } u &= 0 & y \rightarrow \infty \text{ da } u &= U \\ y = 0 \text{ da } v &= 0 & x = 0 \text{ da tüm } y \text{ ler için } u &= U \end{aligned} \quad (3)$$

Denklem 3'teki sınır şartlarının sonuncusu başlangıç profilidir. Levhanın başlangıç konumunda ($x = 0$), levhanın akışı henüz etkilememiş olduğunu varsayıyoruz.

Bu denklemler ve sınır şartları yeterince basit görünse de ne yazık ki şimdiye değin *bir analitik çözüm bulunamamıştır*. Bununla beraber Denklem 2'nin ilk olarak 1908 yılında P. R. Heinrich Blasius (1883–1970) tarafından *seri çözümü* yapılmıştır. Yeri gelmişken Blasius'un Prandtl'in bir doktora öğrencisi olduğunu belirtelim. O zamanlar doğal olarak bilgisayarlar yoktu ve tüm hesaplamalar *el ile* yapılıyordu. Günümüzde ise bu denklemleri bir bilgisayarla birkaç saniyede çözebiliriz. Çözümün anahtarı **benzerlik** kabulüdür. Basit bir ifadeyle problemin geometrisinde *hiçbir karakteristik uzunluk ölçeği* bulunmadığından benzerlik kabulü yapılabilir. Fiziksel olarak levha x -yönünde sonsuz uzun olduğundan, ne kadar yakınlıştırdığımıza veya uzaklaştırdığımıza bağlı olmaksızın daima *aynı* akış desenini görürüz (Şekil 10-98).

Blasius, x ve y bağımsız değişkenlerini tek bir boyutsuz bağımsız değişkente toplayan bir **benzerlik değişkeni** η 'yı ortaya atmış,

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (4)$$



ŞEKİL 10-98

Benzerlik kabulünün faydalı bir sonucu, ne kadar yaklaştırdığımıza ya da uzaklaştırdığımıza bakılmaksızın akışın aynı (*benzer*) görülmesidir; (a) bir insanın görebileceği kadar uzaktan görünüş, (b) bir karıncanın görebileceği kadar yakından görüntüş.

ve hızın x -bileşenini boyutsuz biçimde çözmüştür:

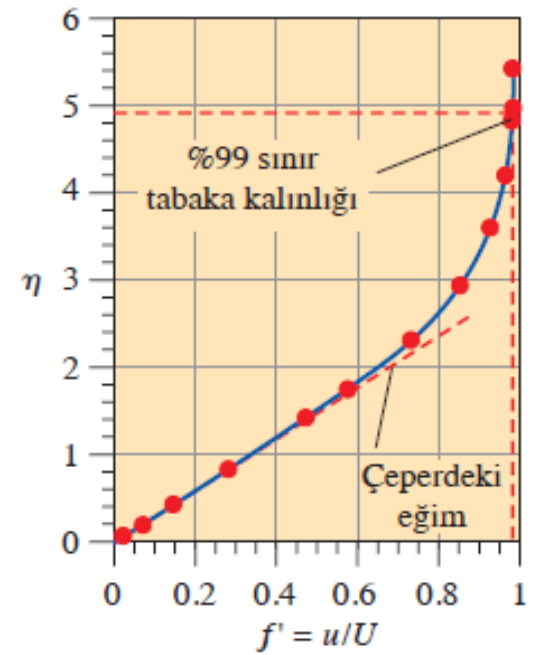
$$f' = \frac{u}{U} = \text{fonksiyon } \eta \quad (5)$$

Denklem 4 ve 5'i Denklem 3 ile verilen sınır şartlarına tabi olan Denklem 2'de yerine yazdığımızda, benzerlik değişkeni olan η 'nın fonksiyonu olarak boyutsuz hız $f'(\eta) = u/U$ için bir adi diferansiyel denklem elde etmiş oluruz. Tablo 10–3 ve Şekil 10–99'daki sonuçlar, yaygın olarak kullanılan Runge-Kutta sayısal yöntemi ile elde edilmiştir. Bu yöntemin ayrıntıları kitabın kapsamı dışındadır (bkz. Heinsohn and Cimbala, 2003). Ayrıca çeperden uzakta küçük bir y -hız bileşeni v vardır, ancak $v \ll u$ olduğundan burada buna değinilmemiştir. Benzerlik çözümünün güzel yanı, bu tek hız profili şeklinin Şekil 10–99'daki gibi benzerlik değişkenleri cinsinden çizildiğinde *herhangi bir* x -konumu için geçerli olmasıdır. Şekil 10–99'da hesaplanan profil şeklinin, deneysel olarak elde edilen veriler (Şekil 10–99'daki daireler) ve Şekil 10–78'de görselleştirilmiş profil şekli ile uyumu olağanüstüdür. Blasius'un benzerlik çözümü gerçekten de hayret verici ölçüde başarılıdır.

Adım 4 Şimdi de bu sınır tabakayla ilgili birkaç büyüklük hesaplayalım. İlk olarak Tablo 10–3'te gösterilenden daha yüksek bir çözünürlükte yapılan bir sayısal çözümden $\eta \cong 4.91$ için $u/U = 0.990$ olduğunu buluruz. % 99'luk bu sınır tabaka kalınlığı Şekil 10–99'da çizilmiştir. Denklem 4'ü ve δ 'nın tanımını kullanmak suretiyle $y = \delta$ için,

$$\eta = 4.91 = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \delta \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (6)$$

sonucuna varılır. Bu sonuç, basit bir büyüklük mertebesi analizinden elde edilen Denklem 10–67 ile niteliksel olarak uyum içerisindedir. Denklem 6'daki sabit 4.91 çoğu yazar tarafından 5.0'a yuvarlatılır, ancak biz Blasius profilinden bulunan diğer büyüklüklerle uyum sağlamak için sonucu üç anlamlı basamağa göre vermeyi tercih ediyoruz.



ŞEKİL 10–99

Benzerlik değişkenleri cinsinden yarı-sonsuz düz bir levha üzerinde gelişen sınır tabakaya ait Blasius profili. Deneysel veriler (daireler) $\text{Re}_x = 3.64 \times 10^5$ içindir.

TABLO 10-3

Blasius'un düz bir levha üzerindeki laminar sınır tabakaya ait çözümü-çözüm benzerlik değişkenleri cinsinden verilmiştir*

η	f''	f'	f		η	f''	f'	f
0.0	0.33206	0.00000	0.00000		2.4	0.22809	0.72898	0.92229
0.1	0.33205	0.03321	0.00166		2.6	0.20645	0.77245	1.07250
0.2	0.33198	0.06641	0.00664		2.8	0.18401	0.81151	1.23098
0.3	0.33181	0.09960	0.01494		3.0	0.16136	0.84604	1.39681
0.4	0.33147	0.13276	0.02656		3.5	0.10777	0.91304	1.83770
0.5	0.33091	0.16589	0.04149		4.0	0.06423	0.95552	2.30574
0.6	0.33008	0.19894	0.05973		4.5	0.03398	0.97951	2.79013
0.8	0.32739	0.26471	0.10611		5.0	0.01591	0.99154	3.28327
1.0	0.32301	0.32978	0.16557		5.5	0.00658	0.99688	3.78057
1.2	0.31659	0.39378	0.23795		6.0	0.00240	0.99897	4.27962
1.4	0.30787	0.45626	0.32298		6.5	0.00077	0.99970	4.77932
1.6	0.29666	0.51676	0.42032		7.0	0.00022	0.99992	5.27923
1.8	0.28293	0.57476	0.52952		8.0	0.00001	1.00000	6.27921
2.0	0.26675	0.62977	0.65002		9.0	0.00000	1.00000	7.27921
2.2	0.24835	0.68131	0.78119		10.0	0.00000	1.00000	8.27921

* η yukarıdaki Denklem 4'te tanımlanan benzerlik değişkenidir ve $f(\eta)$ fonksiyonu Runge-Kutta sayısal yöntemi kullanılarak çözülmüştür. f'' büyüklüğünün kayma gerilmesi τ ile, f' büyüklüğünün sınır tabakadaki hızın x-bileşeni ile ($f' = u/U$), f büyüklüğünün ise akım fonksiyonu ile orantılı olduğuna dikkat ediniz. f' , Şekil 10-99'da η 'nin fonksiyonu olarak çizilmiştir.

Önemli bir diğer büyüklük de çeperdeki kayma gerilmesi τ_w 'dur:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (7)$$

Boyutsuz hız profilinin çeperdeki ($y = 0$ ve $\eta = 0$) eğimi Şekil 10-99'da çizilmiştir. Benzerlik sonuçlarında (Tablo 10-3) çeperdeki boyutsuz eğim,

$$\left. \frac{d(u/U)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f''(0) = 0.332 \quad (8)$$

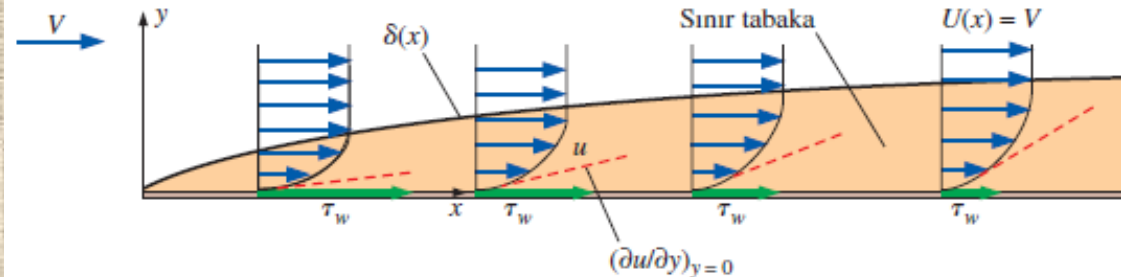
olarak elde edilir. Denklem 8, Denklem 7'de yerine yazılıp bazı cebirsel işlemler (benzerlik değişkenlerini fiziksel değişkenlere çevirme) yapılırsa,

Fiziksel değişkenler cinsinden kayma gerilmesi: $\tau_w = 0.332 \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (9)$

sonucuna varılır. Buna göre kayma gerilmesi x 'e bağlı ve Şekil 10-100'de çizildiği gibi $x^{-1/2}$ ile orantılı olarak azalmaktadır. Denklem 9'a göre $x = 0$ 'da τ_w sonsuzdur, ancak bu fiziksel olarak mümkün değildir. Sınır tabaka yaklaştırmayı levhanın giriş kenarı ($x = 0$) için uygun değildir, zira burada sınır tabaka kalınlığı x 'e kıyasla küçük değildir. Ayrıca herhangi bir gerçek düz levha sonlu bir kalınlığa sahiptir ve levhanın önünde süratle $U(x) = V$ ye ivmelenen dış akışlı bir durma noktası vardır. $x = 0$ 'a çok yakın bölge, akışın geri kalanındaki doğruluğu kaybetmeksizin göz ardı edilebilir.

ŞEKİL 10-100

Laminer düz levha sınır tabakası için çeper kayma gerilmesi, çeperdeki eğim $\partial u/\partial y$ aşağıya doğru yönünde azaldığı için $x^{-1/2}$ ile orantılı olarak azalır. Levhanın ön kısmı çeper sürtünme direncine arka kısmından daha fazla katkıda bulunur.



Denklem 9, bir **çeper sürtünme katsayısı** (yerel sürtünme katsayısı olarak da adlandırılır) tanımlamak suretiyle boyutsuzlaştırılır:

Yerel sürtünme katsayısı, laminar düz levha:
$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (10)$$

$C_{f,x}$ için verilen Denklem 10'un, farklı bir sabitle δ/x için verilen Denklem 6 ile aynı biçime sahip olduğuna, her ikisinin de Reynolds sayısının karekökünün tersi ile azaldığına dikkat ediniz. Bölüm 11'de L boyunda düz bir levha üzerindeki direnci bulmak için Denklem 10'u integre edeceğiz.

Adım 5 Sınır tabakanın ince olduğunu doğrulamamız gerekir. Pratik bir örnek olarak, sıcak bir günde şehirde 32 km/h hızla arabanızı sürerken, arabanızın ön kaputu üzerindeki akışı ele alalım. Havanın kinematik viskozitesi $1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 'dir. Kaputu, 1 m boyunda $V = 32 \text{ km/h}$ hızla hareket eden bir düz levha olarak ele alalım. Önce kaput sonundaki Reynolds sayısını yaklaşık olarak Denklem 10–60'tan hesaplayalım:

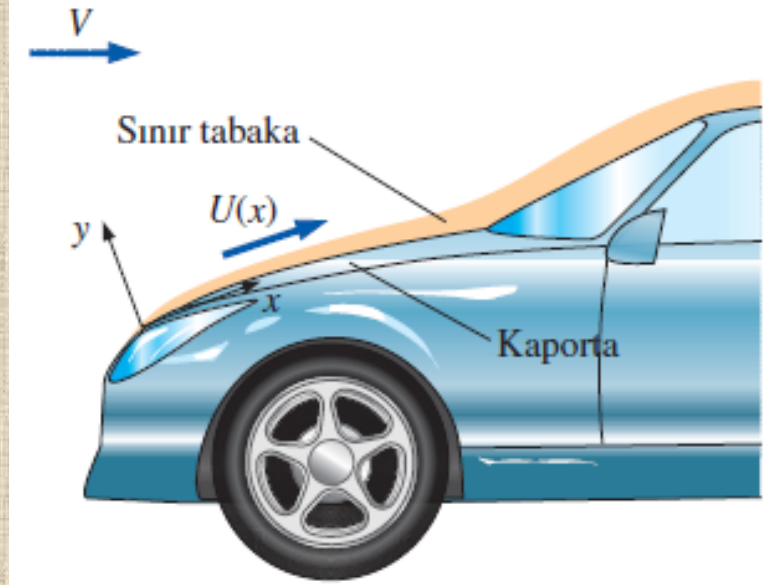
$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(32000 \text{ m}/3600 \text{ s})(1 \text{ m})}{1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 5.32 \times 10^5$$

Bu Re_x değeri, kritik Reynolds sayısı olan $Re_{x,kr} = 5 \times 10^5$ 'e çok yakın olduğundan, laminar akış kabulü uygun olabilir veya olmayabilir. Yine de akışın laminar kaldığını varsayarak, sınır tabaka kalınlığını hesaplamak için Denklem 6'yi kullanalım.

$$\delta = \frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{4.91(1\text{m})}{\sqrt{5.32 \times 10^5}} \left(\frac{1000 \text{ mm}}{\text{m}} \right) = 6.73 \text{ mm} \quad (11)$$

Kaput sonuna gelinceye kadar sınır tabakanın ulaştığı kalınlık sadece 7 mm civarında olup yaptığımız çok ince sınır tabaka varsayımını doğrulamaktadır.

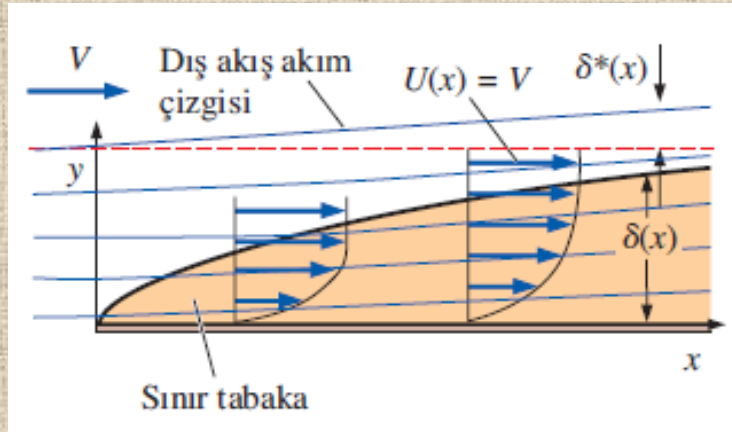
İrdeleme Blasius'un sınır tabaka çözümü yalnızca akış ile tam hizalanmış (akışa tam olarak paralel) düz levha üzerindeki akış için geçerlidir. Bununla birlikte araba kaputunda olduğu gibi tam düz olmayan veya akışa tam olarak paralel olmayan katı çeperler boyunca gelişen sınır tabaka için hızlı bir yaklaşımla olarak sıklıkla kullanılır. Adım 5'te gösterildiği gibi pratik mühendislik problemlerinde türbülansa geçiş değerinden daha büyük Reynolds sayılarına ulaşmak zor değildir. Dolayısıyla sınır tabaka türbülanslı hale geldiğinde, burada verilen laminar sınır tabaka çözümünü uygulama konusunda dikkatli olmalısınız.



ŞEKİL 10–101

Bir arabanın kaputu üzerinde gelişen sınır tabaka. Daha açık göstermek için sınır tabaka abartılı olarak çizilmiştir.

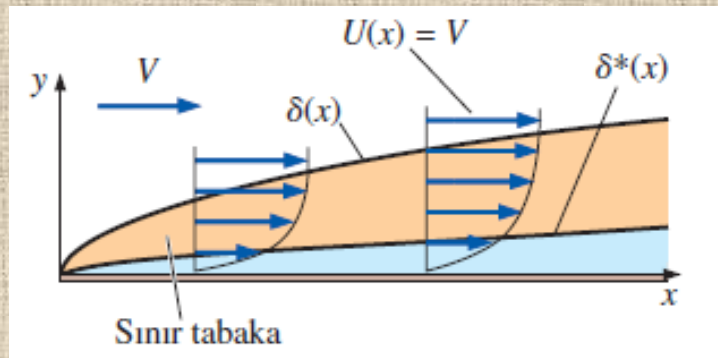
Yerdeğiştirme Kalınlığı



Sınır tabaka dışındaki bir akım çizgisi ile tanımlanan yerdeğiştirme kalınlığı. Sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir.

Yerdeğiştirme kalınlığı, sınır tabakanın tam dışındaki bir akım çizgisinin sınır tabaka etkisiyle çeperden uzaklaşma mesafesidir.

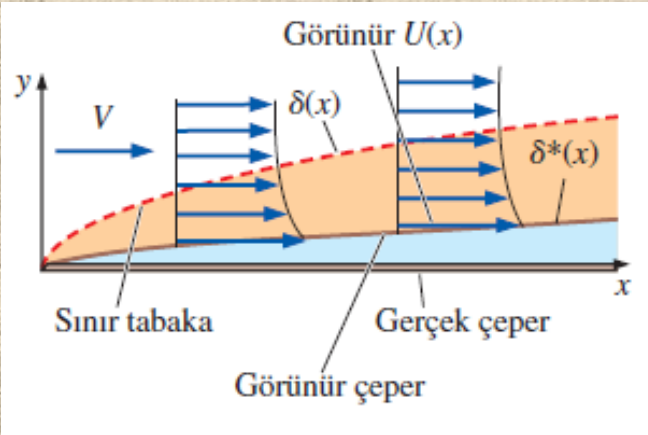
Yerdeğiştirme kalınlığı:
$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$



Düz bir levhada laminar sınır tabaka için yerdeğiştirme kalınlığı, kabaca sınır tabaka kalınlığının üçte biridir.

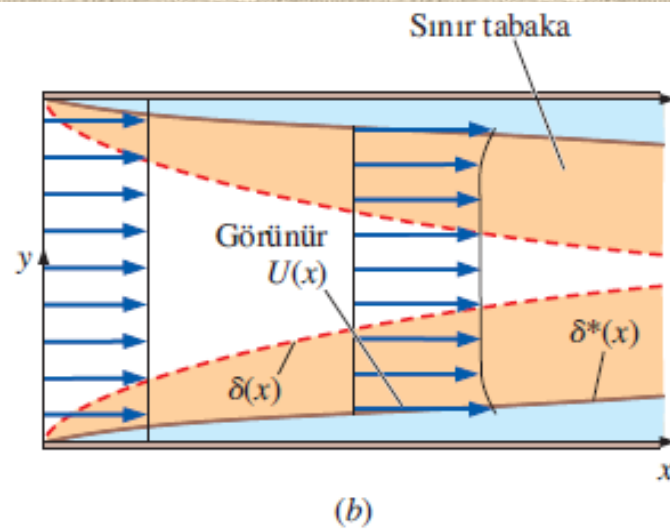
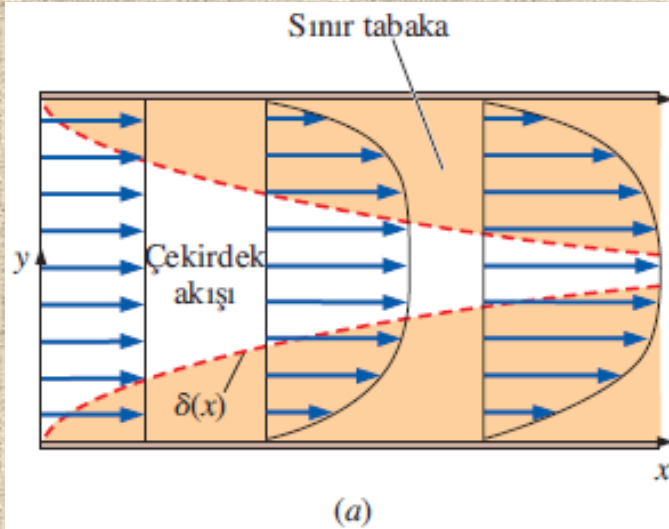
Yerdeğiştirme kalınlığı, laminar düz levha:

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}}$$



Sınır tabaka dönümsüz dış akışı etkileyerek çeperin, yerdeğiştirme kalınlığı şeklinde görünmesine yol açar. Çeperdeki “kalınlaşma” nedeniyle görünür $U(x)$ başlangıçtaki yaklaşıtımdan farklıdır.

Yerdeğiştirme kalınlığı, büyüyen sınır tabaka etkisiyle dış akışın çeper kalınlığında dördüğü hayali artıştır.



Sınır tabaka büyümesinin iki-boyutlu bir kanala giren akış üzerindeki etkisi: Üst ve alt sınır tabakalar arasındaki dönümsüz akış, gösterildiği gibi (a) gerçek hız profilleri ile (b) sınır tabaka yer değiştirme kalınlığından ötürü görünür çekirdek akışındaki değişim nedeniyle ivmelenir.

ÖRNEK 10-11 Bir Rüzgâr Tünelinin Tasarımında Yerdeğiştirme Kalınlığı

Düşük-hızlı küçük bir rüzgâr tüneli, sıcak telleri (anemometre) kalibre etmek üzere tasarlanmaktadır (Şekil 10-106). Hava sıcaklığı 19°C'dir. Rüzgâr tünelinin test bölümü 30 cm çapında ve 30 cm boyundadır. Test bölümünden geçen akışın mümkün olduğu kadar üniform olması gerekmektedir. Rüzgâr tünelinin hız aralığı 1 m/s'den 8 m/s'ye değişmektedir ve yapılacak tasarım, test bölümündeki $V = 4.0$ m/s'lik bir hava hızı için optimize edilecektir. (a) Test bölümünün girişinde yaklaşık üniform olan 4.0 m/s hızındaki akış hali için tünel eksenindeki hava hızı test bölümü sonunda ne kadar hızlanır? (b) Test bölümünde daha üniform bir akış sağlayacak bir tasarım öneriniz.

ÇÖZÜM Bir rüzgâr tünelinin dairesel kesitli test bölümünden geçen havanın hızlanması hesaplanacak ve test bölümü için yeni bir tasarım önerisi yapılacaktır.

Kabuller 1 Akış daimi ve akışkan sıkıştırılmazdır. 2 Çeperler pürüzsüz olup akış bozucu etkiler ve titreşimler asgari düzeyde tutulmaktadır. 3 Sınır tabaka laminardır.

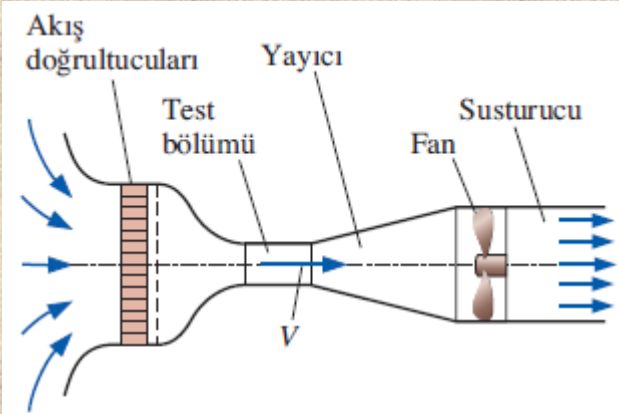
Özellikler $T = 19^\circ\text{C}$ 'deki havanın kinematik viskozitesi $\nu = 1.507 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Analiz (a) Rüzgâr tünelinin test bölümü sonundaki Reynolds sayısı yaklaşık olarak,

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(4.0 \text{ m/s})(0.30 \text{ m})}{1.507 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 7.96 \times 10^4$$

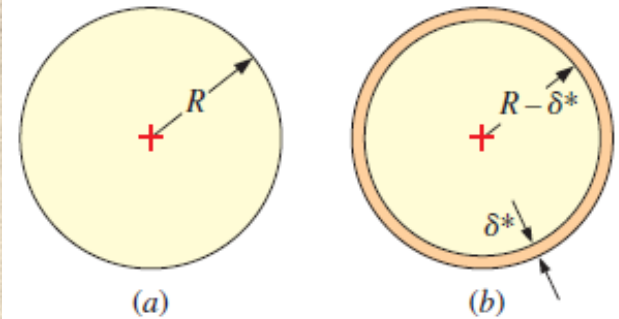
elde edilir. Bu Re_x sayısının, $\text{Re}_{x, \text{kr}} = 5 \times 10^5$ olan mühendislik kritik Reynolds sayısından, hatta $\text{Re}_{x, \text{kritik}} = 1 \times 10^5$ 'ten de küçük olmasından, ayrıca çeperlerin pürüzsüz ve akışın sakin olmasından dolayı, sınır tabakanın test bölümü boyunca laminar olarak kaldığını kabul edebiliriz. Rüzgâr tünelinin test bölümü boyunca sınır tabaka büyüdükçe, test bölümünün merkez eksen kısmında yer alan dönümsüz akış bölgesindeki hava, Şekil 10-105'teki gibi kütle korunumunu sağlamak için hızlanır. Test bölümü sonundaki yerdeğiştirme kalınlığını hesaplamak için Denklem 10-73'ü kullanalım:

$$\delta^* \cong \frac{1.72x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{1.72(0.30 \text{ m})}{\sqrt{7.96 \times 10^4}} = 1.83 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.83 \text{ mm} \quad (1)$$



ŞEKİL 10-106

Örnek 10-11'deki rüzgâr tünelinin şematik çizimi.



ŞEKİL 10-107

Örnek 10-11'deki rüzgâr tünelinin test bölümüne ait kesit görüntüleri: (a) Test bölümü başlangıcı ve (b) test bölümü sonu.

Birincisi test bölümünün başına, ikincisi ise sonuna ait olmak üzere test bölümüne ait iki farklı kesit görünüşü Şekil 10–107’de çizilmiştir. Test bölümünün sonundaki etkin yarıçap, Denklem 1’den bulunan δ^* kadar azalır. Test bölümü sonundaki ortalama hava hızını hesaplamak üzere kütlenin korunumu uygulanırsa,

$$V_{giriş} A_{giriş} = V_{çıkış} A_{çıkış} \rightarrow V_{çıkış} = V_{giriş} \frac{\pi R^2}{\pi(R - \delta^*)^2} \quad (2)$$

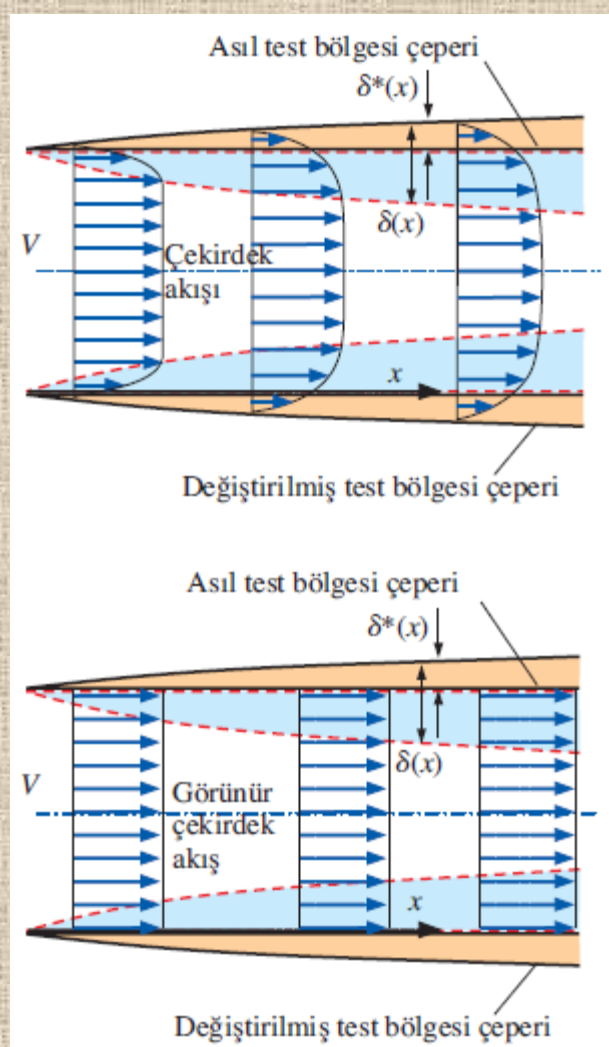
elde edilir ve buradan

$$V_{çıkış} = (4.0 \text{ m/s}) \frac{(0.15 \text{ m})^2}{(0.15 \text{ m} - 1.83 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 4.10 \text{ m/s} \quad (3)$$

sonucuna varılır. Buna göre hava hızı, yerdeğiştirme kalınlığının etkisiyle test bölümünde yaklaşık olarak %2.5 oranında artmaktadır.

(b) Daha iyi bir tasarım için nasıl bir öneride bulunabiliriz? Birinci olasılık, test bölümünü düz çeperli silindir yapmak yerine hafifçe ıraksayan (genişleyen) bir kanal olarak tasarlamaktır (Şekil 10–108). Eğer yarıçap, test bölümü boyunca $\delta^*(x)$ ile orantılı olarak artacak şekilde tasarlansaydı, yerdeğiştirme kalınlığının etkisi ortadan kalkar ve böylece test bölümü boyunca hava hızı yaklaşık olarak sabit kalırdı. Şekil 10–108’de gösterildiği gibi, hala çeperde bir sınır tabaka vardır. Ancak Şekil 10–105’teki durumun tersine bu kez sınır tabaka dışındaki çekirdek akışın hızı sabit kalmaktadır. Iraksak çeper önerisi 4 m/s’lik tasarım çalışma şartında iyi iş görür ve diğer akış hızlarında da bir miktar yardımcı olur. Diğer bir seçenek ise, çeper üzerindeki havanın bir kısmını çekmek için test bölümü çeperleri boyunca emiş uygulamaktır. Bu tasarımın avantajı, rüzgâr tüneli hızı değiştirildiğinde herhangi bir çalışma şartında test bölümündeki hava hızını sabit tutmak için emişin istenilen bir biçimde ayarlanabilmesidir. Bu öneri daha karmaşık ve muhtemelen daha pahalı bir seçenektir.

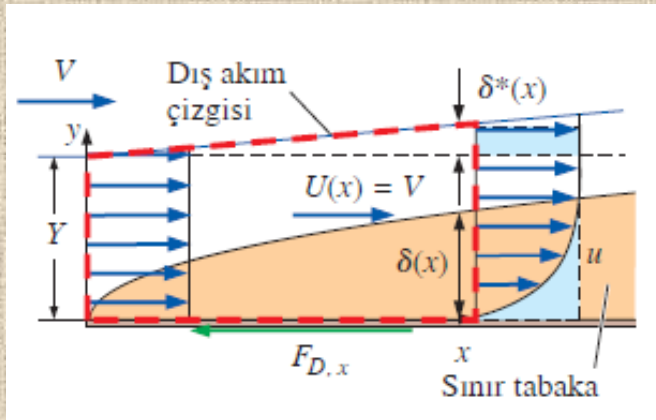
İrdeleme Rüzgâr tünellerinde test bölümündeki hava hızının üniform olmasını sağlamak için ıraksak çeper seçeneği veya çeper emişi seçeneği kullanılır. Burada verilen yerdeğiştirme kalınlığı tekniği, sınır tabakanın türbülanslı olduğu daha büyük rüzgâr tünellerine de uygulanır ancak bu durumda $\delta^*(x)$ için farklı bir denklem gerekir.



ŞEKİL 10–108

Iraksak bir test bölümü, sınır tabaka yerdeğiştirme etkisinden kaynaklanan akış hızlanmasını ortadan kaldırır: (a) Gerçek akış ve (b) görünür dönümsüz çekirdek akışı.

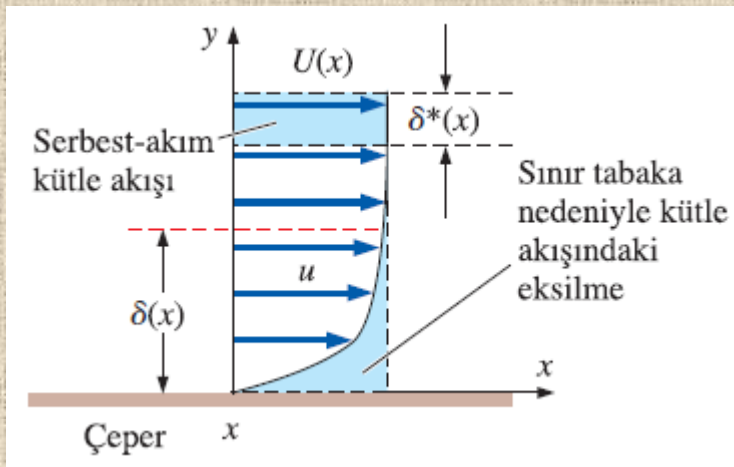
Momentum Kalınlığı



Kalın kesikli çizgiyle tanımlanmış, yukarıdan sınır tabaka dışındaki bir akım çizgisiyle alttan ise düz levha ile sınırlandırılmış kontrol hacmi; $F_{D,x}$ levhanın kontrol hacmine uyguladığı viskoz kuvvetidir.

$$0 = \int_{KY} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \underbrace{w\rho \int_0^{Y+\delta^*} u dy}_{x \text{ konumunda}} - \underbrace{w\rho \int_0^Y U dy}_{x=0 \text{ da}}$$

$$\int_0^Y (U - u) dy = U\delta^*$$



Sınır tabaka profili altında, kütleli debi eksilmesini temsil eden alan ile δ^* kalınlığında serbest-akım akışkan parçası tarafından oluşturulan alanın karşılaştırılması. Kütlenin korunumunu sağlamak için bu iki alanın aynı olması gerekir.

Kontrol hacmi için x-momentum korunumu:

$$\sum F_x = -F_{D,x} = \int_{KY} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \underbrace{\rho w \int_0^{Y+\delta^*} u^2 dy}_{x \text{ konumunda}} - \underbrace{\rho w \int_0^Y U^2 dy}_{x=0'da}$$

$$F_{D,x} = \rho w \int_0^Y u(U - u) dy \quad \frac{F_{D,x}}{w} = \rho \int_0^Y u(U - u) dy \equiv \rho U^2 \theta$$

Momentum kalınlığı, büyüyen sınır tabakanın varlığından ötürü birim genişlik başına oluşan momentum kaybının ρU^2 'ye oranı olarak tanımlanır.

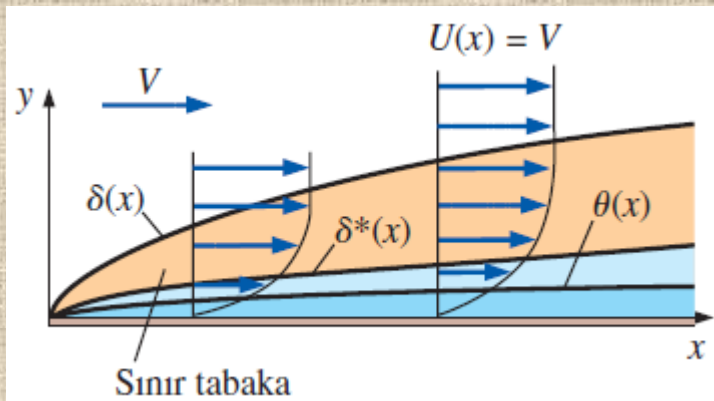
$$\theta = \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Momentum kalınlığı:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

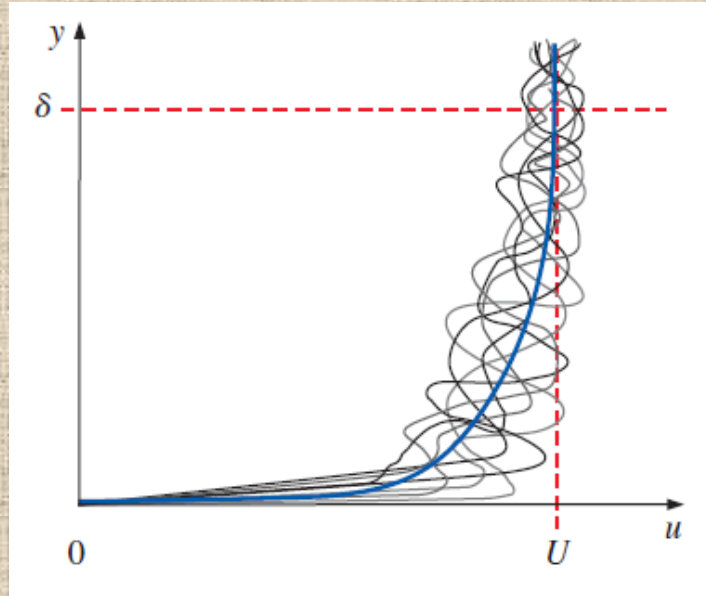
Momentum kalınlığı, laminar düz levha:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



Bir düz levhada laminar sınır tabaka için yerdeğiştirme kalınlığı δ^* 'nın %35.0'i, momentum kalınlığı ise δ^* 'nın %13.5'idir.

Düz Levha Üzerinde Türbülanslı Sınır Tabaka

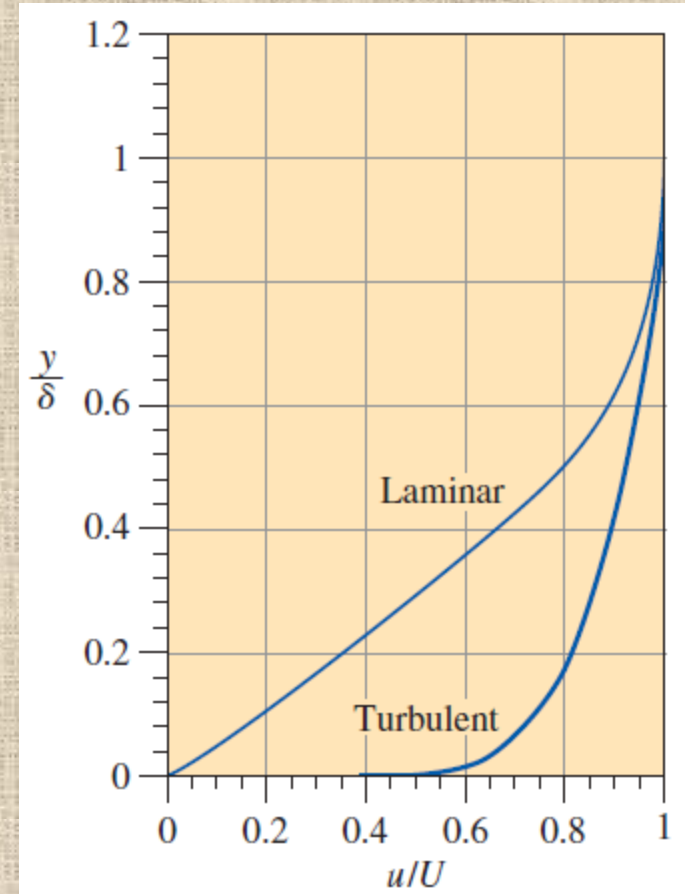


Bir türbülanslı sınır tabakanın daimi olmayışının gösterilişi; ince ve dalgalı siyah çizgiler anlık hız profilleridir. Kalın mavi çizgi ise uzun zaman-ortalamalı hız profilidir.

Burada tartışılan tüm türbülans ifadeleri zaman-ortalamalı değerleri temsil etmektedir. Türbülanslı düz levhada sınır tabakanın zaman-ortalamalı hız profile için yaygın bir ampirik yaklaşım 1/7'nci kuvvet yasasıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$y \leq \delta \text{ için } \frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \rightarrow y > \delta \text{ için } \frac{u}{U} \cong 1$$

Sınır tabaka kalınlığı kullanılarak boyutsuzlaştırılan laminar ve türbülanslı düz levha sınır tabaka hız profillerinin karşılaştırılması.



Bir üniform akıma paralel olarak yerleştirilmiş pürüzsüz düz levha üzerindeki laminar ve türbülanslı sınır tabakalara ait ifadelerin özeti*

Özellik	(a)		(b)
	Laminer	Türbülanslı ^(†)	Türbülanslı ^(‡)
Sınır tabaka kalınlığı	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Yerdeğiştirme kalınlığı	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Momentum kalınlığı	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.037}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Yerel çeper sürtünme katsayısı	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.059}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$

* Laminer değerler tamdır ve üç anlamlı basamağa göre listelenmiştir. Ancak türbülanslı akış alanlarında olan büyük belirsizlik nedeniyle, türbülanslı değerler yalnızca iki anlamlı basamağa göre verilmiştir.

† 1/7'nci kuvvet yasasından elde edilmiştir.

‡ Pürüzsüz borulardaki türbülanslı akışa ait deneysel verilerle birleştirilen 1/7'nci kuvvet yasasından elde edilmiştir.

ÖRNEK 10-12 Laminer ve Türbülanslı Sınır Tabakaların Karşılaştırılması

20°C'deki hava $L = 1.52$ m uzunluğundaki pürüzsüz düz bir levha üzerinden $V = 10.0$ m/s hızla akmaktadır (Şekil 10-114). (a) $x = L$ 'deki laminar ve türbülanslı sınır tabaka profillerini fiziksel değişkenler cinsinden ($u = f(y)$) çiziniz ve karşılaştırınız. (b) Her iki durum için $x = L$ 'deki yerel çeper sürtünme katsayısı değerlerini karşılaştırınız. (c) Laminer ve türbülanslı sınır tabakaların gelişimini çizerek karşılaştırınız.

ÇÖZÜM Laminer ve türbülanslı sınır tabaka profillerinin, yerel çeper sürtünme katsayısının ve düz levha sonundaki sınır tabaka kalınlıklarının karşılaştırması yapılacaktır.

Kabuller 1 Levha pürüzsüz olup serbest akım sakin ve üniormdur. 2 Akış ortalama olarak daimidir. 3 Levha sonsuz ince olup serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiştir.

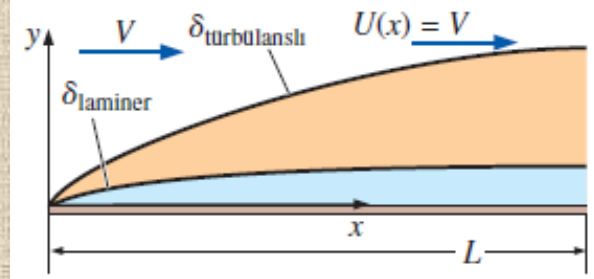
Özellikler Havanın 20°C sıcaklıktaki kinematik viskozitesi $\nu = 1.516 \times 10^{-5}$ m²/s'dir.

Analiz (a) İlk olarak $x = L$ 'deki Reynolds sayısını hesaplayalım:

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10.0 \text{ m/s})(1.52 \text{ m})}{1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.00 \times 10^6$$

Bu Re_x değeri, Şekil 10-81'e göre laminar ile türbülans arasında kalan geçiş bölgesindedir. Bu nedenle laminar ve türbülanslı sınır tabaka profilleri arasında bir karşılaştırma yapılması uygundur. Laminer durum için Şekil 10-113'teki y/δ değerlerini,

$$\delta_{\text{laminer}} = \frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{4.91(1520 \text{ mm})}{\sqrt{1.00 \times 10^6}} = 7.46 \text{ mm} \quad (1)$$



ŞEKİL 10-114

Örnek 10-12'deki düz levha üzerindeki hava akışı için laminar ve türbülanslı sınır tabakaların karşılaştırılması (sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

olarak hesapladığımız δ_{laminer} ile çarpabiliriz. Bu da bize mm olarak değerlerini verir. Benzer şekilde Şekil 10–113'teki u/U değerlerini de U ile ($U = V = 10.0$ m/s) çarparak m/s olarak u değerlerini elde ederiz. Laminer sınır tabaka profili Şekil 10–115'te fiziksel değişkenler cinsinden çizilmiştir.

Şimdi de Tablo 10–4'teki (a) sütununda verilen denklemi kullanarak aynı x -konumundaki türbülanslı sınır tabaka kalınlığını hesaplayalım:

$$\delta_{\text{türbülanslı}} \cong \frac{0.16x}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{0.16(1520 \text{ mm})}{(1.00 \times 10^6)^{1/7}} = 34 \text{ mm} \quad (2)$$

[$\delta_{\text{türbülanslı}}$ 'nın Tablo 10–4'ün (b) sütununa göre hesaplanan değeri bir miktar daha yüksek olup 36.4 mm'dir.] Denklem 1 ve 2 karşılaştırıldığında, Reynolds sayısının 1.0×10^6 olduğu durumda türbülanslı sınır tabakanın laminer sınır tabakadan 4.5 kat daha kalın olduğu görülür. Denklem 10–82 ile verilen türbülanslı sınır tabaka profili, laminer profile karşılaştırılmak üzere fiziksel değişkenlere dönüştürülerek Şekil 10–115'te çizilmiştir. Şekil 10–115'teki iki çarpıcı özellik şu şekilde ifade edilebilir: (1) türbülanslı sınır tabaka laminlerden çok daha kalındır ve (2) çeper yakınında u 'nun y 'ye göre eğimi türbülanslı durumda çok daha diktir. (Doğal olarak $1/7$ 'nci kuvvet yasa-sının çeperin çok yakınında gerçek türbülanslı sınır tabaka profilini yeteri kadar temsil etmediği unutulmamalıdır).

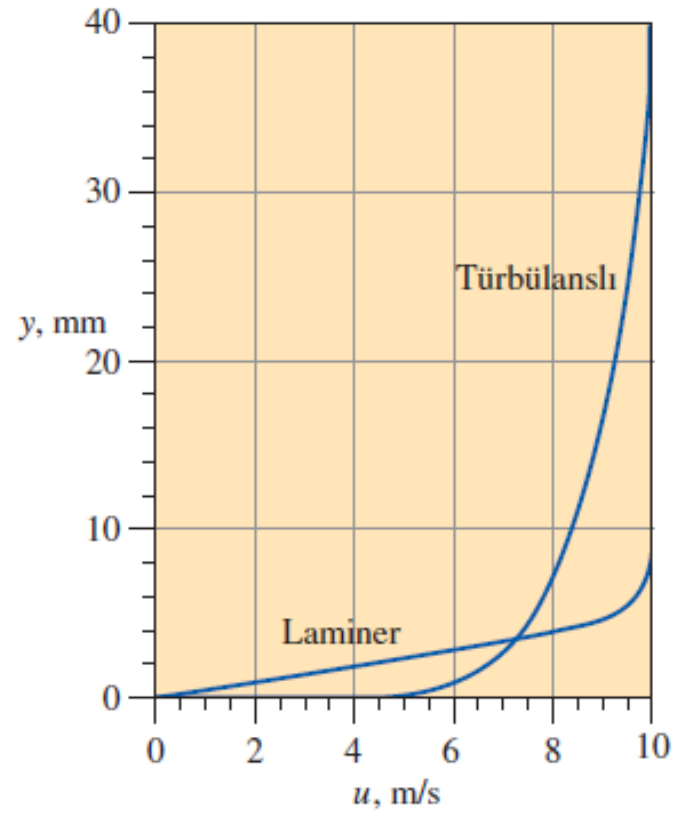
(b) Göz önüne alınan iki durum için yerel çeper sürtünme katsayılarını karşılaştırmak üzere Tablo 10–4'te verilen ifadeleri kullanalım. Laminer sınır tabaka için,

$$C_{f,x,\text{laminer}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0.664}{\sqrt{1.00 \times 10^6}} = 6.64 \times 10^{-4} \quad (3)$$

ve türbülanslı sınır tabaka için (a) sütunundan,

$$C_{f,x,\text{türbülanslı}} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{0.027}{(1.00 \times 10^6)^{1/7}} = 3.8 \times 10^{-3} \quad (4)$$

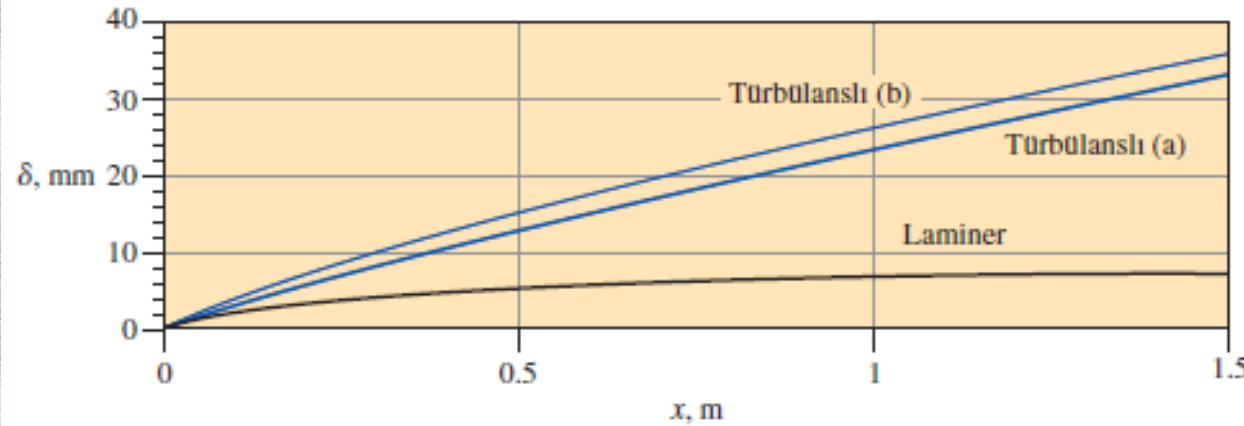
elde edilir. Denklem 3 ve 4 karşılaştırıldığında, türbülanslı çeper sürtünme katsayısı değerinin laminer değerin beş katından daha fazla olduğu görülür. Eğer Tablo 10–4'teki (b) sütununda verilen diğer türbülanslı çeper sürtünme katsayısına ait ifadeyi kullansaydık $C_{f,x,\text{türbülanslı}} = 3.7 \times 10^{-3}$ olarak Denklem 4 ile verilen değere çok yakın bir değer bulurduk.



ŞEKİL 10–115

Laminer ve türbülanslı düz levha sınır tabakalarının aynı x -konumunda fiziksel değişkenler cinsinden karşılaştırılması. Reynolds sayısı $\text{Re}_x = 1.0 \times 10^6$.

(c) Yapılan türbülanslı hesaplama, sınır tabakanın levhanın en başından itibaren türbülanslı olduğu varsayımına dayanır. Gerçekte önce bir laminar akış bölgesi, ardından bunu izleyen bir geçiş bölgesi ve en sonunda da Şekil 10–81’de gösterildiği gibi bir türbülanslı bölge vardır. Yine de ya tümüyle laminar akış ya da tümüyle türbülanslı akış kabul etmek suretiyle bu akış için δ_{laminar} ve $\delta_{\text{türbülanslı}}$ ’nın x ’in fonksiyonu olarak nasıl büyüdüklerini karşılaştırmak ilginç olabilir. Tablo 10–4’teki ifadeler kullanılarak karşılaştırma amacıyla bu ikisi Şekil 10–116’da çizilmiştir.



ŞEKİL 10–116

Örnek 10-12’deki düz levha için laminar ve türbülanslı sınır tabaka gelişiminin karşılaştırılması.

İrdeleme Açıkça görülmesi için Şekil 10–116’daki ordinat mm, apsis ise m olarak alınmıştır. Görüldüğü gibi türbülanslı durumda bile sınır tabaka son derece incedir. Tablo 10–4’te verilen (a) ve (b) türbülanslı durumları arasındaki farklılık, ampirik eğri uydurmalar ile Tablo 10–4’teki ifadeleri elde etmede kullanılan yarı-ampirik yaklaşımlar arasındaki uyumsuzluklar ile açıklanabilir. Bu durum, türbülanslı sınır tabaka değerlerini en fazla iki anlamlı basamağa göre verme kararımızı desteklemektedir. Levha sonuna kadar Reynolds sayısı geçiş bölgesinde kaldığından, δ ’nin gerçek değeri büyük bir olasılıkla Şekil 10–116’da çizilen laminar ve türbülanslı değerler arasında bir yere düşecektir.

Yaygın olan diğer bir yaklaştırım da **logaritma yasası**dır. Bu yarı-ampirik bir ifadedir ve yalnızca düz levha sınır tabakaları için değil aynı zamanda tam gelişmiş boru akışında türbülanslı hız profilleri için de geçerlidir.

Aslında logaritma yasası sadece düz levha üzerindeki akışlar için değil, çeperle çevrili hemen hemen tüm türbülanslı sınır tabakalar için uygulanabilir.

Logaritma yasası genellikle **sürtünme hızı** u^* adı verilen bir karakteristik hız ile boyutsuzlaştırılan değişkenler cinsinden ifade edilir.

Logaritma yasası:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B$$

Sürtünme hızı:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Tüm çeper boyunca geçerli olan daha gelişmiş bir ifade **Spalding çeper yasası**dır:

$$\frac{yu_*}{\nu} = \frac{u}{u_*} + e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa(u/u_*)} - 1 - \kappa(u/u_*) - \frac{[\kappa(u/u_*)]^2}{2} - \frac{[\kappa(u/u_*)]^3}{6} \right]$$

ÖRNEK 10-13**Türbülanslı Sınır Tabaka Profili Denklemlerinin Karşılaştırılması**

20°C'deki hava $L = 15.2$ m uzunluğunda pürüzsüz düz bir levha üzerinden $V = 10.0$ m/s hızla akmaktadır (Şekil 10-117). $x = L$ 'deki türbülanslı sınır tabaka profilini fiziksel değişkenler cinsinden ($u = f(y)$) çiziniz. Sınır tabakanın levha başlangıcından itibaren türbülanslı olduğunu varsayarak 1/7'nci kuvvet yasası, logaritma yasası ve Spalding çeper yasası ile elde ettiğiniz profilleri karşılaştırınız.

ÇÖZÜM Üç farklı yaklaşımları kullanarak bir düz levha sonundaki ortalama sınır tabaka hız profili $u(y)$ 'yi çizeceğiz.

Kabuller 1 Levha pürüzsüzdür, ancak alışlagelenin aksine, sınır tabakayı türbülansa geçmeye zorlayan serbest akım çalkantıları mevcut olup sınır tabaka levha başlangıcından itibaren türbülanslıdır. 2 Akış ortalama olarak daimidir. 3 Levha sonsuz incedir ve serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiştir.

Özellikler Havanın 20°C'deki kinematik viskozitesi $\nu = 1.516 \times 10^{-5}$ m²/s'dir.

Analiz Öncelikle $x = L$ 'deki Reynolds sayısını hesaplayalım:

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10.0 \text{ m/s})(15.2 \text{ m})}{1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.00 \times 10^7$$

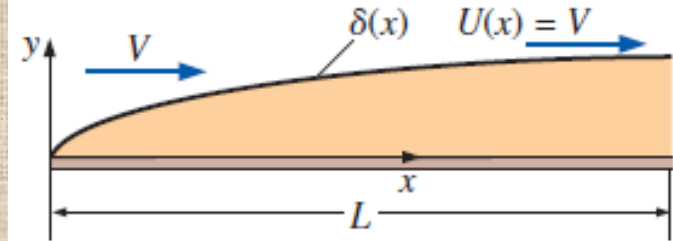
Bu değer, düz levha sınır tabakası için geçiş bölgesi Reynolds sayısının oldukça üzerindedir (Şekil 10-81) ve dolayısıyla levha başlangıcından itibaren türbülanslı akış kabul edilmesi uygundur.

Tablo 10-4'teki (a) sütunu değerlerini kullanarak levha sonundaki sınır tabaka kalınlığını ve yerel çeper sürtünme katsayısını belirleyelim:

$$\delta \cong \frac{0.16x}{(Re_x)^{1/7}} = 0.240 \text{ m} \quad C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(Re_x)^{1/7}} = 2.70 \times 10^{-3} \quad (1)$$

Sürtünme hızı tanımını (Denklem 10-84) ve $C_{f,x}$ 'in tanımını (Örnek 10-10'da Denklem 10'un sol tarafı) kullanarak sürtünme hızı hesaplanırsa,

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U \sqrt{\frac{C_{f,x}}{2}} = (10.0 \text{ m/s}) \sqrt{\frac{2.70 \times 10^{-3}}{2}} = 0.367 \text{ m/s} \quad (2)$$



ŞEKİL 10-117

Örnek 10-13'teki düz levha üzerindeki hava akışının oluşturduğu türbülanslı sınır tabaka (sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

elde edilir. Burada $U = \text{sabit}$ olup bir düz levha için her yerde $U = V$ 'dir. 1/7'nci kuvvet yasasının (Denklem 10–82) grafiğini çizmek kolaydır, ancak logaritma yasası (Denklem 10–83) $u = f(y)$ için kapalı bir fonksiyondur. Bunun yerine Denklem 10–83'ten y 'yi u 'nun fonksiyonu olarak çekersek,

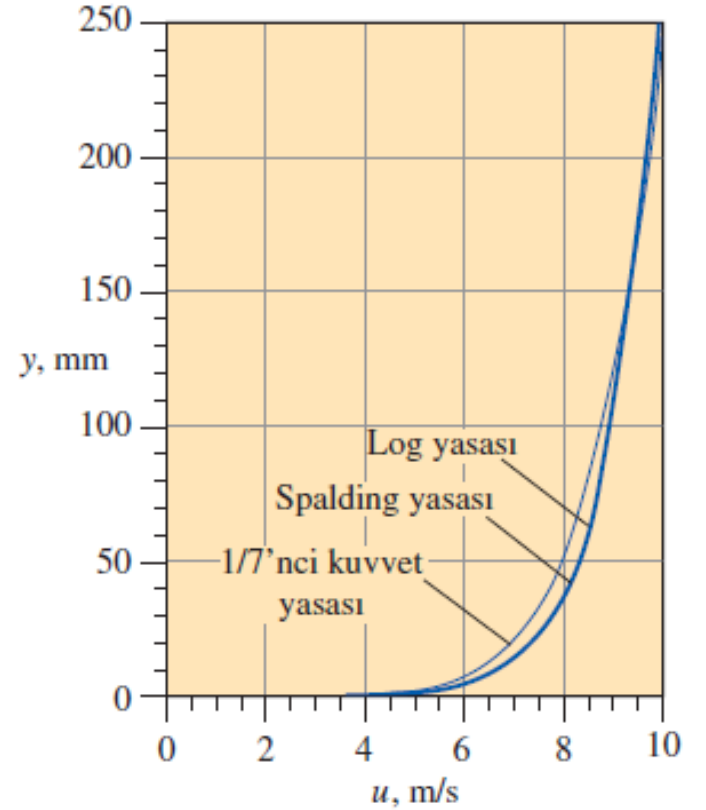
$$y = \frac{\nu}{u_*} e^{\kappa(u/u_* - B)} \quad (3)$$

elde ederiz. u hızının çeper üzerinde 0'dan sınır tabaka kenarında U 'ya kadar değiştiği bilindiğinden, Denklem 3 kullanılarak logaritma yasası hız profili fiziksel değişkenler cinsinden çizilebilir. Benzer düşünceyle, Spalding çeper yasası da (Denklem 10–85) $y = f(u)$ olarak yazılabilir. Bu üç profil karşılaştırma amacıyla aynı grafik üzerinde çizilmiştir (Şekil 10–118). Profillerin üçü de birbirlerine yakındır ve bu ölçekte logaritma yasasını Spalding yasasından ayırt etmek mümkün değildir.

Şekil 10–118'deki gibi bir fiziksel değişkenin lineer eksenli grafiği yerine çoğu zaman çepere yakın bölgeyi büyütme (daha görünür hale getirmek) için boyutsuz değişkenlerin yarı-logaritmik bir grafiği çizilir. Sınır tabaka literatüründe boyutsuz değişkenler için kullanılan en yaygın gösterim y^+ ve u^+ (**iç değişkenler** veya **çeper değişkenleri yasası**) olup

Çeper değişkenleri yasası: $y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \quad u^+ = \frac{u}{u_*} \quad (4)$

şeklinde ifade edilir. Fark edeceğiniz gibi y^+ bir tür Reynolds sayısıdır ve sürtünme hızı u_* hem y 'yi hem de u 'yu boyutsuzlaştırmak için kullanılmıştır. Şekil 10–118, çeper değişkenleri yasası kullanılarak Şekil 10–119'da yeniden çizilmiştir. Bu şekilde çizildiğinde, özellikle çeper yakınında olmak üzere üç yaklaştırım arasındaki farklar çok daha net görülmektedir. Karşılaştırma için Şekil 10–119'da tipik deneysel veriler de çizilmiştir. Spalding'in formülü genel itibarıyla en iyi sonucu vermektedir ve çeper yakınında deneysel verileri takip eden tek ifadedir. Sınır tabakanın dış kısmında, 1/7'nci kuvvet yasası deneysel u^+ değerlerine uygun olarak belirli bir y^+ değerinden sonra düzleşmektedir. Buna karşın hem logaritma yasası hem de Spalding formülü, yarı-logaritmik ölçekte düz bir doğru olarak sınırsızca devam etmektedir.

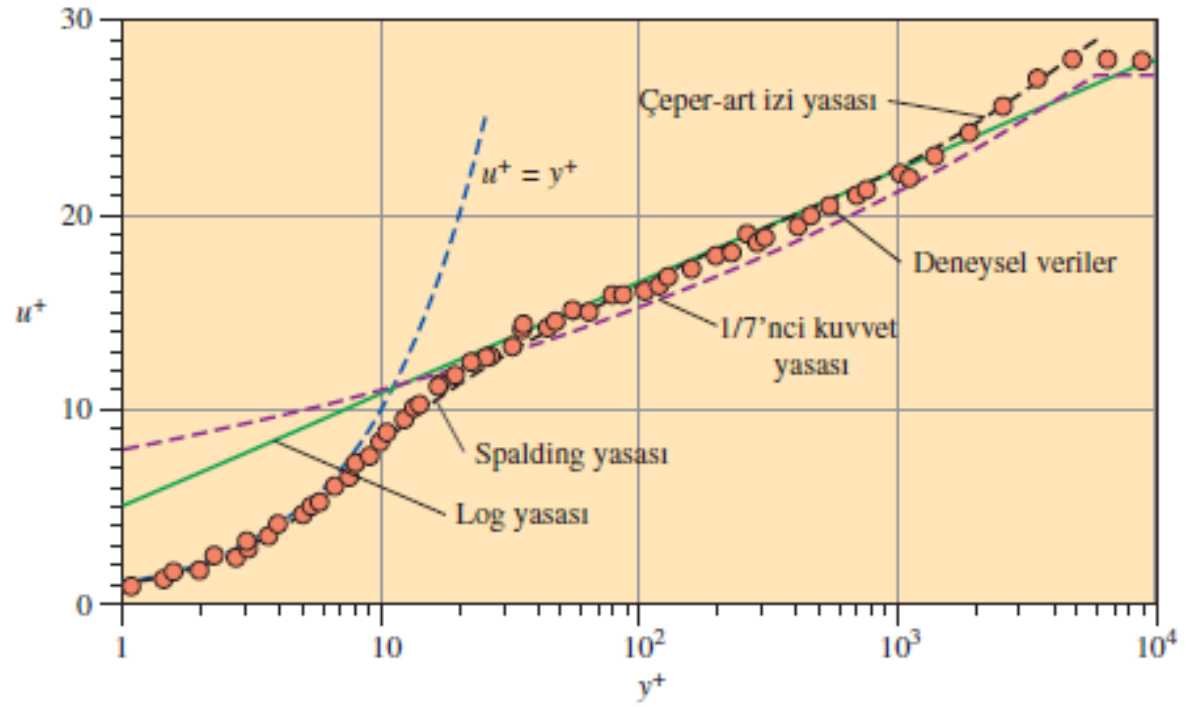


ŞEKİL 10–118

Türbülanslı düz levha sınır tabaka hız profili ifadelerinin fiziksel değişkenler cinsinden $Re_x = 1.0 \times 10^7$ için karşılaştırılması: 1/7'nci kuvvet yaklaştırımı, logaritma yasası ve Spalding çeper yasası.

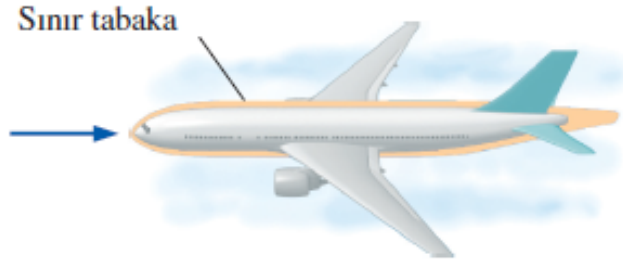
ŞEKİL 10-119

Türbülanslı düz levha profili ifadelerinin çeper değişkenleri yasası cinsinden $Re_x = 1.0 \times 10^7$ için karşılaştırılması: 1/7'nci kuvvet yaklaştırımı, logaritma yasası, Spalding çeper yasası ve çeper-art izi yasası. Karşılaştırma için tipik deneysel veriler ve viskoz alt tabaka denklemi de ($u^+ = y^+$) gösterilmiştir.

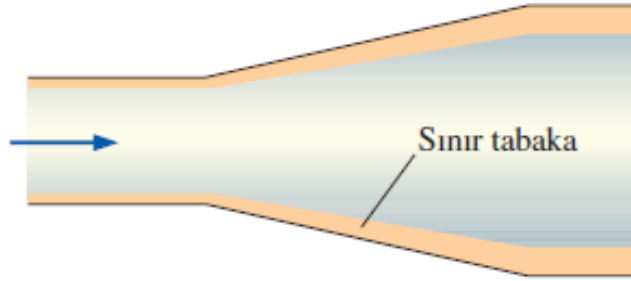


İrdeleme Şekil 10-119'da $u^+ = y^+$ lineer denklemi de çizilmiştir. Çepere çok yakın ($0 < y^+ < 5$ veya 6) bölgeye **viskoz alt tabaka** adı verilir. Bu bölgede çepere yakınlık dolayısıyla türbülans çalkantıları baskılanır ve hız profili neredeyse *lineer*dir. Bu bölgeye verilen diğer isimler **lineer alt tabaka** ve **laminer alt tabaka**dır. Spalding denkleminin viskoz alt tabakayı izlediği ve düzgün bir biçimde logaritma yasasını takip ettiği görülmektedir. Çepere yakın bu bölgede ne 1/7'nci kuvvet yasası ne de logaritma yasası geçerlidir.

Basınç Gradyenli Sınır Tabakalar



(a)



(b)

ŞEKİL 10-120

Basınç gradyenli sınır tabakalar hem dış hem de iç akışlarda oluşur: (a) Bir uçağın gövdesi boyunca ve art izi tarafına doğru gelişen sınır tabaka ve (b) bir yayıcının çeperi boyunca büyüyen sınır tabaka (her iki durumda da sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

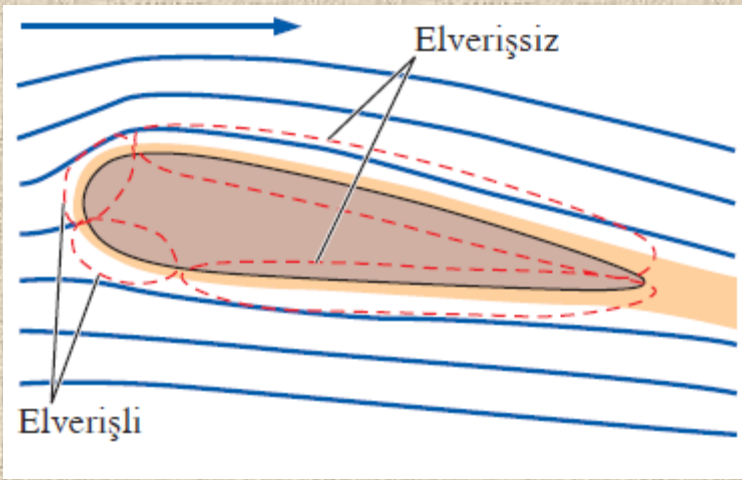
Eğer akış viskoz olmayan ve/veya dönümsüz bir dış akış bölgesinde (sınır tabakanın dışı) ivmeleniyorsa $U(x)$ artar, $P(x)$ ise azalır.

Buna **elverişli basınç gradyeni** denir.

Bu tür ivmelenen bir akışta sınır tabaka genellikle incedir ve çepere sıkıca tutunmuştur.

Dolayısıyla sınır tabaka çeperden ayrılmayacak bir yapıda olduğundan akış ayrılması beklenmez. Öte yandan dış akış yavaşlıyorsa (negatif ivmeleniyorsa) $U(x)$ azalır, $P(x)$ artar ve bu durumda bir **elverişsiz** veya **ters basınç gradyeni** söz konusudur.

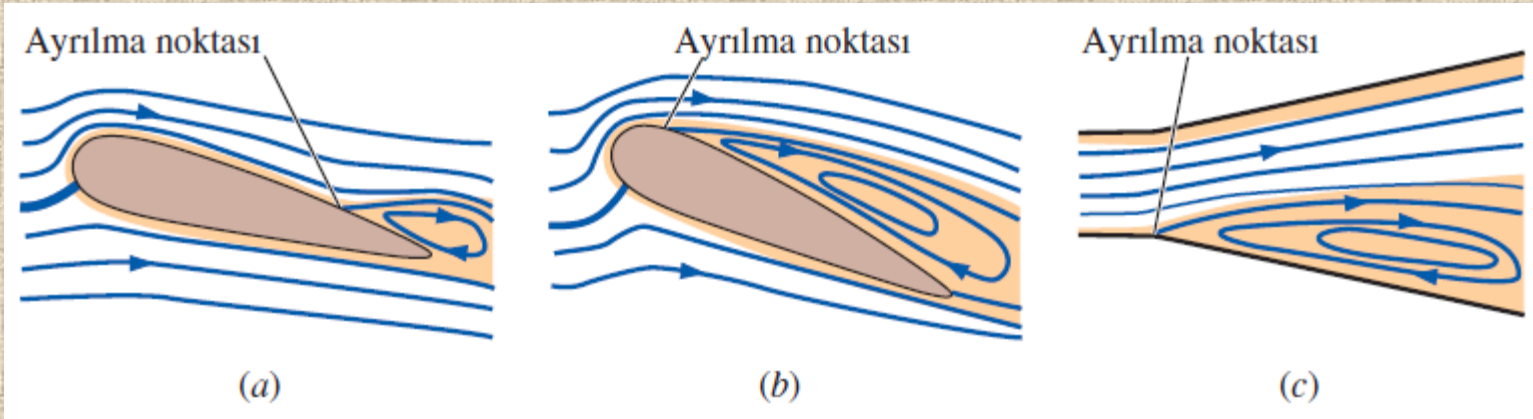
Adından da anlaşılacağı gibi bu arzu edilmeyen bir durumdur. Çünkü sınır tabaka bu ters basınç gradyeni altında genellikle daha kalın ve çepere sıkıca tutunmamış olup akışın çeperden ayrılması çok daha muhtemeldir.



Serbest akıma batırılmış bir cisim boyunca gelişen sınır tabaka, tipik olarak cismin ön kısmında elverişli bir basınç gradyenine, cismin arka kısmında ise elverişsiz (ters) bir basınç gradyenine maruz kalır.

Kapalı akım çizgileri, **ayrılma kabarcığı** adı verilen sürekli dolanımlı bir akış bölgesini işaret etmektedir.

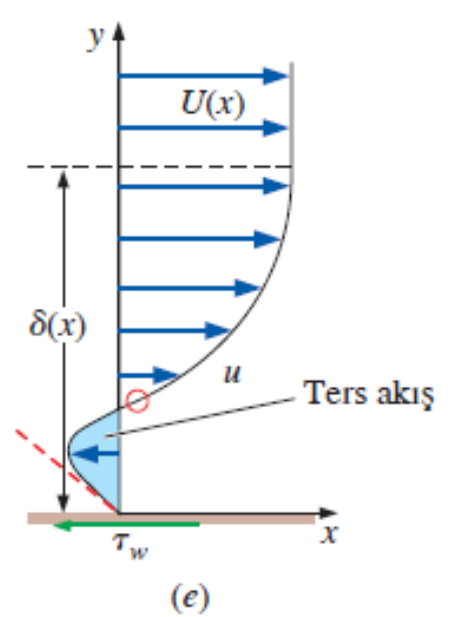
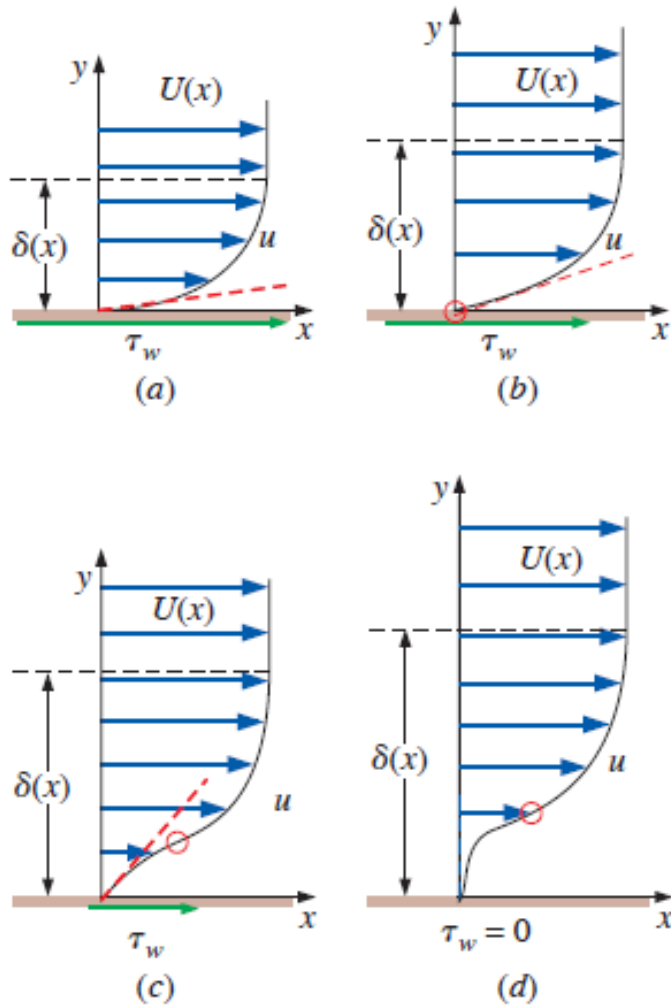
Ayrılma kabarcığındaki ters akış nedeniyle, sınır tabaka denklemleri akış ayrılma noktasının aşağıakımında geçersizdir.



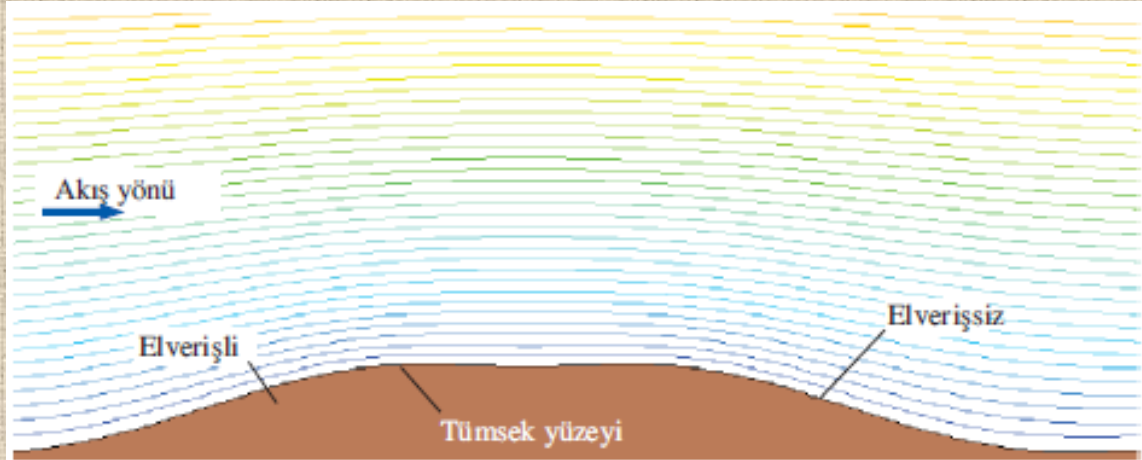
Ters basınç gradyeninin bulunduğu bölgelerde oluşan sınır tabaka ayrılmalarına örnekler: (a) Orta seviyede bir hücum açısındaki uçak kanadı profili, (b) yüksek hücum açısında aynı kanat profili (kaldırma kuvveti kaybına uğramış bir kanat) ve (c) sınır tabakanın tutunamadığı ve bir kenar üzerinden ayrıldığı geniş açılı bir difüzör (yayıcı).

Çeperde:

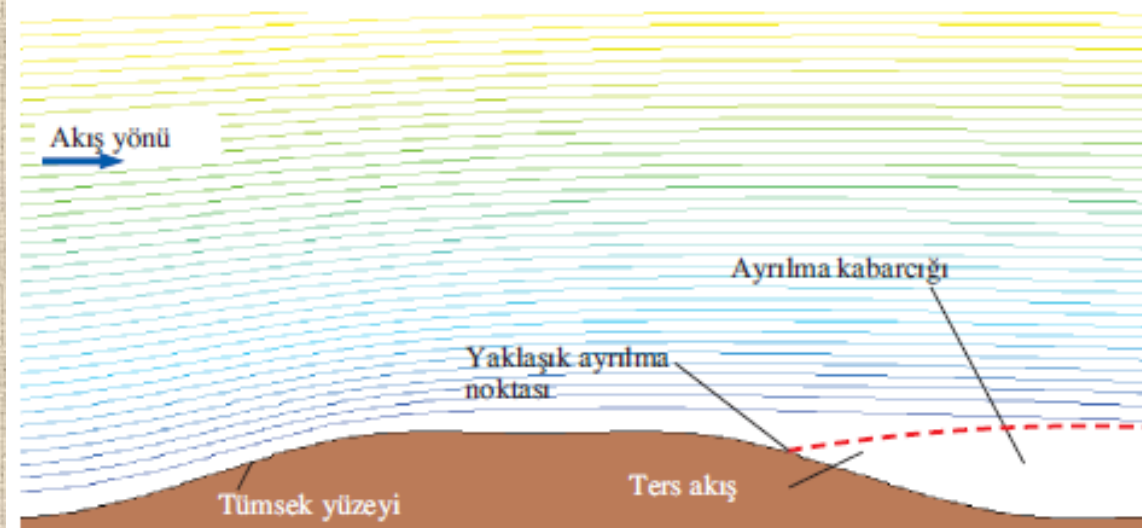
$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -U \frac{dU}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$$



Basınç gradyeninin bir fonksiyonu olarak sınır tabaka hız profili şekillerinin karşılaştırılması ($dP/dx = -U dU/dx$): (a) Elverişli, (b) sıfır, (c) hafif ters, (d) kritik ters (ayrılma noktası) ve (e) yüksek ters; büküm noktaları kırmızı çemberler ile gösterilmiş olup çeper kayma gerilmesi $\tau_w = \mu (\partial u / \partial y)_{y=0}$ her durum için çizilmiştir.

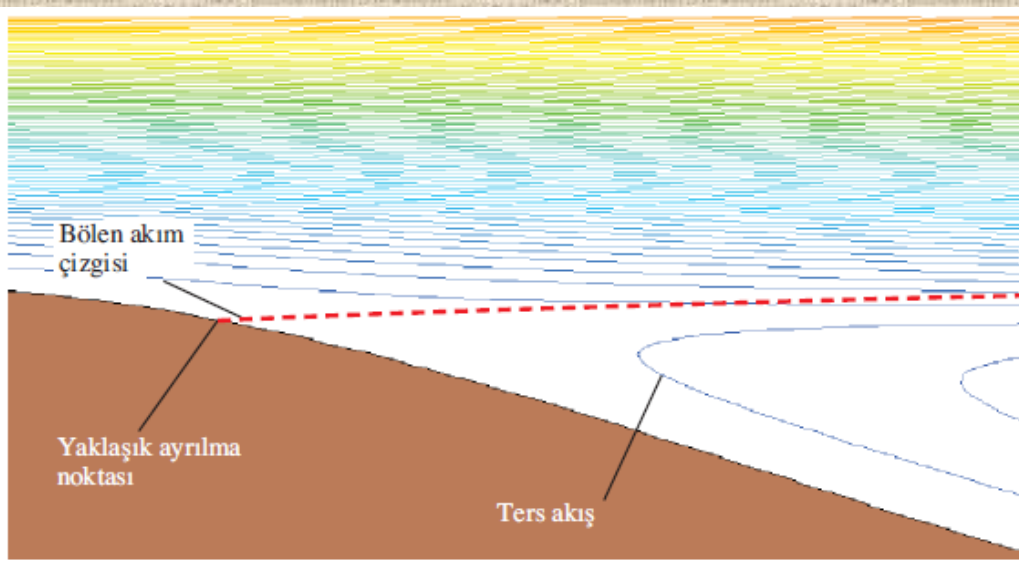


(a)

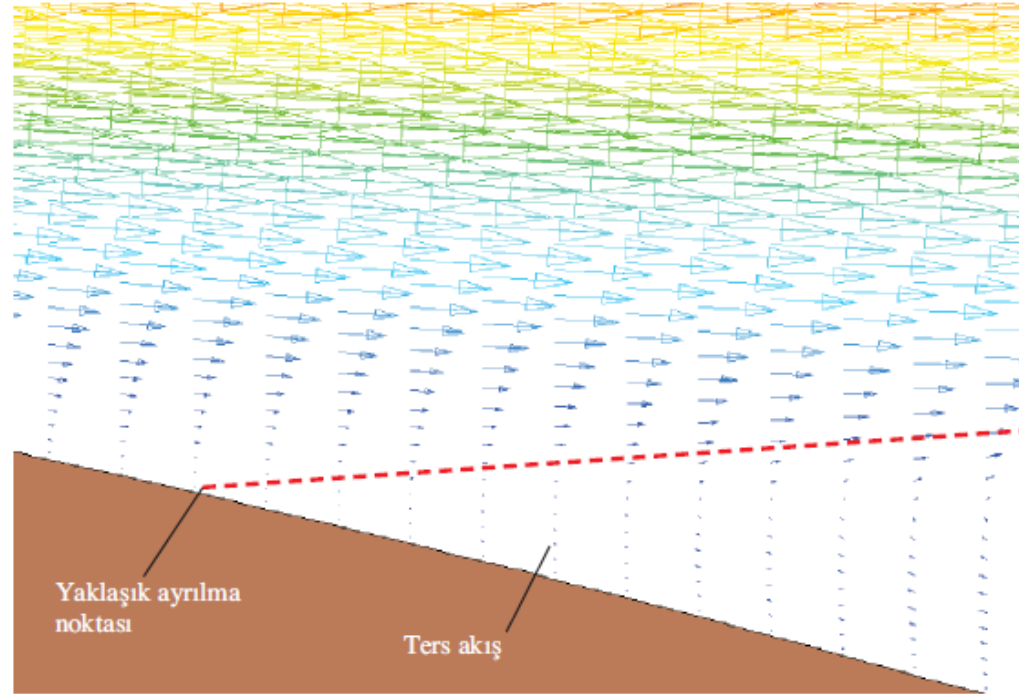


(b)

Bir tümsek üzerinden iki-boyutlu akışın HAD sonuçları: (a) Dış akışa ait akım çizgilerinin çizildiği Euler çözümü (akış ayrılması yok), (b) tümseğin aşağıakımı üzerinde akış ayrılmasını gösteren laminar akış çözümü,



(c)

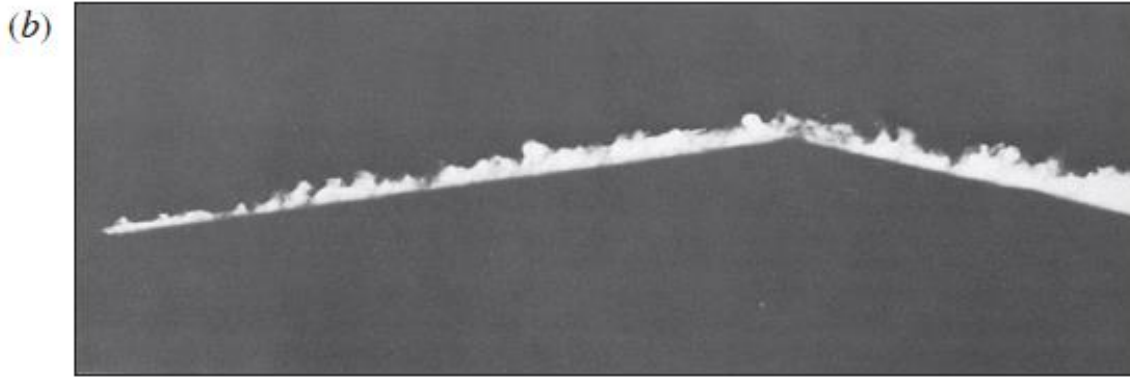
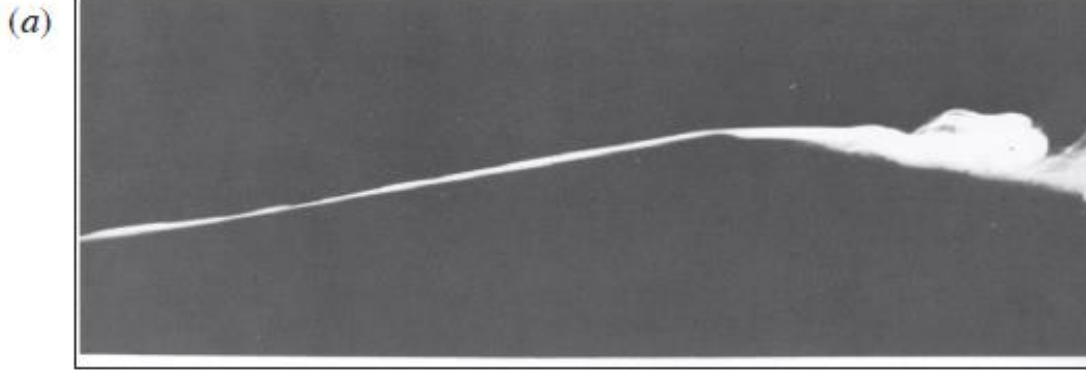


(d)

Bir tümsek üzerinden iki-boyutlu akışın HAD sonuçları:
(c) ayrılma noktası civarındaki akım çizgilerinin yakından görünüşü ve (d) hız vektörlerinin yakından görünüşü, (c)'deki görünüş. Kesikli kırmızı çizgi bir bölen akım çizgisi. Bu akım çizgisi altındaki akışkan, içinde akışkanın döndüğü ayrılma kabarcığı içerisine “hapsedilmiştir”.

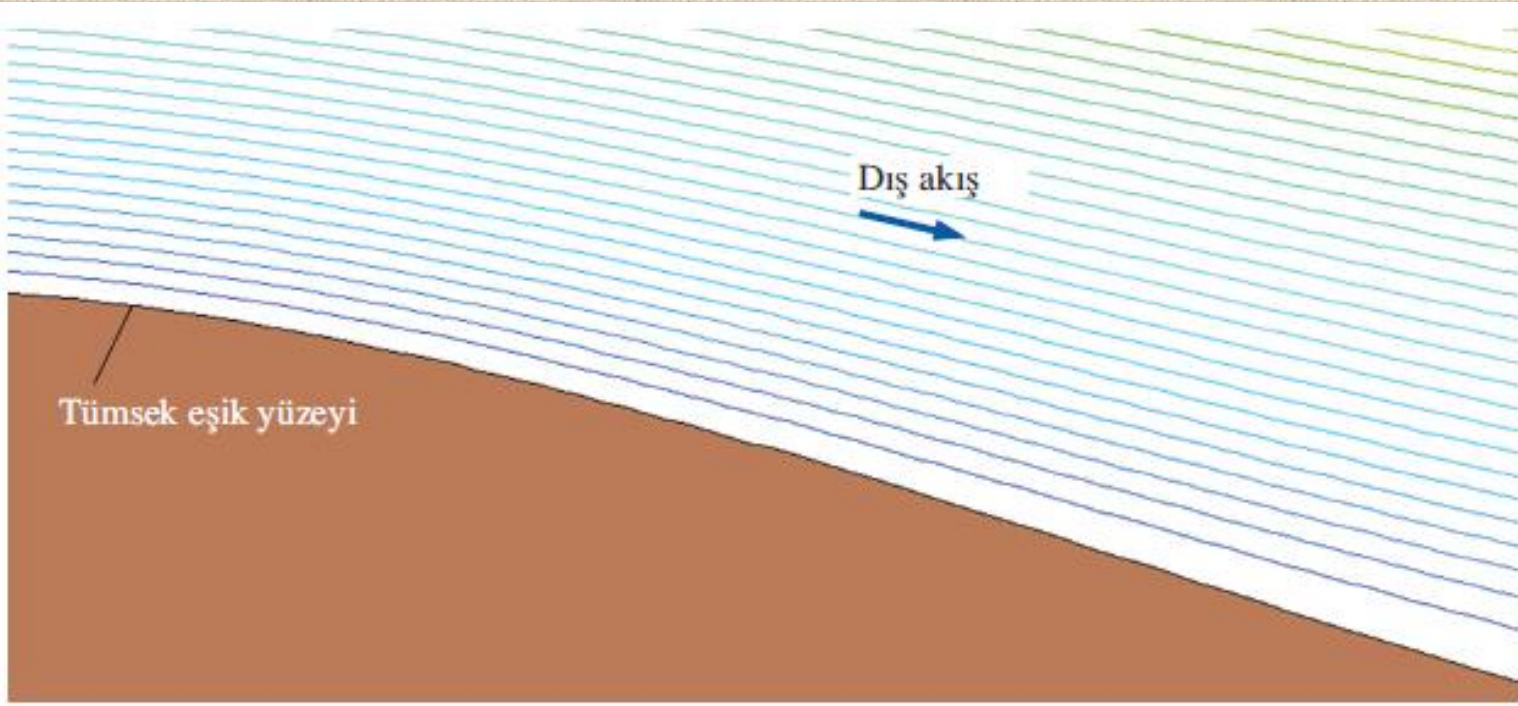
Sınır tabaka yaklaştırımı sadece dış akış çözümünün başarısı kadar iyi sonuç verir; eğer ayrılma noktası dış akışı önemli ölçüde değiştiriyorsa, bu durumda sınır tabaka yaklaştırımı hatalı olacaktır.

Türbülanslı sınır tabakalar, aynı ters basınç gradyenine maruz laminar sınır tabakalara kıyasla akış ayrılmasına karşı daha dirençlidir.



Ters basınç gradyeninde laminar ve türbülans sınır tabaka görüntülerinin karşılaştırılması; akış soldan sağa doğrudur. (a) Laminar sınır tabaka köşede ayrılır ancak (b) türbülanslı sınır tabaka ayrılmaz.

Fotoğraflar 1982'de M. R. Head tarafından akış titanyum–tetraklorür ile görselleştirilerek çekilmiştir. Head, M. R. 1982 in Flow Visualization II, W. Merzkirch, ed., sayfa 399–403. Washington: Hemisphere.



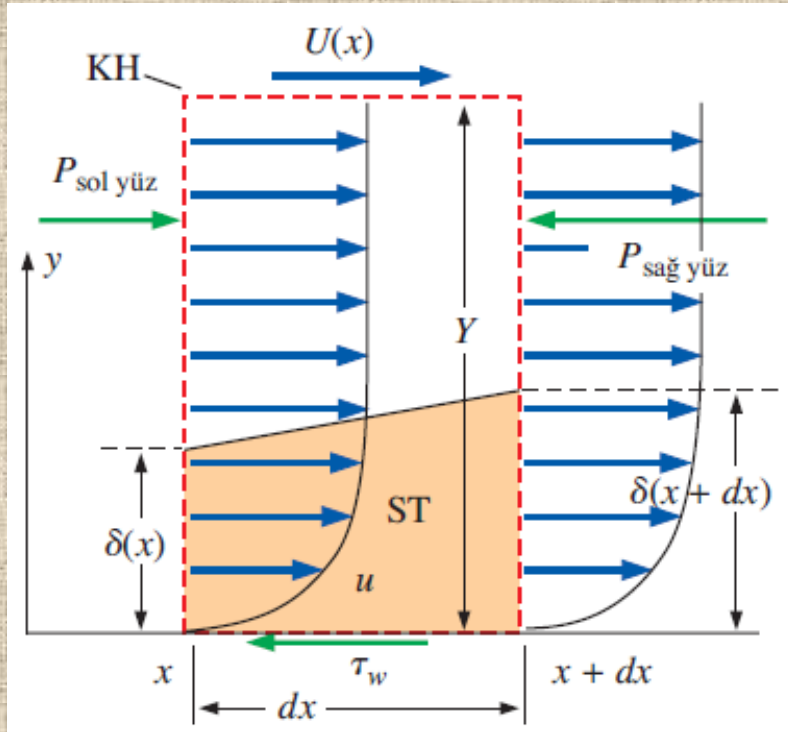
Şekil 10-124'te verilen tümsek üzerindeki türbülanslı akışa ait HAD sonuçları. Şekil 10-124b'deki laminar akış sonuçlarıyla kıyaslandığında türbülanslı sınır tabaka akış ayrılmasına karşı daha dirençlidir ve tümseğin arka kısmındaki ters basınç gradyeni bölgesinde çeperden ayrılmaz.

Tümseğin arka kısmında ayrılan laminar sınır tabakanın aksine, türbülanslı sınır tabakanın yüzeye yapışık kaldığına (akış ayrılmasının bulunmadığına) dikkat ediniz. Türbülanslı durumda dış akış için Euler çözümü (Şekil 10-124a), hiçbir akış ayrılması olmadığı ve sınır tabakanın oldukça ince kalmasından ötürü tüm tümsek boyunca geçerli olan uygun bir yaklaşımdır.

Sınır Tabakalar için Momentum İntegral Tekniği

Pratik mühendislik uygulamalarının çoğunda sınır tabaka içerisinde olup biten herşeyi bilmek gerekli değildir. Daha çok sınır tabaka kalınlığı ve çeper sürtünme katsayısı gibi sınır tabakanın genel özelliklerini yaklaşık olarak belirlemek isteriz.

Momentum integral tekniği, çeperler boyunca sıfır veya sıfır olmayan basınç gradyeni altındaki sınır tabakalara ait bu tür özelliklerin nicel yaklaşımlarını elde etmede bir control hacmi yaklaşımı kullanır. Ayrıca bu teknik hem laminar hem de türbülanslı sınır tabakalar için kullanılabilir.



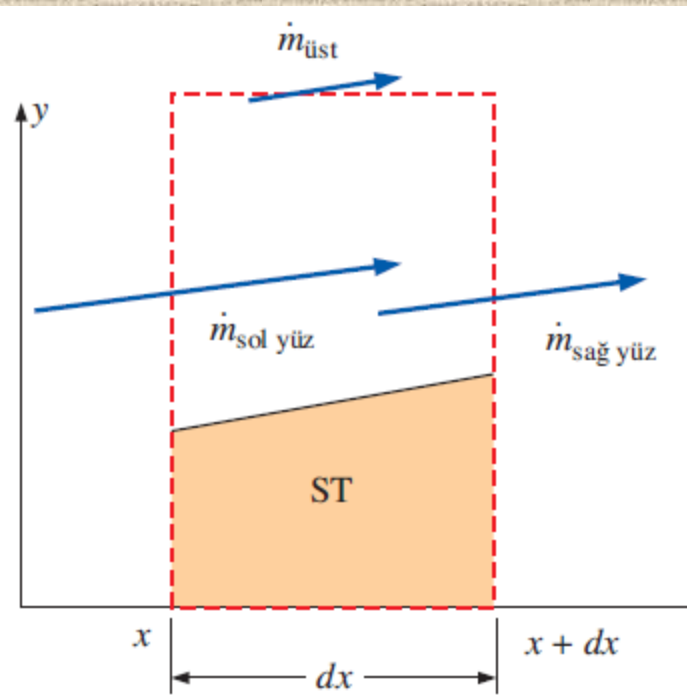
$$P_{\text{sol yüz}} = P$$

$$P_{\text{sağ yüz}} = P + \frac{dP}{dx} dx$$

$$\dot{m}_{\text{sol yüz}} = \rho w \int_0^Y u dy$$

$$\dot{m}_{\text{sağ yüz}} = \rho w \left[\int_0^Y u dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u dy \right) dx \right]$$

Momentum integral denkleminin türetilmesinde kullanılan kontrol hacmi (kesikli kırmızı çizgi).



ŞEKİL 10-128

Şekil 10-127'deki kontrol hacmi için kütle akışı dengesi.

$$\dot{m}_{\text{üst}} = -\rho w \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right) dx$$

$$\underbrace{\sum F_{x, \text{kütle}}}_{\text{yerçekimi ihmal}} + \underbrace{\sum F_{x, \text{yüzey}}}_{YwP - Yw\left(P + \frac{dP}{dx} dx\right) - w \, dx \, \tau_w}$$

$$= \underbrace{\int_{\text{sol yüz}} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}_{-\rho w \int_0^Y u^2 \, dy} + \underbrace{\int_{\text{sağ yüz}} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}_{\rho w \left[\int_0^Y u^2 \, dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 \, dy \right) dx \right]} + \underbrace{\int_{\text{üst}} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}_{\dot{m}_{\text{üst}} U}$$

$$-Y \frac{dP}{dx} - \tau_w = \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 \, dy \right) - \rho U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right)$$

$$U \frac{dU}{dx} \int_0^Y dy - \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 \, dy \right) - U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u(U - u) \, dy \right) + \frac{dU}{dx} \int_0^Y (U - u) \, dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\frac{d}{dx} \left(U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \right) + U \frac{dU}{dx} \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Çarpma kuralı:

$$\frac{d}{dx} \left(U \int_0^Y u \, dy \right) = U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right) + \frac{dU}{dx} \int_0^Y u \, dy$$

Tersinden çarpma kuralı:

$$U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right) = \frac{d}{dx} \left(U \int_0^Y u \, dy \right) - \frac{dU}{dx} \int_0^Y u \, dy$$

Çarpımın türevi kuralı
momentum integral
denkleminin
türetilmesinde
tersten kullanılır.

Kármán integral denklemi:

$$\frac{d}{dx} (U^2 \theta) + U \frac{dU}{dx} \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Kármán integral denklemi, alternatif biçim:

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx}$$

Şekil faktörü:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

Yerel çeper sürtünme katsayısı:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

Kármán integral denklemi, düz levha sınır tabakası:

$$C_{f,x} = 2 \frac{d\theta}{dx}$$

ÖRNEK 10-14 Düz Levha Sınır Tabakasının Kármán İntegral Denklemi ile Analizi

Düz bir levha üzerindeki türbülanslı sınır tabaka hakkında yalnızca iki unsurun, yani yerel çeper sürtünme katsayısının (Şekil 10-130),

$$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}} \quad (1)$$

ve sınır tabaka hız profili için,

$$y \leq \delta \text{ ise } \frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad y > \delta \text{ için } \frac{u}{U} \cong 1 \quad (2)$$

olarak ifade edilen 1/7'inci kuvvet yasasının bilindiğini varsayınız. Yerdeğiştirme kalınlığı ve momentum kalınlığı tanımlarından yararlanmak suretiyle Kármán integral denklemini kullanarak δ , δ^* ve θ 'nın x ile nasıl değiştiğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM Denklem 1 ve 2'ye göre δ , δ^* ve θ 'yı belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış türbülanslı ancak ortalama olarak daimidir. 2 Levha ince ve $U(x) = V = \text{sabit}$ olacak şekilde serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiştir.

Analiz Momentum kalınlığını bulmak için önce Denklem 2'yi Denklem 10-80'de yerine yazıp integre edelim:

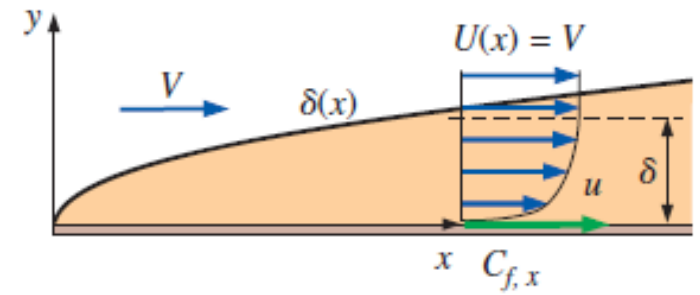
$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \frac{7}{72} \delta \quad (3)$$

Benzer şekilde Denklem 10-72'yi integre ederek yerdeğiştirme kalınlığını bulalım:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \frac{1}{8} \delta \quad (4)$$

Kármán integral denklemi düz bir levha sınır tabakası için Denklem 10-99'ye dönüşür. Denklem 3'ü Denklem 10-99'de yazıp düzenleyerek,

$$C_{f,x} = 2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{14}{72} \frac{d\delta}{dx}$$



ŞEKİL 10-130

Örnek 10-14'te akışın düz levha üzerinde meydana getirdiği türbülanslı sınır tabaka (sınır tabaka kalınlığı abartılı çizilmiştir).

elde edilir. Bu ifadeden,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{14} C_{f,x} = \frac{72}{14} 0.027 (\text{Re}_x)^{-1/7} \quad (5)$$

sonucuna varılır. Burada yerel çeper sürtünme katsayısı yerine Denklem 1'i yerleştirmiş olduk. Böylece Denklem 5 doğrudan integre edilerek,

$$\text{Sınır tabaka kalınlığı:} \quad \frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\text{Re}_x)^{1/7}} \quad (6)$$

elde edilebilir. Son olarak Denklem 3 ve 4'ün Denklem 6'da yerine yazılmasıyla δ^* ve θ için,

$$\text{Yerdeğiştirme kalınlığı:} \quad \frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\text{Re}_x)^{1/7}} \quad (7)$$

ve

$$\text{Momentum kalınlığı:} \quad \frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\text{Re}_x)^{1/7}} \quad (8)$$

sonuçları bulunur.

İrdeleme Sonuçlar, Tablo 10–4'ün (a) sütununda verilen ifadelerle iki anlamlı basamağa kadar uyum göstermektedir. Aslında Tablo 10–4'teki ifadelerin çoğu Kármán integral denklemi yardımıyla elde edilmiştir.



Karman integral denklemini kullanabilmek için bilinen (veya kabul edilen) bir hız profiline ihtiyaç vardır.

ÖRNEK 10-15**Bir Rüzgâr Tünelinin Test Bölgesinin Çeperi Üzerindeki Direnç**

Dikdörtgen kesitli bir rüzgâr tünelinin çeperi boyunca bir sınır tabaka gelişmektedir. Hava 20°C sıcaklıkta ve atmosfer basıncındadır. Sınır tabaka, daralma bölgesinin yukarıakımından başlamakta ve test bölgesi içerisine doğru büyümektedir (Şekil 10-132). Test bölgesine ulaştığında ise sınır tabaka tamamen türbülanslı olmaktadır. Sınır tabaka profili ve kalınlığı, rüzgâr tünelinin test bölgesinin alt çeperinin hem başında ($x = x_1$) hem de sonunda ($x = x_2$) ölçülmektedir. Test bölgesi 1.8 m boyunda 0.50 m eninde (Şekil 10-132'de sayfa içine doğru) olup aşağıda verilen ölçümler yapılmıştır:

$$\delta_1 = 4.2 \text{ cm} \quad \delta_2 = 7.7 \text{ cm} \quad V = 10.0 \text{ m/s} \quad (1)$$

Sınır tabaka profili, her iki konumda da standart 1/7'inci kuvvet yasası yaklaşıtlarına kıyasla 1/8'inci kuvvet yasası yaklaşıtlarına daha iyi uyum göstermektedir:

$$y \leq \delta \text{ için } \frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8} \quad y > \delta \text{ için } \frac{u}{U} \cong 1 \quad (2)$$

Buna göre rüzgâr tünelinin test bölümünün alt çeperine etkiyen F_D toplam çeper sürtünme direnç kuvvetini belirleyiniz.

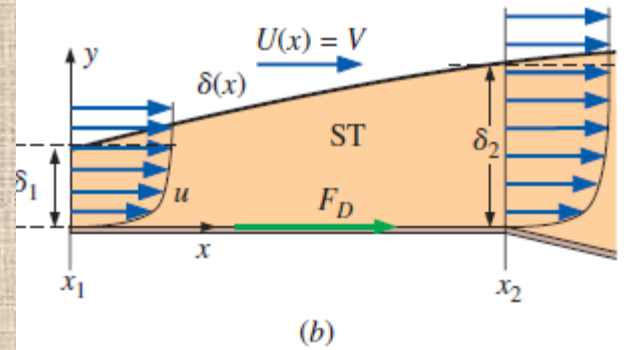
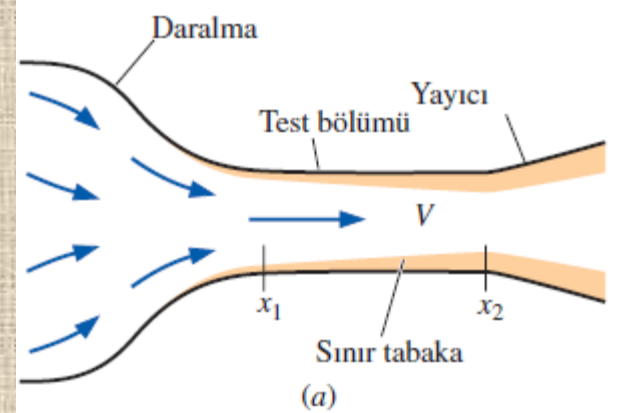
ÇÖZÜM Bir rüzgâr tünelinin test bölümünün alt çeperi üzerine ($x = x_1$ ile $x = x_2$ arasında) etkiyen toplam çeper sürtünme direnç kuvveti belirlenecektir.

Özellikler 20°C'deki hava için $\nu = 1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ve $\rho = 1.204 \text{ kg/m}^3$.

Kabuller 1 Akış ortalama olarak daimidir. 2 Rüzgâr tünelinin çeperleri $U(x) = V = \text{sabit}$ olacak şekilde hafifçe ıraksamaktadır.

Analiz Momentum kalınlığı θ 'yı bulmak için önce Denklem 2'yi Denklem 10-80'de yerine koyup integre edelim:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8}\right] dy = \frac{4}{45} \delta \quad (3)$$

**ŞEKİL 10-132**

Örnek 10-15'te verilen rüzgâr tünelinin çeperleri boyunca gelişen sınır tabaka: Test bölgesinin alt çeperinin (a) genel görünüşü ve (b) yakın görünüşü (sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

Düz bir levha sınır tabakası için Kármán integral denklemi Denklem 10–99'ye dönüşür. Çeper boyunca olan kayma gerilmesi cinsinden Denklem 10–99

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho U^2 C_{f,x} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (4)$$

haline gelir. Çeper sürtünme direnç kuvvetini bulmak için Denklem 4'ü $x = x_1$ 'den $x = x_2$ 'ye integre edersek,

$$F_D = w \int_{x_1}^{x_2} \tau_w dx = w \rho U^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta}{dx} dx = w \rho U^2 (\theta_2 - \theta_1) \quad (5)$$

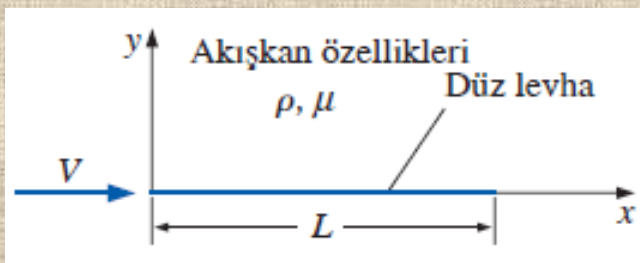
buluruz. Burada w , çeperin Şekil 10–132'de sayfa düzlemine dik genişliğidir. Denklem 3'ün Denklem 5'te yerine yazılmasıyla,

$$F_D = w \rho U^2 \frac{4}{45} (\delta_2 - \delta_1) \quad (6)$$

sonucuna varılır. Son olarak verilen sayısal değerlerin Denklem 6'da yerine konulmasıyla direnç kuvveti aşağıdaki gibi bulunur:

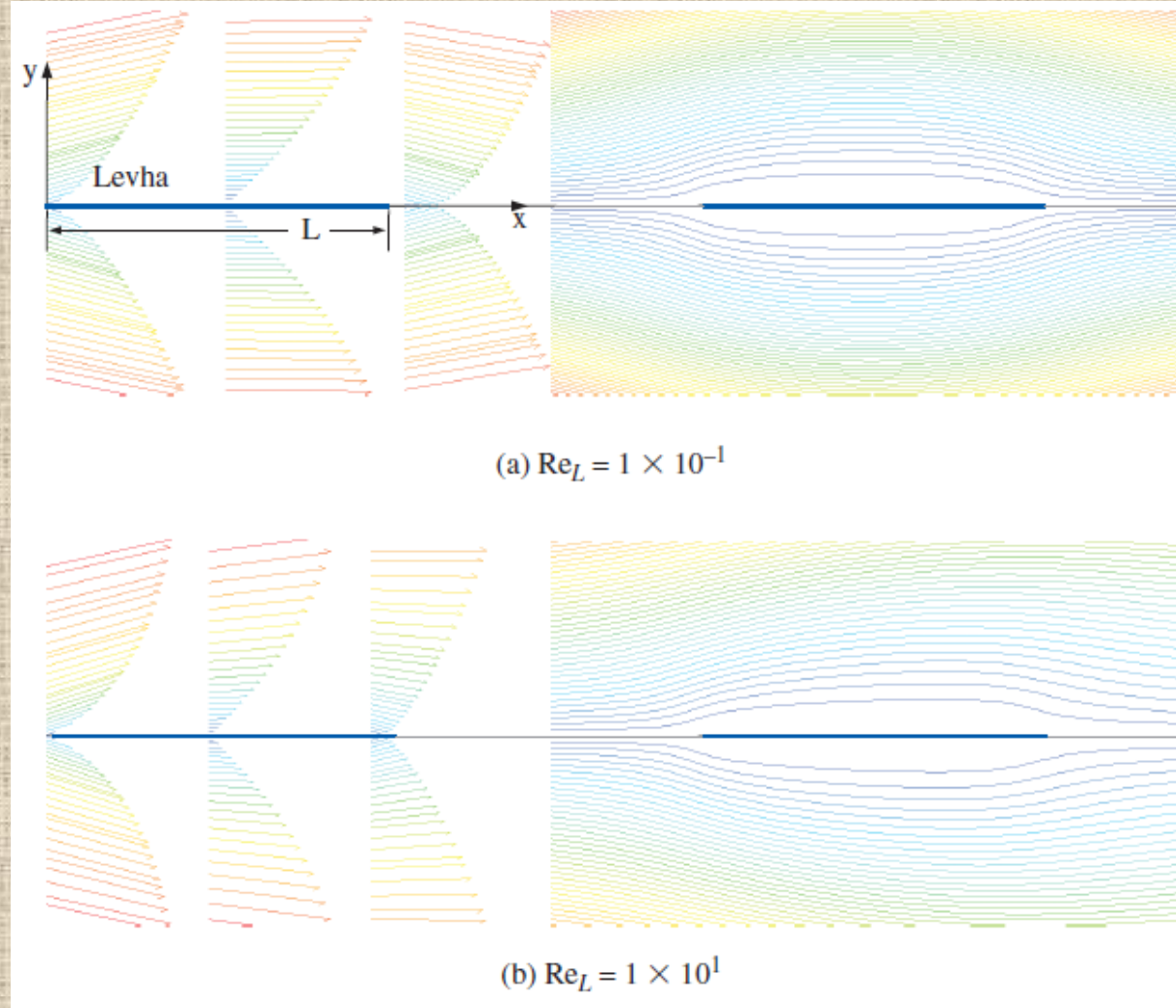
$$F_D = (0.50 \text{ m})(1.204 \text{ kg/m}^3)(10.0 \text{ m/s})^2 \frac{4}{45} (0.077 - 0.042) \text{ m} \left(\frac{\text{s}^2 \cdot \text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}} \right) = \mathbf{0.19 \text{ N}}$$

İrdeleme Newton'un küçük bir kuvvet birimi olması nedeniyle bulunan kuvvet oldukça küçüktür. Eğer dış akış hızı $U(x)$ sabit olmasaydı Kármán integral denklemini uygulamak daha zor olurdu.



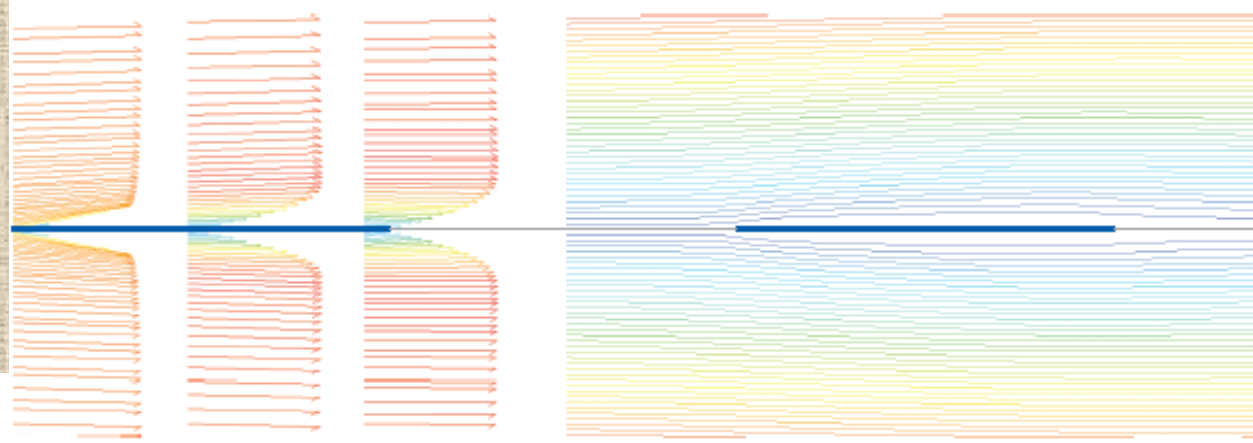
L uzunluğunda sonsuz ince bir düz levha üzerindeki akış. HAD hesaplamaları Re_L 'nin 10^{-1} ile 10^5 arasındaki değerleri için verilmiştir.

1 m uzunluğunda sonsuz ince bir düz levha üzerinde soldan sağa doğru daimi, sıkıştırılamaz laminar akışa ait HAD hesaplamaları; hız vektörleri sol sütunda ve levha boyunca üç farklı konumda gösterilmiş olup levha civarındaki akım çizgileri sağ sütunda verilmiştir. (a) $Re_L = 0.1$ (b) $Re_L = 10$, (c) $Re_L = 1000$ ve (d) $Re_L = 100000$. Akışın yalnızca üst yarısı çözülmüştür –alt yarısı ise bir ayna görüntüsüdür. Hesaplama bölgesinin kenarlarında “sonsuz” uzak-alan şartlarını göz önüne almak için, hesaplama bölgesi burada gösterilenin ötesinde yüzlerce levha boyu kadar uzamaktadır.

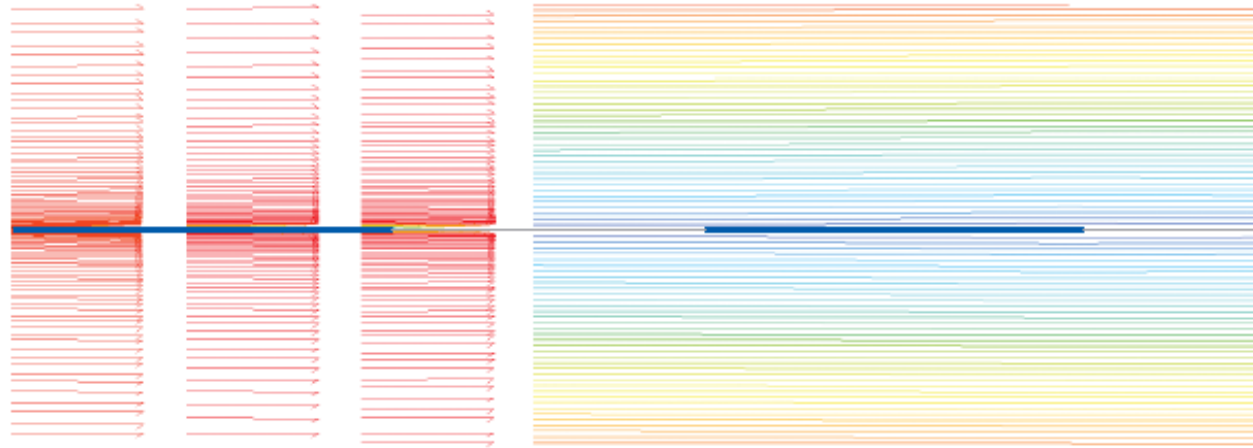


1 m uzunluğunda sonsuz ince bir düz levha üzerinde soldan sağa doğru daimi, sıkıştırılamaz laminar akışa ait HAD hesaplamaları; hız vektörleri sol sütunda ve levha boyunca üç farklı konumda gösterilmiş olup levha civarındaki akım çizgileri sağ sütunda verilmiştir. (a) $Re_L = 0.1$ (b) $Re_L = 10$, (c) $Re_L = 1000$ ve (d) $Re_L = 100000$. Akışın yalnızca üst yarısı çözülmüştür –alt yarısı ise bir ayna görüntüsüdür.

Hesaplama bölgesinin kenarlarında “sonsuz” uzak-alan şartlarını göz önüne almak için, hesaplama bölgesi burada gösterilenin ötesinde yüzlerce levha boyu kadar uzamaktadır.

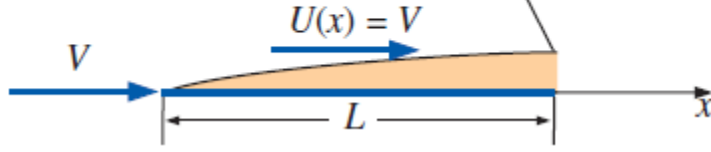


(c) $Re_L = 1 \times 10^3$

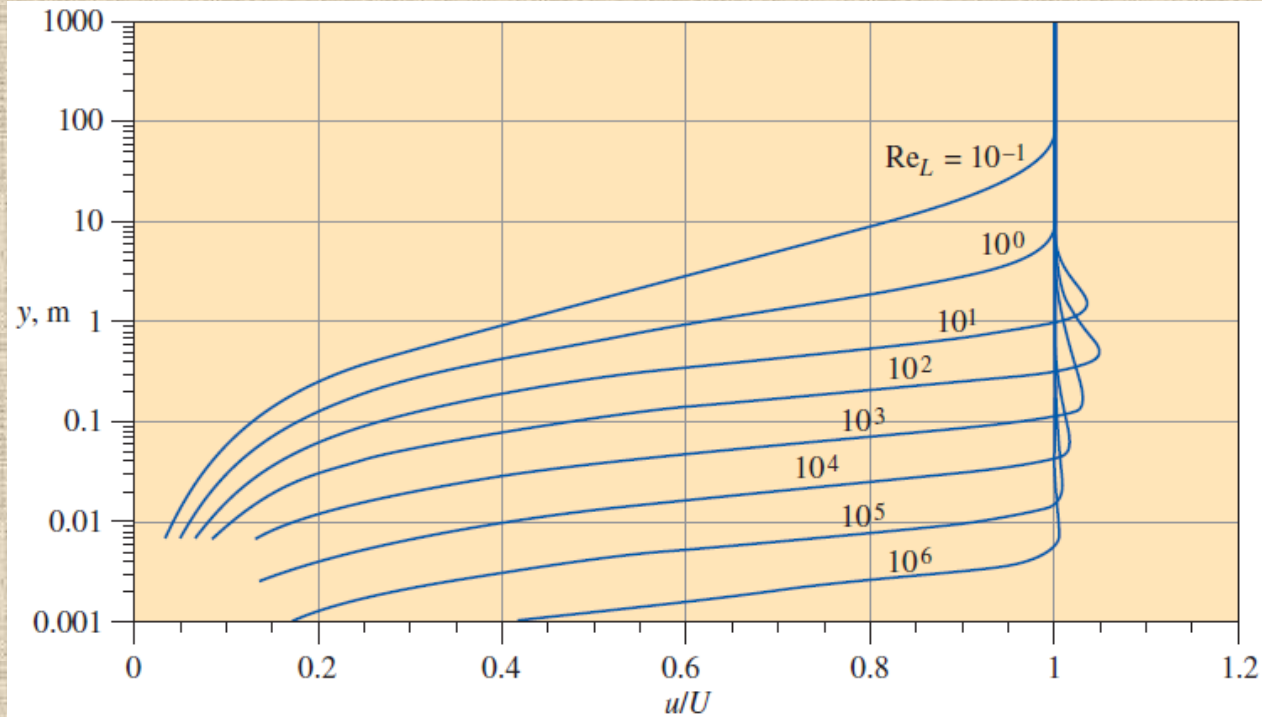


(d) $Re_L = 1 \times 10^5$

$$\delta(L) = \frac{4.91(1 \text{ m})}{\sqrt{1000}} = 0.155 \text{ m}$$



Düz bir levha üzerindeki laminar akış için $Re_L = 1000$ 'de sınır tabaka kalınlığının hesaplanması. Bu sonuç, Şekil 10-134c'de gösterilen aynı Reynolds sayısı için $x = L$ 'de HAD kullanılarak elde edilen hız profili ile karşılaştırılmıştır.



Sonsuz ince düz levha bir üzerinde daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu HAD hesaplamaları: Levha sonundaki ($x = L$) boyutsuz x hız bileşeni u/U levhadan olan düşey mesafe y 'ye göre çizilmiştir. Orta seviyedeki Reynolds sayılarında gözlemlenen baskın hız aşması, çok düşük ve çok yüksek Re_L değerlerinde gözden kaybolmaktadır.

Özet

- **GİRİŞ**
- **BOYUTSUZ HAREKET DENKLEMLERİ**
- **SÜRÜNME AKIŞI YAKLAŞTIRIMI**
 - ✓ Sürünme Akışında Bir Küre Üzerindeki Direnç Kuvveti
- **VİSKOZ OLMAYAN AKIŞ BÖLGESİ YAKLAŞTIRIMI**
 - ✓ Viskoz Olmayan Akış Bölgelerinde Bernoulli Denkleminin Türetilmesi
- **DÖNÜMSÜZ AKIŞ YAKLAŞTIRIMI**
 - ✓ Süreklilik Denklemi
 - ✓ Momentum Denklemi
 - ✓ Dönümsüz Akış Bölgelerinde Bernoulli Denkleminin Türetilmesi
 - ✓ İki-Boyutlu Dönümsüz Akış Bölgeleri
 - ✓ Dönümsüz Akış Bölgelerinin Süperpozisyonu
 - ✓ Temel Düzlemsel Dönümsüz Akışlar
 - ✓ Süperpozisyon ile Oluşturulan Dönümsüz Akışlar
- **SINIR TABAKA YAKLAŞTIRIMI**
 - ✓ Sınır Tabaka Denklemleri
 - ✓ Sınır Tabaka Çözüm Yolu
 - ✓ Yerdeğiştirme Kalınlığı
 - ✓ Momentum Kalınlığı
 - ✓ Düz Levha Üzerinde Türbülanslı Sınır Tabaka
 - ✓ Basınç Gradyenli Sınır Tabakalar
 - ✓ Sınır Tabakalar için Momentum Integral Tekniği