Akım düzlemine dik yöndeki vortisite vektörü bileşenine bakacak olursak,

$$\omega_z = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{2U}{R} r^2 \sin\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{U}{R} r\cos\theta\right)$$

$$\omega_z = -3U\frac{r}{R}\sin\theta$$

AKIŞ İRROTASYONEL DEĞİLDİR!

2. $\Pi_g = gz$ (Yerçekimi kuvveti potansiyeli)

$u_\theta = \Omega r$

$f_c = \frac{u_\theta^2}{r}\hat{e}_r = \Omega^2 r \hat{e}_r$ (Merkezkaç kuvvet)

$f_c = -\nabla \Pi_c = -\frac{\partial \Pi_c}{\partial r} e_r$ $\quad \Pi_c = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2$

(Merkezkaç kuvveti potansiyel fonksyonu)

Dolayısıyla hem yerçekimi hem de merkezkaç kuvvetler korunumludurlar.

Bernoulli denklemi,

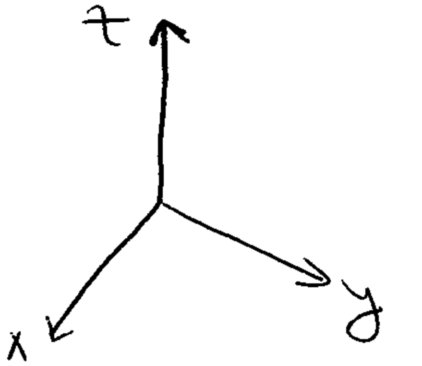
$$P + \frac{1}{2}\rho\,\vec{u}\cdot\vec{u} + \rho\Pi = \text{sabit}$$

Koordinat eksenine göre hız sıfır olduğundan,

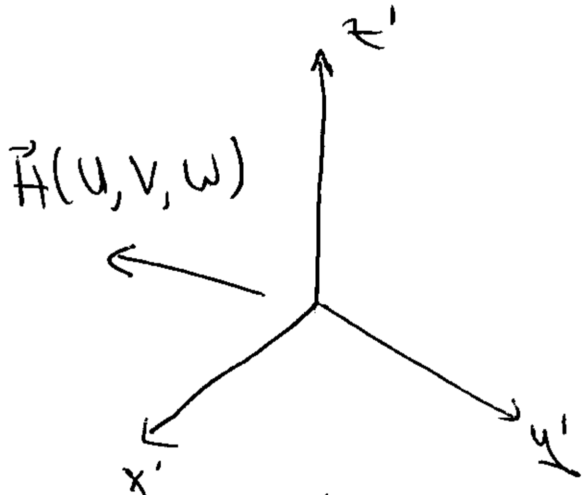
$$P + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 = \text{sabit}$$

.

$\vec{u}(u,\vartheta,w)$
akış hızı



Sabit



Hareketli

$$(x,y,z,t) \xrightarrow[\text{Dönüşümü}]{\text{koordinat}} (x',y',z',t')$$

$$x' = x - Ut$$
$$y' = y - Vt$$
$$z' = z - Wt$$
$$t' = t$$

Hareketli koordinat sistemindeki gözlemcinin gördüğü hız, bağıl hızdır (u')

$$\underbrace{\vec{U}'}_{\text{bağıl Hız}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{Gözlenen}} - \underbrace{\vec{H}}_{\text{Gözlemci}}$$

$$u' = u - U$$
$$\vartheta' = \vartheta - V$$
$$w' = w - W$$

Euler denklemi, (sabit koordinat takımında)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}(\vec{\nabla}.\vec{u}) = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{f} \qquad (I)$$

Eğer Euler denklemi Galileo dönüşümü altında invaryant ise,

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \vec{u}'(\vec{\nabla}' \cdot \vec{u}') = -\frac{\vec{\nabla}' P}{\rho} + \vec{f} \quad (\mathrm{II})$$

olmalıdır.

* P, ρ termodinamik özellikler olduğundan koordinat ekseni seçimine bağlı değillerdir.
* Birim kütleye etki eden harici kuvvet te koordinat ekseni seçiminden etkilenmez.

Yeniden düzenlersek,

$$x = x' + Ut \qquad y = y' + Vt \qquad z = z' + Wt$$

Uzama bağlı kısmi türevler,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

Dolayısıyla $\nabla'(\ ) = \nabla(\ )$ bulunur.

* Bu durumda (I) ile (II) numaralı denklemlerin sağ taraflarındaki ifadeler aynıdır.

Zamana bağlı kısmi türev,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} \cancel{\frac{\partial t'}{\partial t}}^{\,1} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}$$

(Zincir kuralı)

Düzenlersek,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y} + W\frac{\partial}{\partial z}$$

Yahut,

$$\frac{\partial(\;)}{\partial t'} = \frac{\partial(\;)}{\partial t'} + \vec{H}[\nabla'.(\;\;)]$$

olarak ta ifade edilebilir.

(II) numaralı denklemin sol tarafı,

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \vec{H}.\nabla' u' + u'(\nabla'.u') \quad \text{olur.}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad t = t' \quad , \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

(Koordinat takımı sabit hızla ilerliyor)

Yeniden sol tarafı yazarsak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{H}\,\nabla.u' + \underbrace{u'}_{u-H}(\nabla.u') \qquad [\,\nabla' = \nabla \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{H(\nabla.u')} + u\,\nabla.u' - \cancel{H(\nabla.u')}$$

$\nabla u' = \nabla u$ Çünkü U,V,W konumdan bağımsız.

(II) numaralı denklemin sol tarafı,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\,(\nabla . \vec{u})$$ olarak bulunur.

Bu da (I) numaralı denklemin sol tarafı ile aynıdır.

Hem sol hem sağ taraflar aynıdır.

(I) = (II)

Euler denklemi Galileo dönüşümü altında invaryanttır.

Q.E.D.